Teorema (De L'Hôpital)

f, g derivabili in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}^+$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ t.c

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure $+\infty$, $-\infty$)

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a;

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$

Allora $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Dim nel caso $\frac{0}{0}$ (cioè $f(x)$ e $g(x) \to 0$ per $x \to a^+$)

1°) $a > -\infty$ $(a \in \mathbb{R})$.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ se definisco $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$

$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x = a. \end{cases}$

$\Rightarrow \tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono continue in $[a,b)$

Fissiamo $x \in (a,b)$ e applichiamo il teorema di Cauchy

Teor Se $\tilde{f}, \tilde{g}$ continue in $[a,x]$, derivabili in (a,x)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,x)$ t.c. $\tilde{f}'(c)\,[\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)] = \tilde{g}'(c)\,[\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)]$

Se x è sufficientemente vicino ad a, ho $g'(c) \neq 0$

$$\frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)}$$

oss $g(x) - g(a) \neq 0$.
se fosse $g(x) = g(a)$, per Rolle, dovrebbe esistere un

punto in cui g' si annulla, cosa che abbiamo escluso

<u>oss</u> $\quad c = c(x) \qquad a < c(x) < x$

$$\frac{\tilde f(x) - \overset{=0}{\tilde f(a)}}{\tilde g(x) - \underset{=0}{\tilde g(a)}} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \qquad \text{con } a < c(x) < x$$

$$\| $$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \ell$$

<u>oss</u> per $x \to a^+$,

$y = c(x) \to a^+$

per il thm dei carabinieri $\square$

2) se $a = -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(-\frac{1}{t}\right)}{g\left(-\frac{1}{t}\right)} = \left[\begin{array}{l}\text{applico l'Hopital}\\ \text{nel caso appena}\\ \text{provato}\end{array}\right]$$

$t = -\frac{1}{x} \to 0^+$

$x = -\frac{1}{t}$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(-\frac{1}{t}\right)\cancel{\frac{1}{t^2}}}{g'\left(-\frac{1}{t}\right)\cancel{\frac{1}{t^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \qquad \square$$

ritorno a

$x = -\frac{1}{t} \to -\infty$

Esercizio Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$ di $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 3x - x^2$.

Devo trovare, se esiste, $\alpha > 0$ t.c.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ sia finito e non nullo.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\operatorname{tg}x - 3x - x^2}{x^\alpha} \cancel{\overset{?}{\underset{H}{=}}} \lim_{x\to 0^+} \frac{3(\cancel{1}+\operatorname{tg}^2 x) - \cancel{3} - 2x}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3\operatorname{tg}^2 x - 2x}{\alpha\, x^{\alpha-1}} \underset{\boxed{\text{se } \alpha > 1}}{=} \left(\frac{0}{0}\right) \cancel{\overset{?}{\underset{H}{=}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{6\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)}^{\to 0} - 2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} \underset{\boxed{\alpha=2}}{=} \frac{-2}{2\cdot 1} = -1$$

$f(x) \sim -x^2$ infinitesimo di ordine 2.

Stessa domanda per

$$f(x) = 3\operatorname{tg}x - 3x - x^3$$

Cerco $\alpha > 0$ t.c.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ sia finito e non nullo.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\operatorname{tg}x - 3x - x^3}{x^\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{3} + 3\operatorname{tg}^2 x - \cancel{3} - 3x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3(\operatorname{tg}^2 x - x^2)}{\alpha\, x^{\alpha-1}} \underset{\alpha>1}{=} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3\left(2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x) - 2x\right)}{\alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6\,(\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}^3 x - x)}{\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}}$$

$\alpha > 2$

$$= \frac{6}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1} + \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x) - \cancel{1}}{(\alpha-2)\,x^{\alpha-3}} =$$

$$= \frac{6}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^4 x}^{= \operatorname{tg}^2 x\,(4+3\operatorname{tg}^2 x)}}{x^{\alpha-3}} =$$

$\operatorname{tg}^2 x \sim x^2$, $\quad 4+3\operatorname{tg}^2 x \to 4$

$\boxed{\text{scelgo } \alpha = 5}$

$$= \frac{6}{5\cdot\cancel{4}\cdot 3} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{4}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \frac{2}{5}$$

$$f(x) \sim \frac{2}{5}x^5 \qquad \text{per } x \to 0^+$$

OSS 1 Non sempre L'Hopital è la cosa più conveniente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin^4(\sqrt{x})}^{\sim x^2}}{\underbrace{\log(1+3x)}_{\sim 3x}\,\underbrace{\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}_{\sim x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{3}$$

Invece con L'Hôpital sarebbe complicato

OSS 2 Controllare che sia una f.i. $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+x}{3+x} \;\cancel{\underset{H}{=}}\; \cancel{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1} = 1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

non si può perché non è $\frac{0}{0}$

OSS 3 Se non esiste $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, non vuol dire

che non esiste $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x}}_{\shortparallel} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \cancel{\overset{?}{\underset{H}{=}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to+\infty} (1+\cos x) \nexists$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 0$$

OSS 4 Il teorema di De L'Hopital dice che, sotto certe ipotesi,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ma non dice che $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Esempio $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

ma non è vero che

$\frac{e^x}{x} \sim \frac{e^x}{1}$ No!

Applicazione dell'Hopital al calcolo degli asintoti obliqui.

PROP f derivabile in $(a,+\infty)$, supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.

Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

Dim $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = m$ $\square$

Attenzione: ci sono funzioni che ammettono asintoto obliquo per $x\to+\infty$ ma non esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

$$f(x) = x + \frac{\sin(x^k)}{x} \qquad k>0 \text{ da fissare}$$

$\frac{\sin(x^k)}{x} \to 0$ per $x\to+\infty$

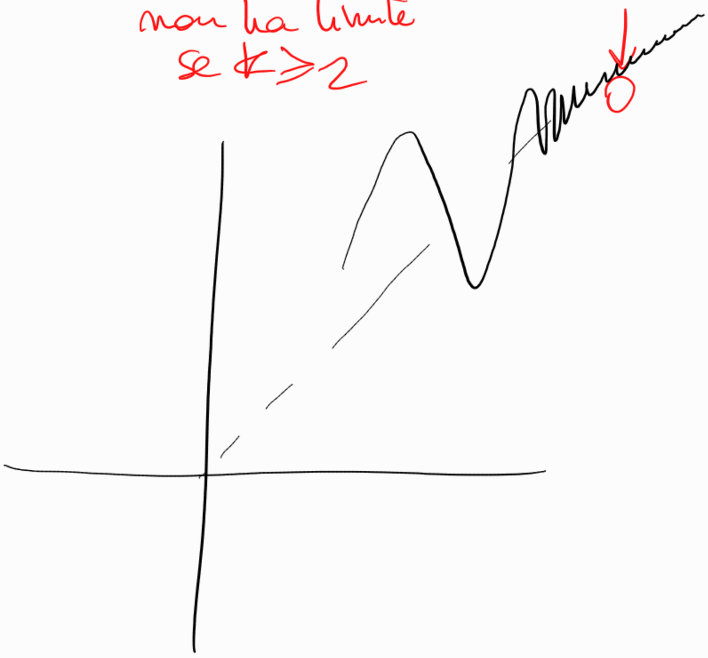
Quindi $y=x$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\cos(x^k)\,k\,x^{k-1}\,x + \sin(x^k)}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 + k\,\frac{x^k}{x^2}\cos(x^k) + \frac{\sin(x^k)}{x^2}\right) \nexists \quad \text{se } k\geq 2$$

non ha limite se $k\geq 2$

$\frac{\sin(x^k)}{x^2} \to 0$



$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3 + x^2 + \log(1-x^2)} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\cancel{X}}{\underset{H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2 + 2x + \frac{-2x}{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)\boxed{(1-x^2)} \to 1}{3x^2(1-x^2) + 2x(\cancel{1}-x^2) - \cancel{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\cos x - 1}^{\sim -\frac{x^2}{2}}}{\underbrace{3x^2 - 3x^4 - 2x^3}_{\sim 3x^2}} = -\frac{1}{6}$$

Polinomi di Taylor

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $\underset{\text{quante volte vogliamo.}}{\underbrace{\infty \text{ volte}}}$ in (a,b)

Sia $x_0 \in (a,b)$

Pb0) Qual è il polinomio di grado 0 (costante!) che "meglio approssima f" vicino a x_0?

è $T_0(x) = f(x_0)$. Perché?

E' l'unico polinomio di grado zero t.c

$$f(x) - T_0(x) = o(1) \quad \text{per } x \to x_0.$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - T_0(x)\right) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right)} \quad \text{perché } f \text{ è continua.}$$

Pb 1) Qual è il polinomio di grado 1 che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0?

è $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

In che senso è migliore? Nel senso che è l'unico polinomio di grado 1 t.c.

$$f(x) - T_1(x) = o(x-x_0) \qquad \text{per } x \to x_0$$

cioè
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0} = 0$$

verifica:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0) \Big) = 0$$

(Prob. 2) Qual è il polinomio di grado ≤ 2 che meglio approssima f vicino a x_0.

Voglio trovare $T_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$ t.c.

$$f(x) - T_2(x) = o((x-x_0)^2) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Voglio che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{f(x)-a_0}^{\to f(x_0)} \overbrace{-a_1(x-x_0)}^{\to 0} \overbrace{-a_2(x-x_0)^2}^{\to 0}}{\underbrace{(x-x_0)^2}_{\to 0}} =$$

$$\underset{\boxed{a_0=f(x_0)}}{=}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{?}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{\underbrace{f'(x)}_{\to f'(x_0)}-a_1-\underbrace{2a_2(x-x_0)}_{\to 0}}{\underbrace{2(x-x_0)}_{\to 0}}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{se}\ \boxed{a_1=f'(x_0)}$$

$f'(x_0)$ perché f' è derivabile $\Rightarrow$ continua

$$\overset{?}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-2a_2}{2}=\frac{f''(x_0)-2a_2}{2}=0\ \text{se}\ \boxed{a_2=\frac{f''(x_0)}{2}}$$

L'unico polinomio è $T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

(Prob. 3). Qual è il polinomio di grado ≤ 3 che meglio approssima $f(x)$ vicino a x_0?

Cerco $T_3(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3$ t.c.

$$f(x)-T_3(x)=o\left((x-x_0)^3\right)\quad \text{per}\quad x\to x_0$$

cioè

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_3(x)}{(x-x_0)^3}=0$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)-a_2(x-x_0)^2-a_3(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad \boxed{a_0=f(x_0)}$$

$$\underset{H}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-a_1-2a_2(x-x_0)-3a_3(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\quad \boxed{a_1=f'(x_0)}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2a_2 - 6a_3(x-x_0)}{6(x-x_0)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x) - 6a_3}{6} = 0$$

$$\boxed{a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6} = \frac{f'''(x_0)}{3!}}$$

Prob 4) Stessa cosa per il polinomio di grado

Riscrivere la domanda.

Risposta:

$$T_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4$$

è l'unico polinomio di grado ≤ 4 t.c.

$$f(x) - T_4(x) = o\left((x-x_0)^4\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

DEF Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Sia f derivabile n volte in x_0 $(n \in \mathbb{N})$.

Si definisce **polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0** il polinomio

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$