Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b_k \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{n,k}.$$

$$(a+b)^7 = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{7} = a^7 + 7a^6 b + \ldots$$

$$\ldots + \binom{7}{3} a^4 b^3 \ldots$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3!}} = 35$$

Questi coeff^{ti} binomiali generano il cosiddetto triangolo di Tartaglia

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

$(a+b)^3$ 1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6$ 1 6 15 20 15 6 1

$\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{6}{4}$

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} \overset{?}{=} \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \qquad \binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

$10 + 5 = 15$ vero!

$$\boxed{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\overset{?}{=}\binom{n+1}{k}}$$

$\boxed{1°)\ \text{dim. algebrica}}$

$$\frac{\cancel{n!}}{(k-1)!\,\underbrace{(n-k+1)!}_{=(n-k)!\,(n-k+1)}}+\frac{\cancel{n!}}{\underbrace{k!}_{=(k-1)!\,k}(n-k)!}\overset{?}{=}\frac{\overbrace{(n+1)!}^{=\cancel{n!}\,(n+1)}}{\underbrace{k!}_{=(k-1)!\,k}\,\underbrace{(n+1-k)!}_{=(n-k)!\,(n-k+1)}}$$

divido per $\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$, quindi ciò equivale a

$$\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\overset{?}{=}\frac{n+1}{k\,(n-k+1)}$$

$$\frac{\cancel{k}+n-\cancel{k}+1}{(n-k+1)\,k}\overset{?}{=}\frac{n+1}{k\,(n-k+1)}$$

ok!

2°) Ora voglio dare una dim. combinatoria della formula

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

$\binom{n+1}{k}$ = quanti sottoinsiemi non ordinati di k elementi posso scegliere su $n+1$ elementi dati?

Sia x un elemento fissato degli $n+1$

I sottoinsiemi di k elementi sono di due tipi:

1) quelli che contengono x
2) " " non contengono x.

Quanti sono quelli che contengono x? sono $\binom{n}{k-1}$

Quanti sono quelli che non contengono x? sono $\binom{n}{k}$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Derivate successive di un prodotto:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' =$$

$$\cancel{= f''g + 2f'g' + fg''}$$

$$(fg)''' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$$(fg)^{(4)} = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{(4)}$$

In generale si ottiene la formula

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Passiamo alle potenze di un trinomio:

$$(a+b+c)^{50} = a^{50} + 50a^{49}b + 50a^{49}c + \ldots$$

$$+ (?)\, a^4 b^{31} c^{15}$$

che coefficiente ci vuole?

$$(a+b+c)^{50} = \underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\ldots(a+b+c)}_{50}$$

Facendo tutti i prodotti, senza sommarli, ottengo 3^{50} termini.
Quanti contengono esattamente 4 a, 31 b e 15 c?

Prima scelgo 4 fattori su 50: sono quelli da cui prendiamo le a $\binom{50}{4}$

Poi scelgo le b. Sono 31 fattori su 46. Il numero di scelte è $\binom{46}{31}$

Le restanti sono quelle da cui prendere la c.

Quindi il coefficiente vale $\binom{50}{4}\binom{46}{31} = \frac{50!}{4!\,\cancel{46!}}\cdot\frac{\cancel{46!}}{31!\,15!} =$

$$= \frac{50!}{4!\,31!\,15!} = \binom{50}{4,31,15}$$

coeff^{te} multinomiale.

L'usuale coeff^{te} binomiale $\binom{n}{k}$ coincide con il coeff^{te} multinomiale $\binom{n}{k,\,n-k}$

Il coeff^{te} multinomiale $\binom{n}{k,h,l} = \frac{n!}{k!\,h!\,l!}$ con $k+h+l=n$

rappresenta i modi diversi in cui mettere n elementi distinti in 3 cassetti in modo che:

- nel primo cassetto ce ne siano k
- " secondo " " " " h
- " terzo " " " " l

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+k_3=n}} \binom{n}{k_1,k_2,k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$$

e in generale per le potenze di un polinomio.

$$(x_1+x_2+\dots+x_h)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots k_h\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+\dots+k_h=n}} \binom{n}{k_1,k_2,\dots k_h} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\cdots x_h^{k_h}$$

$$\binom{n}{k_1,k_2,\dots k_h} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_h!}$$