$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

Dominio: $\mathbb{R}$

Segno: $\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$$

$$> 0 \iff \dots > \dots \iff \dots > \dots \iff x > 0$$

$$< 0 \qquad\qquad x < 0$$

Simmetrie: $\cosh x$ è pari, $\sinh x$ è dispari

$\cosh 0 = 1$, $\sinh 0 = 0$.

Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$

Per $x \to +\infty$ $\cosh x \sim \frac{e^x}{2} \sim \sinh x$

Derivata: $(\sinh x)' = \cosh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\cosh x)' = \sinh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$(\sinh x)' > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \sinh x$ strett. crescente in $\mathbb{R}$

$(\cosh x)' \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

$\cosh x$ strett. crescente in $[0, +\infty)$

" decrescente in $(-\infty, 0]$

$x = 0$ pto di min. assoluto.

Derivata seconda

$(\sinh x)'' = \sinh x \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

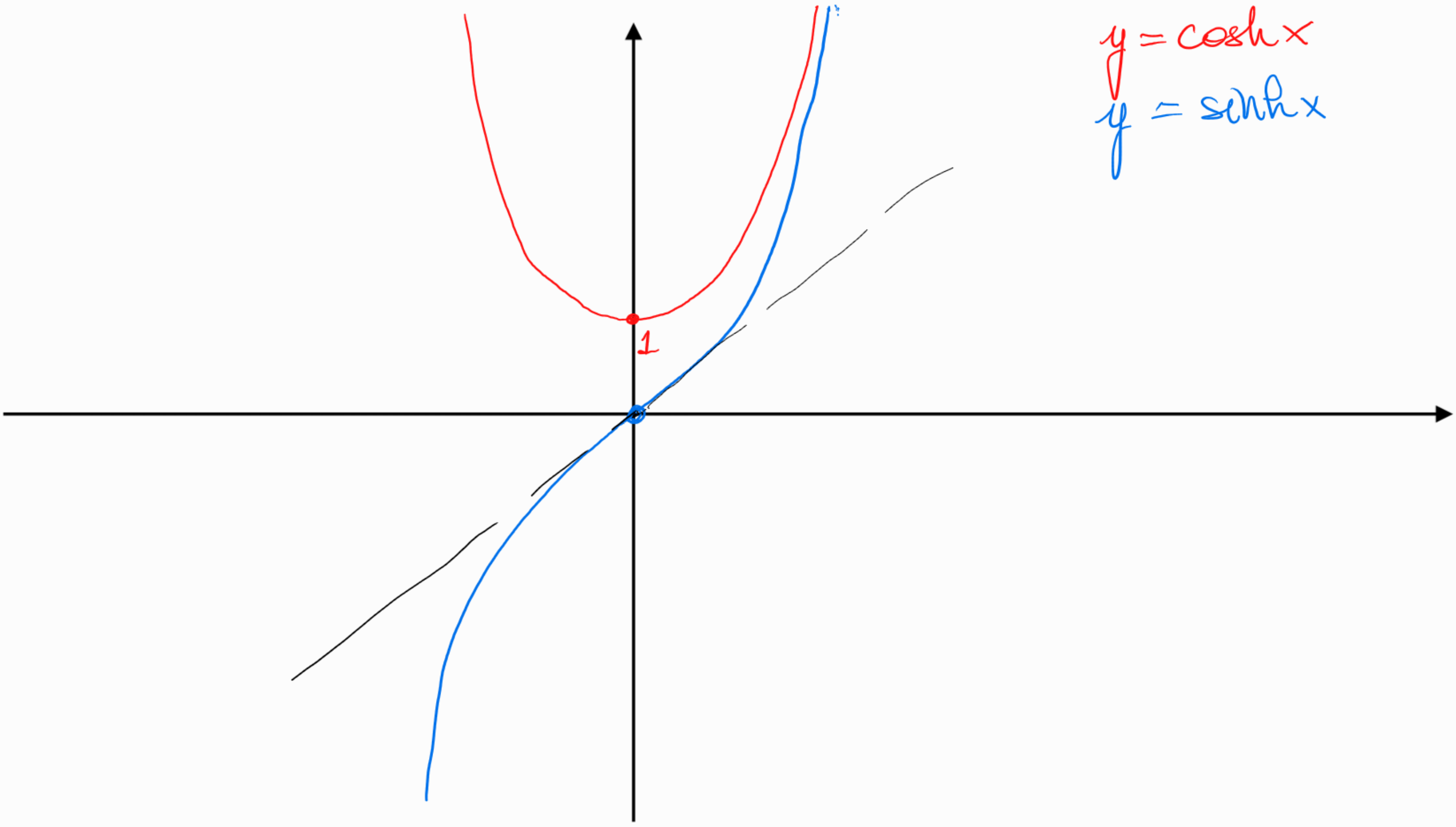
$\sinh x$ strett. convessa in $[0, +\infty)$

" concava in $(-\infty, 0]$

$x = 0$ è punto di flesso.

$(\cosh x)'' = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\implies \cosh x$ strett. convessa in $\mathbb{R}$.



Identità fondamentale $\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$$\cosh x = \pm\sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+\sinh^2 x}$$

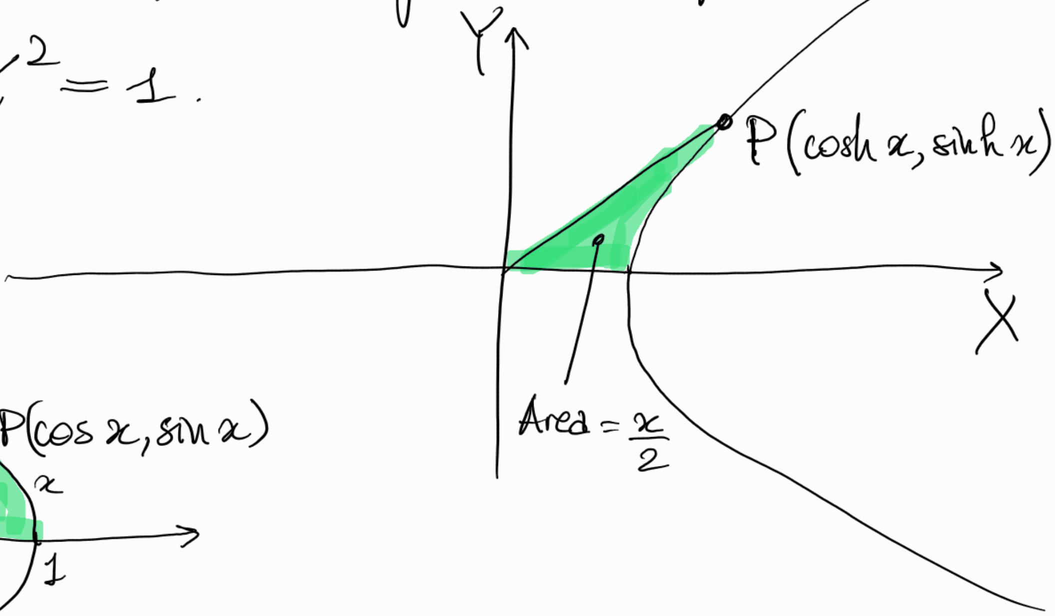
scelgo sempre il +

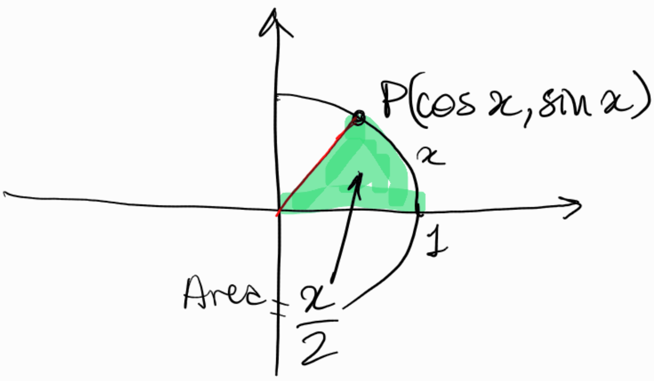
$$\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

scelgo il "+" per $x \geq 0$
scelgo il "−" per $x \leq 0$

Il punto $P(\cosh x, \sinh x)$ giace sull'iperbole

$$X^2 - Y^2 = 1.$$





$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow \, 1} \underbrace{\boxed{\frac{(e^{2x}-1)}{2x}}}_{\downarrow \, x\to 0 \quad 1} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1}$$

$\sinh x \sim x \quad$ per $x \to 0$

$\sinh x = x + o(x) \quad$ per $x \to 0$

$\sinh x = x(1+o(1)) \quad$ "

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} \cdot \frac{\cosh x + 1}{\cosh x + 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2 x - 1}{x^2 \underbrace{(\cosh x + 1)}_{\downarrow \, 2}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sinh^2 x}{x^2}}_{= \left(\frac{\sinh x}{x}\right)^2 \to 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad$ per $x \to 0$

$\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad$ "

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad$ "

Funzione iperboliche inverse

$\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva.

- iniettiva perché strett. crescente
- suriettiva perché (teor. dei valori intermedi) assume tutti i valori compresi tra $\inf_{\mathbb{R}} \sinh x = -\infty$ e $\sup_{\mathbb{R}} \sinh x = +\infty$

$\exists$ la funzione inversa: settsinh

$$\operatorname{settsinh} y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto \text{l'unico } x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sinh x = y$$

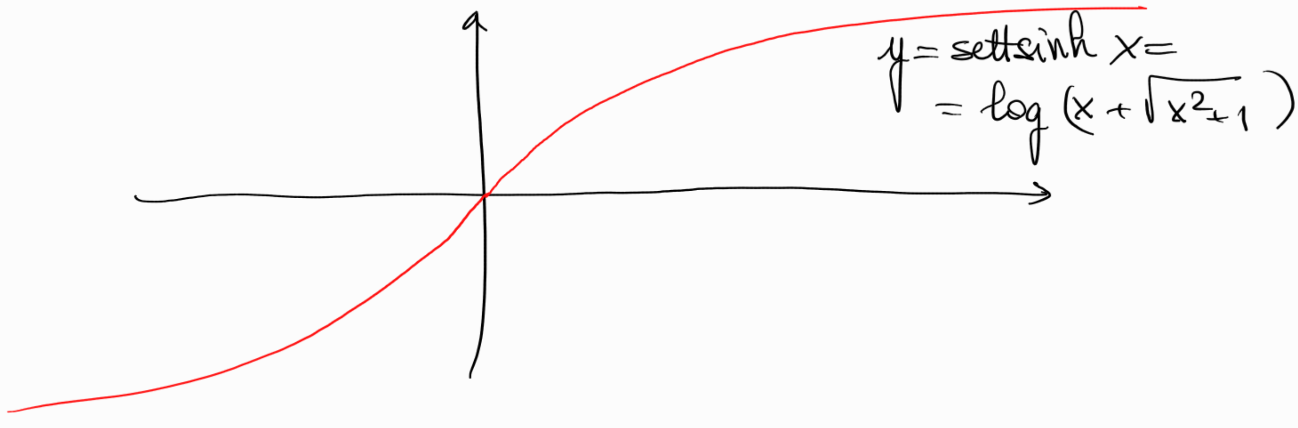
Questa si risolve nella x

$$\sinh x = y \iff e^x - e^{-x} = 2y \quad \text{moltiplico per } e^x$$
$$\iff e^{2x} - 1 = 2y e^x \quad \text{eq}^{\text{ne}} \text{ di } 2^\circ \text{ grado in } t = e^x$$
$$\iff e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$$
$$\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

scelgo il + altrimenti viene negativo

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$x = \boxed{\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \operatorname{settsinh} y}$$



$$D(\text{settsinh } x) = ?$$

1°) usando il teorema della derivata di f^{-1}.

$$D(\text{settsinh } y) = \frac{1}{D(\sinh x)\big|_{x=\text{settsinh } y}} =$$

$$= \frac{1}{\cosh(\text{settsinh } y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\text{settsinh } y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\boxed{D(\text{settsinh } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

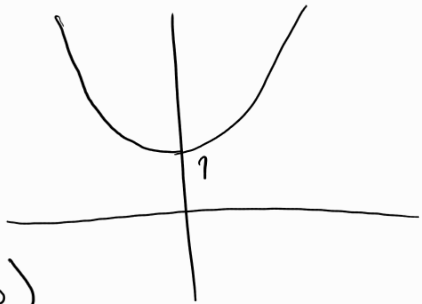
2°) calcolo diretto.

$$D(\text{settsinh } x) = D\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\cancel{(x+\sqrt{1+x^2})}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\cosh x$ non è invertibile.

$\Rightarrow$ Restringiamo a $[0,+\infty)$



$$\cosh x\big|_{[0,+\infty)} : [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$$

biiettiva

La sua inversa è il settcosh

$$\text{settcosh } y : \begin{array}{ccc} [1,+\infty) & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ \ni & & \ni \\ y & \longmapsto & \text{l'unica } x \text{ t.c. } \cosh x = y \end{array}$$

settcosh y si può scrivere in termini di altre funzioni elementari:

Devo risolvere in x l'eq^{ne} $\cosh x = y$ $\quad (y \geq 1)$

$$\Updownarrow$$

$$e^x + e^{-x} = 2y$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

scelgo il $+$ altrimenti il 2° membro sarebbe < 1.

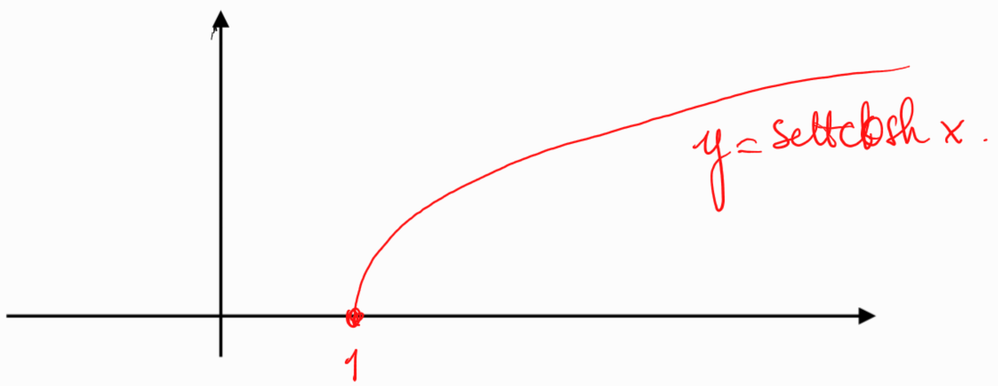
$$x = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \text{settcosh}\, y.$$

$$\boxed{\text{settcosh}\, x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \forall x \geq 1.}$$

La sua derivata (farlo in due modi diversi) vale

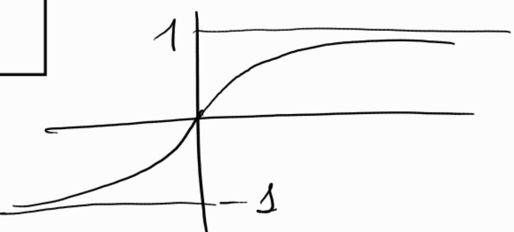
$$\boxed{D(\text{settcosh}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x > 1}$$

In $x=1$ ha un pto a tg. verticale



Esercizio: studiare la funzione

$$\boxed{\text{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



Calcolare la sua funzione inversa

$$\boxed{\operatorname{sett\,tgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall x \in (-1,1)}$$

e verificare che $\boxed{D(\operatorname{sett\,tgh} x) = \dfrac{1}{1-x^2} \quad \forall x \in (-1,1)}$

TEOREMA di De L'Hôpital.

(serve per risolvere forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ o riconducibili a una di queste)

f, g derivabili in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$

Supponiamo che

1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$ $\quad \left(\begin{array}{l}\text{oppure } +\infty \\ \text{oppure } -\infty\end{array}\right)$

2) $g'(x) \neq 0$ def$^{\text{te}}$ per $x \to a^+$

3) $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$

Allora

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .$$

Enunciato quasi uguale per $x \to b^-$

Esempio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{H}{\overset{\cancel{?}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

toglierò il punto interrogativo se il limite a destra esiste

Esempio (risultato già noto)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Esempio (già noto)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+5x^2)}{\sqrt{x+1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{10x}{1+5x^2}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2\sqrt{x+1}\cdot 10x}^{\sim 20x^{3/2}}}{\underbrace{1+5x^2}_{\sim 5x^2}} = 0$$

Si poteva fare anche senza l'Hôpital: $x\to+\infty$

$$\log(1+5x^2) = \log(5x^2(1+o(1))) = \log(x^2) + \log(5+o(1)) \sim \log(x^2) \sim 2\log x$$

$$\frac{\log(1+5x^2)}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\sim\sqrt{x}}} \sim \frac{2\log x}{\sqrt{x}} \to 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = (1^{+\infty}) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{1} =$$

$$\left(\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)' = (\log(\sin x) - \log x)' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x\,\underbrace{\sin x}_{\sim x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{?}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{x}\sin x - \cancel{\cos x}}{2\cancel{x}} = 0$$