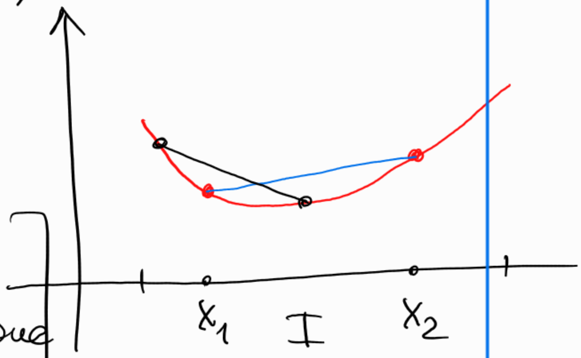
Funzioni convesse e concave

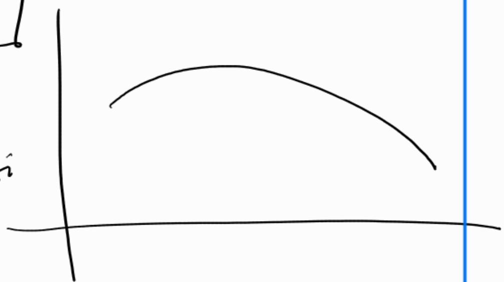
DEF $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo).

Diremo che f è:

- **convessa** (concava) se, presi comunque due punti distinti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ non ha punti <u>al di sotto</u> (sopra) del grafico di f.

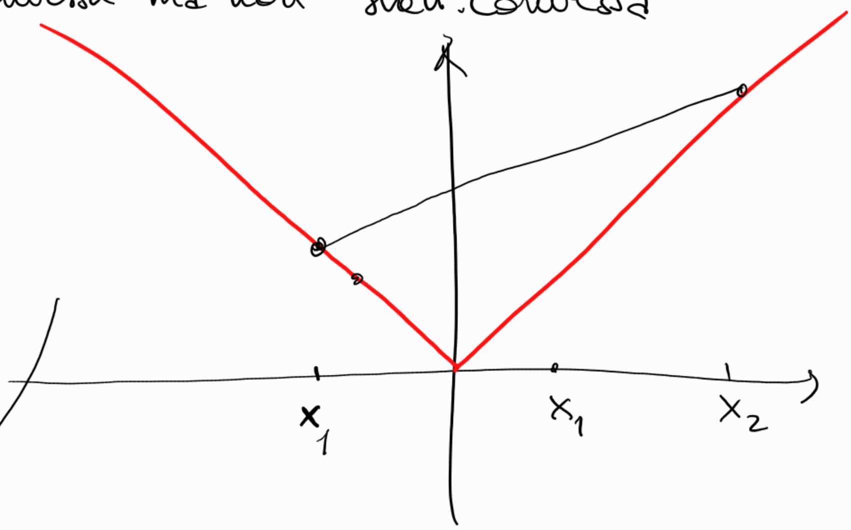


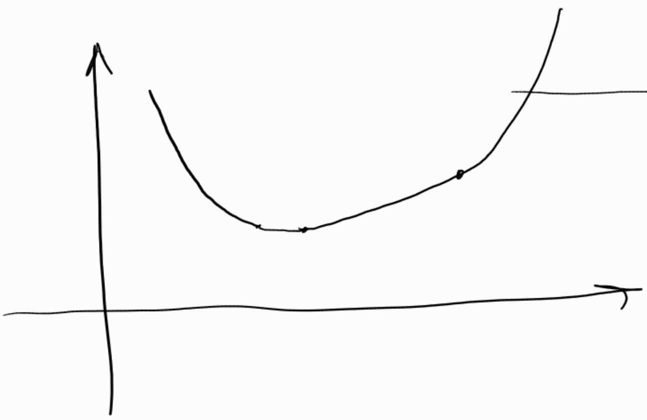
OSS: una funzione lineare $f(x) = ax+b$ (che ha per grafico una retta) è una funzione sia concava che convessa



- **strettamente convessa** (concava) se, comunque presi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ si trova strettamente al di sopra (sotto) del grafico di f (eccetto nei pti di ascissa x_1, x_2).

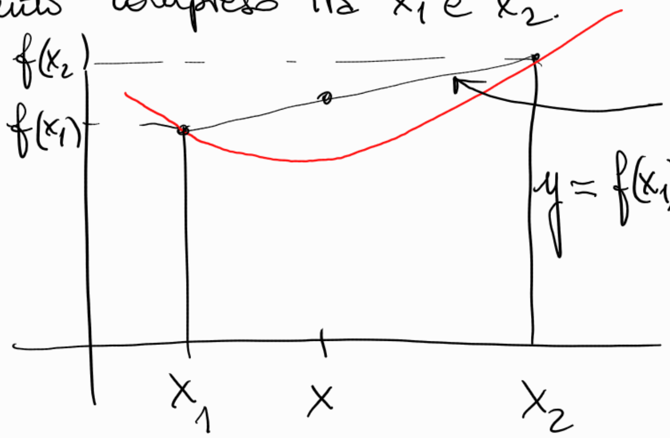
La funzione $f(x) = |x|$ è convessa ma non strett. convessa





<u>OSS</u> Fissati due punti $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$ per semplicità)

Sia x un punto compreso tra x_1 e x_2.



$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

La condizione di convessità è che, $\forall x_1, x_2 \in I$ $(x_1 < x_2)$

$\forall x \in (x_1, x_2)$ $$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

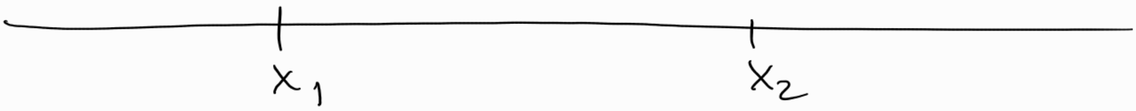
$<$ (stretta conv.)

$\geq$ (concavità)

$>$ (stretta concavità)

Un punto x <u>compreso</u> tra x_1 e x_2 si può scrivere così

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \quad \text{con } \lambda \in (0,1)$$
$$= (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$$ (combinazione convessa di x_1, x_2)



Metto questa formula nella condizione di prima

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$, si ottiene

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}((\cancel{1}-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - \cancel{x_1})$$

$$= f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\cancel{x_2-x_1}}\lambda(\cancel{x_2-x_1})$$

$$= (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Def. analitica di f. convessa/concava etc...

$f : I \to \mathbb{R}$ si dice <u>convessa</u> (in I) se

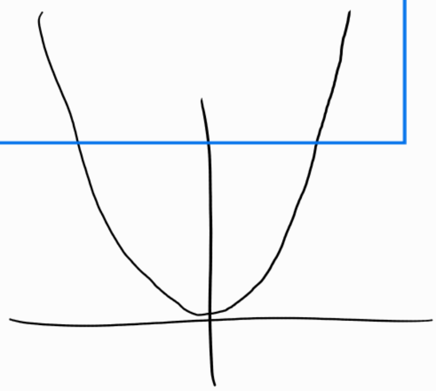
$\forall x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2$ e per ogni $t \in (0,1)$ si ha

$$f\big((1-t)x_1 + t x_2\big) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

$\geq$ (concava)

$<$ (strett. convessa)

$>$ (strett. concava)



Per dim. che $f(x) = x^2$ è strett. convessa con questa def^{ne} dovrei provare che

$\forall x_1 < x_2$, $\forall t \in (0,1)$

$$\big((1-t)x_1 + t x_2\big)^2 < (1-t)\, x_1^2 + t\, x_2^2$$

che si fa facilmente (esercizio) ma è un po' laborioso. Troveremo altri criteri.

<u>OSS</u> f è (strett.) convessa $\iff$ $-f$ è (strett.) concava

<u>TEOREMA</u> di regolarità delle f. convesse.

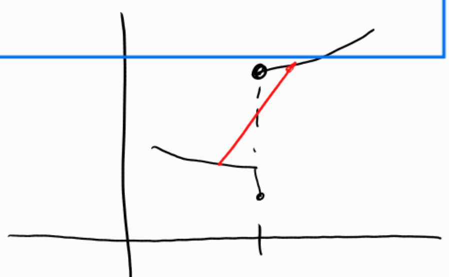
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ convessa in (a,b). Allora
concava

i) f è continua in (a,b);

ii) $\forall x \in (a,b)$ esistono finite $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, e

$$f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

$\geq$



TEOREMA Sia f continua in I, derivabile due volte nei punti interni.
Allora:

1) f è convessa in I $\iff$ f' crescente in I $\iff$ $f''(x) \geq 0$ $\forall x$ interno a I
concava $\leq$

2) f è strett. convessa in I $\iff$ f' strett. crescente in I $\Leftarrow$ $f''(x) > 0$ $\forall x$ interno a I
concava strett. decrescente < 0

Esempio: $f(x) = x^2$ è strett. convessa
$f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f$ è strett. convessa

OSS. La freccia "$\Rightarrow$" nella 2) è falsa.
Ci sono funzioni strett. convesse t.c. $f''(x)$ si annulla in un punto.

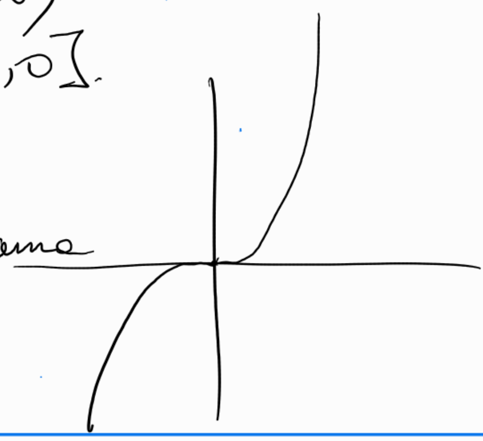
$f(x) = x^4$ $\quad f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 > 0$ tranne in $x = 0$.

$f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$.

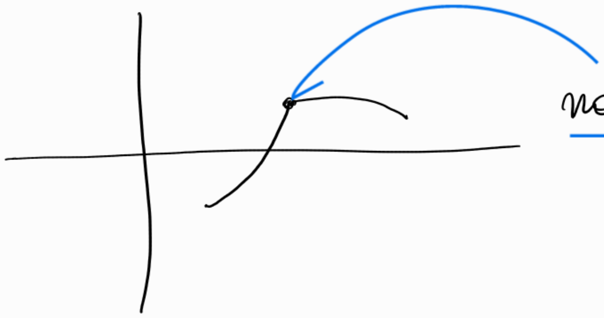
x^3 è strett. convessa in $[0, +\infty)$
strett. concava in $(-\infty, 0]$.

Il pto $x = 0$ dove la funzione passa da concava a convessa si chiama punto di flesso.

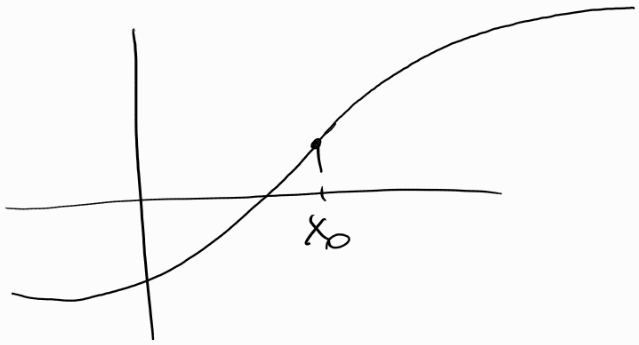


DEF Siano $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ ed esista la tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ (eventualmente verticale).
Il punto x_0 si dice **punto di flesso** se esiste un intorno destro di x_0 in cui $f(x)$ è convessa e un intorno sinistro di x_0

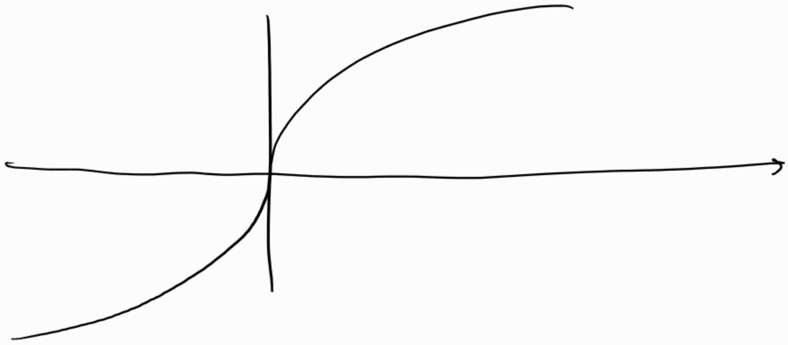
in cui $f(x)$ è concava, oppure viceversa.



non è un flesso



questo è un flesso.



$f(x) = x^{1/3}$

ha un flesso a tg. verticale in $x=0$.

$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \qquad \forall x \neq 0$

$$f'(0) = +\infty$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \qquad \forall x \neq 0$$

$f''(x) > 0$ per $x < 0$

$ < 0$ per $x > 0$.

f è convessa (strett.) in $(-\infty, 0]$

concava (strett.) in $[0, +\infty)$.

$x = 0$ è pto di flesso.

OSS

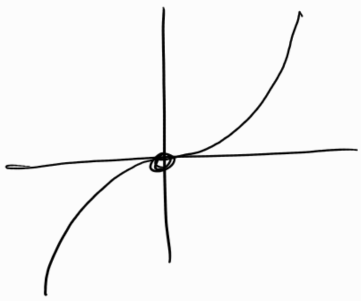
Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ammette un punto di flesso $x_0\in(a,b)$, non è detto che esista $f''(x_0)$

Esempio: $f(x)=x^{1/3}$ (vista prima)

$f(x)=x^{5/3}$ $\quad f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=\frac{10}{9}x^{-1/3}$ $\quad \forall x\neq 0$

$f''(0)\ \nexists$

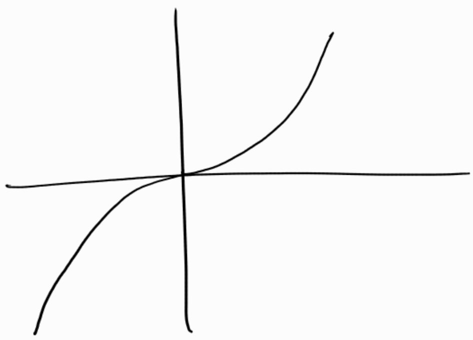


$f(x)=x|x|$

$f'(x)=2|x|$

$f''(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x>0 \\ -2 & \text{se } x<0 \end{cases}$

$f''(0)$ non esiste.



f è strett. convessa in $[0,+\infty)$

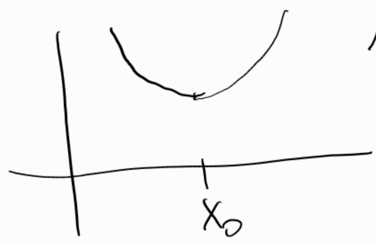
" concava in $(-\infty,0]$.

Ha un flesso in $x=0$.

> **TEOREMA** $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e derivabile due volte in $x_0\in(a,b)$. Se x_0 è un pto di flesso, allora $f''(x_0)=0$

DIM. Supponiamo, per esempio, che f sia convessa in un intorno destro di x_0, concava in un intorno sinistro

Ne segue che f' è crescente in un intorno destro di x_0
f' è decrescente in un intorno sinistro di x_0



$y = f'(x)$

$y = f'(x)$ ha un minimo locale in x_0. $\exists f''(x_0)$ $\xrightarrow{\text{Fermat}}$ $f''(x_0) = 0$

Tuttavia ci può essere un punto x_0 in cui $f''(x_0) = 0$ che non è un flesso. Per esempio, $f(x) = x^4$ verifica $f''(x) = 12x^2$ si annulla in $x = 0$, ma non ha un flesso in $x = 0$, bensì un minimo locale

---

Studio di due funzioni:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

seno iperbolico — coseno iperbolico

- Dominio: tutto $\mathbb{R}$, derivabili quante volte si vuole nel dominio

- Simmetrie: $\cosh(-x) = \cosh x$ pari
  $\sinh(-x) = -\sinh x$ dispari

- $\sinh(0) = 0$
  $\cosh(0) = 1$;

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{1}{4}\left[\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2\right) - \left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2\right)\right]$$

$$= \frac{4}{4} = 1.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$

- $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$

- $(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x$