Esame di Meccanica Quantistica del 15/11/2024

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin 1/2 è descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = a|+;z\rangle\langle -;z| + b|+;x\rangle\langle -;x| - \frac{a}{4}|+;z\rangle\langle +;z|\,,$$

dove a, b sono due parametri e $|\pm;i\rangle$ sono autoket di S_i con autovalore $\pm\hbar/2$.

a) Si fissi il rapporto b/a in modo che l'operatore H sia Hermitiano.

b) Si calcolino autovalori ed autoket di H.

c) Al tempo $t = 0$ lo stato della particella è descritto dal ket $|\psi(0)\rangle = |+;z\rangle$. Si determinino i possibili risultati di una misura dell'energia, le relative probabilità e il valor medio dell'energia.

d) Si determini il ket di stato $|\psi(t)\rangle$ ad un generico istante di tempo $t > 0$.

e) Calcolare la probabilità che una misura di S_z at tempo t dia $-\hbar/2$ come risultato.

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m che interagiscono in tre dimensioni con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\alpha}{r}$$

dove $\alpha > 0$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Nel centro di massa del sistema le due particelle hanno funzione d'onda spinoriale normalizzata

$$\psi = af_a(r)\chi_1 + bf_b(r)Y_1^0(\theta,\phi)\chi_2,$$

dove le funzioni $f_a(r)$ e $f_b(r)$ sono normalizzate secondo

$$\int_0^\infty r^2 dr\, |f_{a,b}|^2 = 1$$

ed r, θ e ϕ sono le coordinate sferiche del vettore $\boldsymbol{r}$. Gli spinori χ_1 e χ_2 sono entrambi autovettori normalizzati di S_z con autovalore 0, dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale. Si assuma che a e b siano numeri reali positivi.

a) Si calcolino a e b sapendo che la probabilità di misurare $S^2 = 2\hbar^2$ è 1/3. Nei punti successivi si assuma che a e b soddisfino questa condizione.

b) Sapendo che una misura di H sugli stati ψ fornisce sempre un risultato inferiore a $-E_\alpha/20$, e che $\langle\psi|H|\psi\rangle = -E_\alpha/8$, si determinino tutte le possibili funzioni $f_a(r)$ e $f_b(r)$. La costante E_α è data da $E_\alpha = m\alpha^2/\hbar^2$,

c) Si calcoli l'evoluto $\psi(t)$, con $\psi(t=0) = \psi$ e si calcoli $\zeta(t) = \langle\psi(t)|z^2|\psi(t)\rangle$. Si mostri che $\zeta(t)$ è periodica e se ne calcoli il periodo.

Integrali utili. Se a_0 è il raggio di Bohr e $R_{n\ell}(r)$ sono le autofunzioni radiali normalizzate per il problema Coulombiano, definiamo:

$$I_{n,\ell_1,m,\ell_2} \;=\; \int_0^\infty dr\, r^2 (r/a_0)^2 R_{n\ell_1}(r) R_{m\ell_2}(r);$$

vale $I_{1,0,1,0} = 3$, $I_{1,0,2,0} = -512\sqrt{2}/243$, $I_{2,0,2,0} = 42$, $I_{1,0,2,1} = 1280\sqrt{2}/(243\sqrt{3})$, $I_{2,0,2,1} = -20\sqrt{3}/243$, $I_{2,1,2,1} = 30$.