$n, k \in \mathbb{N}$
$k \leq n$

$C_{n,k}$ = numero di combinazioni di k ~~elementi~~ su n dati =
= numero di sottoinsiemi non ordinati di k elementi scelti tra n elementi distinti. $= \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

coeff^ti binomiali.

(5 card draw - all'italiana)

Supponiamo di giocare a poker con un mazzo di 32 carte, 8 valori : 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

x 4 semi : cuori, quadri, fiori, picche.

Ogni giocatore riceve 5 carte:
quante "mani" diverse ci sono?

$$C_{32,5} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot \cancel{30} \cdot 29 \cdot \cancel{28}^{7}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} =$$

$$= 32 \cdot 31 \cdot 29 \cdot 7 = 201.376$$

1) Che probabilità di ricevere un "poker" (4 carte di uguale valore + una carta di valore diverso, per es. 4 re e un 8)?

Devo contare quante mani tra le 201.000 contengono un poker?

$$\underset{\uparrow}{8} \cdot 28 = 224$$

valore del poker

$$\text{Prob. (poker servito)} = \frac{224}{201.376} = 0,1\,\%$$

2) Probabilità di un full servito (un tris + una coppia, per esempio tre re e due 10).

$$8 \quad \binom{4}{3} \cdot 7 \quad \binom{4}{2} = 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = 1344.$$

valore del tris

in quanti modi ~~posso~~ scegliere il tris di quel valore

valori della coppia

modi in cui scegliere le due carte della coppia su 4

Probabilità di un full servito. $= \dfrac{1344}{201.000} \approx 0{,}67\,\%$

3) Probabilità di un tris (e basta!) cioè: non un poker, non un full.

Conto le "mani" che contengono un tris e basta:

$$8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 28 \cdot 24 \quad \frac{1}{2}$$

il valore del tris

modi di scegliere le 3 carte di quel valore

scelta della 4^a carta

scelta della 5^a carta

non conta l'ordine delle ultime due carte

$$= 8 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 12 = 10752.$$

$$\text{Prob (tris e basta)} = \frac{10752}{201.000} \simeq 5\%$$

Coeff^{ti} binomiali perché?

$$(a+b)^1 = \underset{\binom{1}{0}}{1 \cdot a} + \underset{\binom{1}{1}}{1 \cdot b} \qquad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!\,0!} = 1.$$

$$(a+b)^2 = \underset{\binom{2}{0}}{a^2} + \underset{\binom{2}{1}}{2ab} + \underset{\binom{2}{2}}{b^2}$$

$$(a+b)^3 = \underset{\binom{3}{0}}{a^3} + \underset{\binom{3}{1}}{3a^2b} + \underset{\binom{3}{2}}{3ab^2} + \underset{\binom{3}{3}}{b^3}$$

$$(a+b)^4 = \underset{\binom{4}{0}}{a^4} + \underset{\binom{4}{1}}{4a^3b} + \underset{\binom{4}{2}}{6a^2b^2} + \underset{\binom{4}{3}}{4ab^3} + \underset{\binom{4}{4}}{b^4}$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{6}}$ $\binom{7}{4}$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$$

Supponiamo di calcolare $(a+b)^4$ effettuando tutte le moltiplicazioni senza usare la proprietà commutativa: si ottengono 16 termini, tutti diversi tra loro per l'ordine dei fattori.

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) =$$

$$= aaaa + aaab + aaba + aabb +$$
$$+ abaa + abab + abba + abbb +$$
$$+ baaa + baab + baba + babb +$$
$$+ bbaa + bbab + bbba + bbbb.$$

Sono $2^4 = 16$ termini.

Di questi 16, quanti contengono 4 a? 1

3a e 1b?	4
2a e 2b?	6
1a e 3b?	4
4b ?	1

Quanti contengono 2a e 2b?
Devo scegliere, tra i 4 fattori a+b, 2 di essi da cui scegliere la b. Il risultato è $\binom{4}{2} = 6$ modi diversi.

Ragionando in questo modo si trova la seguente formula del binomio di Newton.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$