$n = 1, 2, 3, \ldots$

P_n = numero di permutazioni di n elementi =

= numero di modi diversi in cui posso ordinare n elementi distinti =

$= n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1$

Calcolare il numero di anagrammi di MATEMATICA

Non è $P_{10} = 10!$ perché le lettere non sono tutte distinte.

Per calcolare il numero di anagrammi, rendo "distinguibili" le lettere uguali

$$M_1 A_1 T_1 E M_2 A_2 T_2 I C A_3$$

In questo caso gli anagrammi sono effettivamente $P_{10} = 10!$

Però in realtà le 3 A non sono distinguibili:

per es. i due anagrammi

$$T_1 A_2 C T_2 A_3 M_1 M_2 A_1 I E$$

$$T_1 A_3 C T_2 A_2 M_1 M_2 A_1 I E$$

Sono indistinguibili. Quanti sono gli anagrammi indistinguibili dal primo che abbiamo scritto?

Posso scambiare tra loro le T in $2! = 2$ modi

" " " " " M in $2! = 2$ modi

" " " " " A in $3! = 6$ modi

Quindi a ogni anagramma "vero" corrispondono

$2!\,2!\,3! = 24$ anagrammi ottenuti considerando le lettere distinguibili tra loro

Il numero di anagrammi risulta

$$\frac{10!}{2!\,2!\,3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{6}} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$$

Numero degli anagrammi di ANAGRAMMA

$$= \frac{9!}{4!\,2!}$$

Disposizione di k elementi su n dati (oppure: di n elementi presi k per volta). $(k \leq n)$ $k, n \in \mathbb{N}$

= un sottoinsieme ordinato di k elementi presi da n elementi distinti.

ESEMPIO Prese di nuovo le 5 vocali A E I O U, quante parole di 3 lettere non ripetute posso costruire?

Stiamo chiedendo quante sono le disposizioni di 3 elementi su 5.

Modi di scegliere la prima lettera: 5
" " " " seconda " : 4
" " " " terza " : 3

e mi fermo.

le parole di 3 lettere sono $5\cdot 4\cdot 3 = 60$

$$5\cdot 4\cdot 3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

In generale, il numero di disposizioni di k elementi su n è dato da

$$D_{n,k} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio: Corsa dei 100 m. piani, 8 atleti
In quanti modi diversi posso distribuire le tre medaglie (oro, argento, bronzo)?

$$D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!} = 336$$

Combinazione di k elementi su n dati (oppure: di n elementi presi k per volta)
$n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$

Esempio: in quest'aula ci sono 100 studenti/esse.
In quanti modi posso scegliere un gruppo non ordinato di 10 studenti?

Il numero di <u>disposizioni</u> sarebbe:

$$D_{100,10} = \frac{100!}{90!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 91$$

In realtà ci sono molte disposizioni (insiemi ordinati) che corrispondono a un'unica combinazione?
Sono $P_{10} = 10!$
Il numero di insiemi <u>non ordinati</u> è

$$C_{100,10} = \frac{D_{100,10}}{10!} = \frac{100!}{90!\,10!} = \binom{100}{10}$$

coefficiente binomiale

$$= \frac{\cancel{100} \cdot \overset{11}{\cancel{99}} \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{\cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}$$ etc..

In generale il numero di combinazioni di k elementi su n dati è

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$$0! := 1$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{\cancel{n!}^{\,1}}{(n-n)!\,\cancel{n!}} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{\underbrace{(n-(n-k))!}_{=k!}\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Poker (5 card draw) con un mazzo di 4 semi ♡, ◇, ♣, ♠ con 8 valori 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A = 32 carte.

Ad ogni giocatore vengono distribuite 5 carte.

Quante mani diverse di 5 carte può ricevere un giocatore?

E' un insieme non ordinato di 5 carte scelte tra 32

$$C_{32,5} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5!} = 201.376$$