Teorema fondamentale dell'algebra per polinomi reali

Ogni polinomio $P_n(x)$ a coeff.ti reali si può scomporre nel prodotto di polinomi di grado 1 e polinomi di grado 2 irriducibili nei reali (polinomi t.c. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$)

Per es., un polinomio di grado 3 si può scomporre in:

- 3 polinomi di grado 1
- 1 polinomio di grado 1 e 1 polinomio di grado 2 irriducibile

---

Esempio: fattorizziamo $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$.

Avrà un fattore del tipo $x - a$.

$$P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = (x-a)(x^2 + bx + c)$$

$$21 = -ac$$

Questo suggerisce di cercare a tra i fattori di 21

$\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$.

$P_3(1) = 1 + 3 - 25 + 21 = 0 \Rightarrow P_3$ è divisibile per $x - 1$

Divido $P_3(x)$ per $x - 1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & -25 & 21 \\ 1 & & 1 & 4 & -21 \\ \hline & 1 & 4 & -21 & / \end{array}$$

$$P_3(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 21) = (x-1)(x+7)(x-3)$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} -7 \\ +3 \end{cases}$$

Applicazione: per calcolare gli integrali.

$$\int \frac{3x^2+5}{x^3+3x^2-25x+21}\,dx = \int \frac{3x^2+5}{(x-1)(x-3)(x+7)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+7}\right) dx \quad (\text{facile!})$$

per opportuni A, B, C

Scomporre il polinomio $P_4(x) = x^4+16$.

Non ammette radici reali $\Rightarrow$ si scompone nel prodotto di due polinomi irriducibili.

$$(x^4+16+8x^2)-8x^2 = (x^2+4)^2-8x^2 = (x^2+4)^2-(2\sqrt{2}x)^2 =$$

$[A^2-B^2 = (A-B)(A+B)]$

$$= (x^2+4-2\sqrt{2}x)(x^2+4+2\sqrt{2}x)$$

sono irriducibili nei reali

$x^2-2\sqrt{2}x+4 \qquad b^2-4ac = 8-16<0$

$$\int \frac{1}{x^4+16}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+4-2\sqrt{x})(x^2+4+2\sqrt{x})}\,dx$$

quasi fatto...

Stessa cosa per $P_6(x) = x^6+1$:

non ha radici reali $\Rightarrow$ si scompone come prodotto di tre polinomi irriducibili di 2° grado.

$$x^6+1 = (x^2)^3 + 1^3 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

$$\left[A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)\right]$$

$$= (x^2+1)(x^4+1+2x^2-3x^2)$$

$$= (x^2+1)\left((x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2\right) =$$

$$= (x^2+1)(x^2+1-\sqrt{3}x)(x^2+1+\sqrt{3}x)$$

Studiare il segno di

$$f(x) = \frac{x^3+8}{3x^4-7x^3+5x^2-7x+2}$$

N: $\quad x^3+8>0 \iff x^3>-8 \iff x>-2$

D: $\quad 3x^4-7x^3+5x^2-7x+2$

$x=2$ è radice

$$3\cdot 16 - 7\cdot 8 + 5\cdot 4 - 7\cdot 2 + 2 = 48-56+20-14+2=0$$

D divisibile per $x-2$.

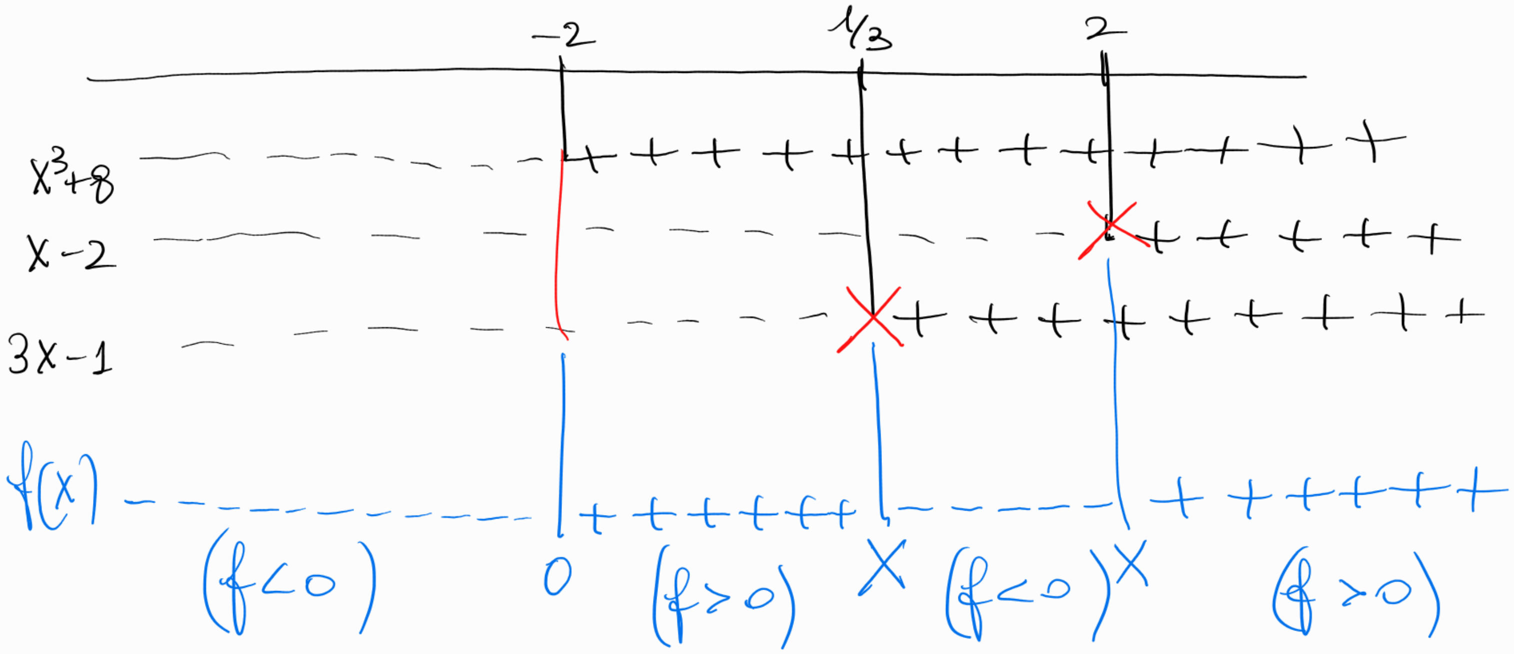
$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 3 & -7 & 5 & -7 & 2 \\
2 & & 6 & -2 & 6 & -2 \\
\hline
 & 3 & -1 & 3 & -1 & \diagup
\end{array}$$

$$D(x) = (x-2)(3x^3-x^2+3x-1) =$$

$$= (x-2)(3x-1)\underbrace{(x^2+1)}_{>0} \quad \text{finito.}$$

$$f(x) = \frac{x^3+8}{(x-2)(3x-1)(x^2+1)}$$

$x^2+1 > 0$



Elementi di calcolo combinatorio

Permutazione di n elementi = un modo di disporre in ordine n elementi distinti tra loro.

Esempio: Quante parole ~~diverse~~ distinte di 5 lettere posso formare usando le 5 vocali 1 volta solo

AEIOU
IAOUE etc..

5 possibilità per la 1ª vocale.
4 " " " 2ª vocale
3 " " " 3ª "
2 " " 4ª "
1 " " 5ª "

Numero di permutazioni di 5 oggetti è

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

Esempio: In una finale dei 100 m. (8 corridori) quanti sono i possibili ordini di arrivo

$$P_8 = 8 \cdot 7 \cdots 1 = 8! \simeq 40.000$$

In generale si trova $P_n = n!$

Quanti sono i possibili anagrammi della parola

MATEMATICA?

La prima risposta intuitiva è $P_{10} = 10!$

Ma la risposta è sensibilmente inferiore, perché le lettere non sono tutte distinte tra loro.