UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
" LA SAPIENZA "
Dipartimento di Fisica
Servizio Fotostampa Dispense

Esami scritti di *FISICA TEORICA*

Autori vari

Testi dal .....1983 al 1996

Servizio Fotostampa Dispense

E 1-81

Marzo 1998

198 / 3.500

Autori Vari

II° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Proff. M. Lusignoli e A. Pugliese

1) Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale ed è soggetta all'azione del potenziale:

$U(x) = +U_0$ $\quad (0 \le x < b)$

$U(x) = 0$ $\quad (b < x < a)$

$U(x) = +\infty$ $\quad (a < x)$

$U(-x) = U(x)$

Per quali valori di b e di U_0 (>0) l'autovalore minimo dell'operatore hamiltoniano, E_0, è uguale ad U_0?

In particolare, quale è il minimo valore di U_0 per cui questo si può verificare?

Scrivere l'autofunzione corrispondente normalizzata.

2) Una particella di massa m si muove in una dimensione.

L'energia potenziale è:

$U(x) = +\infty$ $\quad (x < 0)$

$U(x) = +1/2\ m\,\omega^2 x^2$ $\quad (x > 0)$

All'istante t=0 la funzione d'onda è:

$$\Psi(x,0) = \frac{4}{\sqrt{15}} \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x \right)^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

a) Determinare i possibili risultati di una misura dell'energia e le relative probabilità.

b) Si supponga che all'istante $t = \frac{4\pi}{\omega}$ il potenziale venga modificato "istantaneamente" e diventi:

$U(x) = 1/2\ m\,\omega^2 x^2$ $\quad (\forall x)$

Se si effettua una misura di energia ad un tempo t successivo, con quali probabilità si possono ottenere i risultati precedentemente determinati (v. domanda (a))?

c) Facoltativo:

Calcolare $\langle x^2 \rangle$ in funzione del tempo per $0 < t < \frac{4\pi}{\omega}$.

Polinomi di Hermite:

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

1º COMPITO DI ESONERO DEL CORSO SERALE DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Prof. G. Martinelli

Es. nº 1

I livelli di energia di un sistema di oscillatori fermionici unidimensionali di spin $1/2$ ($s_z = \pm \hbar/2$) in presenza di un campo magnetico esterno $\vec{B} = B\hat{z}$ sono dati dall'espressione:

$$\epsilon = h\nu(n+1/2) \pm \mu B$$

con n= 0,1,2,............ e il segno $\mp$ si riferisce al caso in cui lo spin sia orientato lungo la direzione del campo magnetico o nella direzione opposta rispettivamente.

Determinare nel caso non degenere:

1) la funzione di partizione canonica
2) L'energia interna e il calore specifico
3) La magnetizzazione ($M = KT \frac{\partial}{\partial B} \ln Z$) nel limite di piccolo campi magnetici.

Es. nº 2

Sia dato un sistema di bosoni liberi in due dimensioni contenuti in una scatola quadrata di lato L.

1) Calcolare il potenziale chimico in funzione della temperatura
2) Dimostrare che non esiste la condensazione di Bose.

Compito di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

28 - 1 - 83

1) Si abbia un cilindro , di altezza L e base A, contente N molecole di un gas classico monoatomico, determinare il numero N_1 e N_2 di molecole con $0 \leq z \leq L/2$ e $L/2 \leq z \leq L$ rispettivamente. Determinare la distribuzione in velocità delle molecole.

2) Determinare il potenziale chimico allo zero assoluto di un gas di N fermioni in un volume V applicando la relazione relativistica tra energia e impulso $\epsilon = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2$
In quali condizioni gli effetti relativistici sono trascurabili?

Compito di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
11 - 4 - 83

1) Si consideri il seguente potenziale:

$U(x) = U_0 \qquad x < -a$

$U(x) = -U_0 \qquad -a < x < 0$

$U(x) = 0 \qquad x > 0$

Determinare per quali valori di U_0 esiste uno stato ~~dix~~ con $E = 0$. In che caso questo è anche lo stato fondamentale del sistema?

2) Una particella di massa m è immersa nel potenziale dell'oscillatore armonico di pulsazione ω ; sapendo che lo stato della particella è una sovrapposizione dei primi due livelli energetici con $\overline{E} = \frac{3}{4}\hbar\omega$, che $\overline{p(0)} = 0$ e $\overline{x(0)} > 0$, determinare $\overline{x(t)}$, $\overline{p(t)}$ e $\frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2$

Si ricorda che $\qquad x_{nk}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\delta_{n,k-1}\sqrt{k}\, e^{-i\omega t} + \delta_{n,k+1}\sqrt{k+1}\, e^{i\omega t}\right)$

COMPITO DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 14/4/83

1. Un gas perfetto di N particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ in un volume V, è immerso in un campo magnetico B in modo tale che l'hamiltoniana di ogni particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \mu B \sigma_z \qquad (1)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Il gas è ad alta temperatura e bassa densità, e quindi si può usare l'approssimazione classica.

a) Calcolare il calore specifico a volume costante, C_V.

b) Calcolare il valore medio di σ_z, sull'ensemble canonico.

Nota: Si tenga presente che

$$e^{\alpha \sigma_z} = \cosh\alpha \cdot \mathbb{1} + \sinh\alpha \cdot \sigma_z$$

2. E' dato un campo magnetico che è nullo per $X < 0$ mentre per $X > 0$ è uniforme e diretto lungo l'asse z. Una particella elettricamente neutra e di spin $\frac{1}{2}$ ha, in questo campo l'hamiltoniana :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \mu B \sigma_z \qquad x > 0$$

$$H = \frac{p^2}{2m} \qquad x < 0$$

Si supponga che il moto della particella avvenga lungo l'asse x, e che quindi la parte spaziale della funzione d'onda dipenda solo da x, e non da y e z, e si assuma $E > \mu B$, ove E è l'energia della particella.

a) Scrivere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per la parte spaziale della funzione d'onda, nei due stati di spin ($\pm \frac{1}{2}$ lungo il campo)

b) Determinare il coefficiente di riflessione dal campo magnetico, per stati stazionari che corrispondono a particelle provenienti da $x = -\infty$, nei due stati di spin.

Compito di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

1 - 6 - 83

I) Un elettrone di spin 1/2 è immerso in un campo magnetico che giace nel piano x z e fà un angolo di 60° con l'asse z. Trascurando il moto orbitale, sapendo che all'istante iniziale una misura di s_z dà con certeeza il valore -1/2, determinare in funzione del tempo la probabilità di ottenere il valore +1/2 in una misura di s_z s_x. Il sistema ritorna allo stato iniziale? Se si per quali valori di t ?

II) Due particelle identiche di spin 1/2 hanno la seguente hamiltoniana:

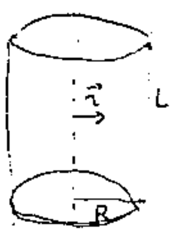
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + m\omega^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$$

(oscillatore armonico tridimensionale)

Determinare le autofunzioni dello stato fondamentale e del primo livello eccitato. Sono autostati di S^2 ($\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$)? Se si con quale autovalore?

COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
10 - 12 - 83

1) Un gas classico di N particelle con carica elettrica q è contenuto in un cilindro di altezza L e raggio di base R. Il gas è immerso in un campo elettrico radiale di modulo costante $\mathcal{E}$ ed è sotttoposto alla forza di gravità diretta lungo l'asse del cilindro. Determinare la densità delle particelle in funzione della posizione; determinare il numero di particelle che si trovano ad una distanza compresa tra r e r+dr dall'asse del cilindro e il numero di particelle che hanno un'altezza compresa tra z e z+dz. Determinare la pressione media sulle basi del cilindro.



$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\,\hat{r}$ $\quad\hat{r}$ versore di $\vec{r}$

Si trascuri l'interazione elettrostatica tra le particelle.

2) Un gas bidimensionale di N elettroni è immerso in un debole campo magnetico H uniforme. Determinare in funzione della temperatura e al I ordine in H il potenziale chimico e il momento magnetico medio del sistema. La componenti del momento magnetico di un elettrone nella direzione del campo magnetico è $\pm\alpha$, ed S è l'area del sistema. Se $N/S \simeq 10^{15}$ particelle su cm^2 e $\alpha \simeq 10^{-20}$ erg/oersted per quali valori di H e T il primo ordine in H è una buona approssimazione?

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 13/12/83

1) Siano N particelle di spin 1 non interagenti fra di loro per le quali i livelli di energia sono $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Calcolare l'energia interna e il calore specifico nel limite $N \gg 1$ e nelle regioni

a) $\varepsilon \gg \tau$

b) $\tau \gg \varepsilon$

Discutere i risultati confrontandoli con quelli che risulterebbero se la statistica fosse Maxwell- Boltzman.

2) Una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta ad un potenziale di oscillatore armonico e ad un campo di forze costanti, così che la sua hamiltoniana è

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$$

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m x^2 \omega^2$$

$$\hat{H}_1 = mgx$$

Considerando il termine $\hat{H}_1$ come una perturbazione, si calcolino le correzioni agli autovalori dell'energia al 1° e al 2° ordine della teoria delle perturbazioni.

Determinare poi gli autovalori e le autofunzioni esatte dell'hamiltoniana $\hat{H}$ e confrontare il risultato del calcolo perturbativo con il risultato esatto.

3^ PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 30/1/1984

A.A. 1983-1984 - Proff. Lusignoli e Virasoro

1) - Nel sistema di quiete del baricentro, due particelle identiche di spin 1/2 interagiscono fra di loro con una forza elastica di richiamo e l'hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$$

($\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, coordinata relativa; $\mu = \frac{m}{2}$ è la massa ridotta).

Determinare autovalori ed autofunzioni dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e il loro grado di degenerazione.

2) - Schematizzando il nucleo di uno ione idrogenoide come una sfera di raggio $r_0 \simeq 10^{-13}$ cm e densità di carica costante $\rho = \frac{3Ze}{4\pi r_0^3}\Theta(r_0 - r)$, il potenziale a cui è soggetto l'elettrone è

$$U(r) = -\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{r_0}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\Theta(r_0 - r) - \frac{Ze^2}{r}\Theta(r - r_0)$$

Considerando come una perturbazione la differenza fra U(r) e il potenziale di un nucleo puntiforme si calcolino le correzioni (al primo ordine) agli autovalori dell'energia del livello fondamentale e del primo livello eccitato. (Si tenga presente nei calcoli che $Zr_0/a \ll 1$), dove $a \simeq .53\ 10^{-8}$ cm è il raggio di Bohr).
Dire se la perturbazione elimina qualche degenerazione del sistema imperturbato e discutere le ragioni fisiche del risultato.
N.B. - Si trascurino tutte le correzioni relativistiche.

3) - Un elettrone in un atomo di idrogeno è in uno stato tale che una misura dell'energia e del momento angolare orbitale dà con certezza i risultati

$$E = E_2 = -\frac{13.6}{4}\ \text{eV}$$

$$\vec{L}^2 = 2\hbar^2$$

Richiedendo che la probabilità di trovare l'elettrone con $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ sia massima, determinare la funzione d'onda.

Formulario: autofunzioni dell'atomo di idrogeno

$$\psi_{100} = \sqrt{\frac{Z^3}{a^3}}\, e^{-\frac{Zr}{a}}\, 2\, Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$\psi_{200} = \sqrt{\frac{Z^3}{8a^3}}\left(1 - \frac{Zr}{2a}\right) e^{-\frac{Zr}{2a}}\, 2\, Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$\psi_{21m} = \sqrt{\frac{Z^3}{8a^3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{Zr}{a}\, e^{-\frac{Zr}{2a}}\, Y_{1m}(\theta,\varphi)$$

$Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ sono armoniche sferiche normalizzate.

Autovalori imperturbati.

$$E_n^0 = -\frac{Z^2 e^2}{2a\, n^2}$$

COMPITO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 28/6/1984

A.A. 1983-84

1) Un gas perfetto monoatomico classico composto da N atomi di massa m a temperatura T è racchiuso in una sfera di raggio R. Il gas è soggetto ad un campo gravitazionale uniforme e l'hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

Si calcoli:

a) il calore specifico del sistema e i suoi andamenti per $T \to 0$ e per $T \to \infty$

b) la pressione media sulla superficie della sfera

c) la densità e la pressione in funzione della quota z.

2) Una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ è racchiusa in una sfera impenetrabile di raggio R.

Quanti numeri quantici occorrono per caratterizzare gli autostati dell'energia? Qual'è il grado di degenerazione di ogni livello?

Supponiamo che un'altra particella, identica alla precedente, sia anch'essa racchiusa nella sfera.

Limitandosi agli stati nei quali entrambe le particelle hanno momento angolare nullo rispetto al centro della sfera, calcolare i livelli energetici ed il grado di degenerazione dello stato fondamentale e del primo stato eccitato.

Si supponga infine che le due particelle interagiscano fra di loro con il seguente potenziale

$$V = a\,\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

dove $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Ripetere il calcolo della precedente domanda per questo caso.

SECONDA PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 15 Dicembre 1984 - I Semestre A.A. 84-85

Proff. Lusignoli e Tombesi

1) Lo stato di un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazio ω all'istante t=0 è definito dalle seguenti proprietà:

a) una misura dell'energia può dare i due risultati $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$ oppure $E_1=\frac{3}{2}$ ciascuno con probabilità 50%;

b) il valore medio di p è nullo;

c) il valore medio di x è positivo.

Scrivere la funzione d'onda al tempo $t>0$ e calcolare $\bar{x}$ e $\bar{p}$ in funzione del tempo.

All'istante $\tau=\frac{3\pi}{\omega}$ viene "istantaneamente" modificata la pulsazione ω che diventa $\omega'=3\omega$ per $t>\tau$: facendo una misura dell'energia a $t>\tau$, quali sono le probabilità di ottenere i risultati $\frac{1}{2}\hbar\omega$ e $\frac{3}{2}\hbar\omega$?

2) Una particella di massa m si muove di moto unidimensionale soggetta al potenziale

$$U(x)=\begin{cases} 0 & \text{per } 0<x<a \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x-a)^2 & \text{per } x>a \end{cases}$$

$$U(x)=U(-x)$$

Spiegare qualitativamente perchè l'energia dello stato fondamentale di questa Hamiltoniana soddisfa la relazione $0<E_0<\frac{1}{2}\hbar\omega$

Per quali valori di $a>0$ uno degli autovalori dell'operatore Hamiltoniano è uguale a $\frac{1}{2}\hbar\omega$?

Scriverne quindi la funzione d'onda normalizzata.

TERZO ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 26 GENNAIO 85

Proff. Lusignoli e Tombesi

1) Lo stato di una particella di spin zero è descritto all'istante $t=0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z; t=0) = \frac{f(r)}{\sqrt{8\pi}}\left(1 + \frac{x+iy+z}{r}\right)$$

dove

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty dr\, r^2 \left|f(r)\right|^2 = 1$$

a) Quali risultati si possono ottenere facendo una misura di L_z (terza componente del momento angolare) e con quali probabilità

b) Stesse domande per una misura di L^2.

c) Supponendo che l'operatore hamiltoniano sia $\hat{H}=g\hat{L}_z$ scrivere la funzione d'onda per $t>0$.

d) Calcolare, in funzione del tempo, i valori medi delle tre componenti del momento angolare $\bar{L}_x(t)$, $\bar{L}_y(t)$ e $\bar{L}_z(t)$.

2) a) Dette $|1,+1\rangle$, $|1,0\rangle$ e $|1,-1\rangle$ le autofunzioni simultanee degli operatori S^2 e S_z per una particella di spin 1, si costruiscano le autofunzioni simultanee di S_1^2, S_2^2, S^2 e S_z (dove $\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2$) per un sistema di due tali particelle.

b) Se le due particelle sono indistinguibili, formano un sistema isolato ed interagiscono fra di loro con una forza attrattiva dipendente solo dalla distanza relativa, quale può essere lo <u>spin totale</u> del sistema nel livello fondamentale? Quale è il grado di degenerazione del livello fondamentale?

c) Se nell'hamiltoniana è anche presente un termine di interazione spin-spin, $V=A\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$, come si modificano le risposte alle domande del punto b) per $A>0$ e per $A<0$?

Si ricordi che $\hat{S}_-|S, S_z\rangle = \sqrt{(S+S_z)(S-S_z+1)}\;|S, S_z-1\rangle$

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
del 24/6/85 - A.A. 1984-85

1. Si consideri un sistema costituito da N oscillatori armonici tridimensionali isotropi, quantistici, distinguibili, non interagenti tra loro e in equilibrio termico a temperatura T.
Determinare a quale temperatura la probabilità di trovare un oscillatore nel livello fondamentale è uguale a quella di trovarlo in un qualsiasi stato del primo livello eccitato.

2. Una particella di massa m è confinata su un segmento $0 \leq x \leq L$ sul quale si muove liberamente. Si sa che la misura della sua energia può dare i valori del primo livello (fondamentale) E_1 e del terzo livello E_3 e che il valore medio del quadrato dell'impulso è

$$\langle p^2 \rangle = \frac{5\hbar^2\pi^2}{L^2} .$$

Si sa inoltre che al tempo t = o la probabilità di trovare la particella al centro del segmento è la minima possibile per un tale stato.
Calcolare dopo quanto tempo la probabilità di travare la particella al centro del segmento è diventata massima.

3. Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova al tempo t = o nello stato con spin $+\frac{1}{2}$ lungo l'asse Z. Essa è soggetta ad un'interazione magnetica del tipo

$$H = \hbar A (\cos\theta\, \sigma_x + \sin\theta\, \sigma_y)$$

(A e θ costanti, $\sigma_{x,y}$ sono le matrici di Pauli). Si calcoli dopo quanto tempo la componente lungo l'asse Z dello spin è $-\frac{1}{2}$.

COMPITO SCRITTO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 18/9/85 - Sessione autunnale

1) Un insieme di fermioni di spin $\frac{1}{2}$ non interagenti, la cui energia in funzione dell'impulso è data dalla formula $E_p = A p^4$ si trova allo zero assoluto in un volume V.

Si calcolino:

a) l'energia di Fermi E_F

b) la costante α definita da $U = \alpha N E_F$ dove U è l'energia interna

2) Un fermione di spin $s=\frac{1}{2}$ e massa m, descritto al tempo t=o dallo spinore

$$\psi(\vec{r}, \sigma_z, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si trova in un campo magnetico uniforme B_y diretto lungo l'asse y e la corrispondente Hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} + g\,\sigma_y B_y$$

dove g è una costante.

a) Quali sono i possibili risultati di una misura di σ_z al tempo t=o, e quali le rispettive probabilità?

b) Qual'è il valor medio dell'energia al tempo t=o?

c) Quale sarà lo spinore che descrive lo stato della particella dopo un tempo $t = \pi\hbar/(2gB_y)$?

I° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - 11/11/85

Prof. A.Pugliese e M.Lusignoli

Si abbiano N Particelle non interagenti di spin $\frac{1}{2}$ vincolate a muoversi in un piano, in una regione di area A.

La relazione fra impulso ed energia di ogni particella è

$$\varepsilon = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2c^2} - mc^2 \qquad (1)$$

1) Supponendo che sistema sia allo zero assoluto, calcolare

   a) l'energia di Fermi

   b) l'energia media per particella, U/N

   c) la "pressione" P (forza per unità di lunghezza del contorno).

   Discutere la relazione fra l'energia U ed prodotto PA, in particolare nei limiti di bassa ed alta densità del gas.

2) Si consideri il sistema nel limite classico (alte temperature e basse densità):

determinare

   a) la funzione di partizione nell'ensemble canonico

   b) l'energia media per particelle U/N

   c) la "pressione " P

   Anche in questo caso, discutere la relazione fra U e PA.

2° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 14 DICEMBRE 1985

Proff. A. Pugliese e M. Lusignoli

1) Lo stato di un oscillatore armonico unidimensionale è una sovrapposizione dei due autostati dell'hamiltoniano corrispondenti agli autovalori più bassi.

All'istante t=0 si ha

1) $\bar{x} > 0$;

2) $\bar{p} = m\omega\bar{x}$.

In quali istanti t successivi l'equazione (2) sarà nuovamente verificata? E per quali t sarà invece $\bar{p} = -m\omega\bar{x}$?

Sempre valendo l'equazione (2), per quale valore dell'energia media dell'oscillatore si ha che $\bar{x}(0)$ assume il massimo valore possibile?

Questa richiesta è sufficiente a determinare completamente lo stato?

2) Una particella di energia E si muove di moto unidimensionale ed è soggetta all'azione di un potenziale

$$U(x) = C\left\{\delta(x) + \delta(x+\ell)\right\} \qquad \begin{pmatrix} C > 0 \\ \ell > 0 \end{pmatrix}$$

Esistono valori della distanza ℓ fra le due barriere tali che il coefficiente di riflessione di questo potenziale sia nullo?

In caso affermativo, determinarli.

17

3 compito di esonero (1 - 2 - 1986)
Istituzioni di Fisica Teorica
(prof. Lusignoli e Pugliese)

1) Due particelle identiche si attraggono con un potenziale di tipo coulombiano

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -g^2 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Determinare autovalori e autofunzioni dell'hamiltoniana per fermioni di spin 1/2 e bosoni di spin 0. (Si consideri solo lo spettro discreto del moto relativo.)

2) Una particella di spin 1/2 è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R, ed è immersa in un campo magnetico $\vec{B} = (0,0,B)$; la sua hamiltoniana è quindi:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\hat{l}^2 - \mu_B(\vec{l} + 2\vec{s})\cdot\vec{B}$$

Inizialmente la particella è in uno stato con $l = 1$, $J=1/2$, $J_z = +1/2$. Determinare in funzione del tempo la probabilità di trovare la particella con $J=1/2$ e $J=3/2$ rispettivamente. Determinare inoltre, sempre in funzione del tempo, i possibili ~~xxlx~~ risultati di una misura si $\hat{l}_z$ e $\hat{s}_z$ e le rispettive probabilità. ($\vec{J}$ momento angolare totale).

$$|J=\tfrac{3}{2}, J_z\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{J_z}{3}}\; Y_{1,J_z-\frac{1}{2}}\chi^+ + \sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{J_z}{3}}\; Y_{1,J_z+\frac{1}{2}}\chi^-$$

$$|J=\tfrac{1}{2}, J_z\rangle = -\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{J_z}{3}}\; Y_{1,J_z-\frac{1}{2}}\chi^+ + \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{J_z}{3}}\; Y_{1,J_z+\frac{1}{2}}\chi^-$$

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
del 16/6/86

1. Due particelle di spin $\frac{1}{2}$ sono vincolate a stare sul segmento $0 \leq X \leq L$ le due particelle si respingono con un potenziale $V(X_1, X_2) = \lambda \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL} \delta(X_1 - X_2)$
   Determinare i livelli energetici, le corrispondenti funzioni d'onda e la loro degenerazione per $\lambda = 0$.
   Determinare inoltre al primo ordine in λ la correzione al I e II livello energetico; discutere la degenerazione dei livelli. A quale condizione deve obbedire λ perchè il primo ordine perturbativo sia accettabile?

2. Sia un gas di N particelle; con hamiltoniana di singole particelle
   $$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{K}{2}(x^2 + y^2) \quad , \quad 0 \leq z \leq L$$
   Calcolare la funzione di partizione nella regione di temperatura
   $$KT \leq \hbar\omega \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$
   (cioè nella regione quantistica).
   a) Calcolare il calore specifico a L costante ed il suo limite per $T \to 0$
   b) Calcolare la forza esercitata sulla parete $z = L$.

II° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 19/12/86

Proff. G. Altarelli e M. Lusignoli

Un oscillatore armonico lineare di massa m e pulsazione ω si trova al tempo t=o nello stato

$$\psi(x,0) = A \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Determinare:

a) il valore medio dell'energia

b) Dopo quanto tempo lo stato del sistema diviene per la prima volta

$$\psi(x,t) = B \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right)^2 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

c) Il valore medio di X in funzione del tempo

d) Se all'istante $t = \frac{4\pi}{\omega}$ il potenziale cambia istantaneamente da $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ a $\frac{9}{2}m\omega^2 x^2$, quale sarà la probabilità ad un istante successivo di trovare l'energia dell'oscillatore $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

PROVA SCRITTA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
del 17/6/87 - A.A. 1986-87

1) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e massa m sono vincolate a muoversi in una dimensione l'Hamiltoniana è

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{4} m\omega^2 (x_1 - x_2)^2 + a\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - g\,(S_{1z} + S_{2z})$$

a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni di H nel sistema del baricentro.

b) Si discuta la degenerazione dei livelli per $g=0$ e $g \neq 0$

2) Un gas perfetto classico è composto da N particelle monoatomiche di massa m non interagenti tra loro. Le particelle sono vincolate a muoversi su di un piano e l'hamiltoniana della singola particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} + g r^2$$

(r è la distanza di una generica particella dal centro della forza)
Il gas si trova in equilibrio alla temperatura T ed è confinato all'interno di una corona circolare di raggi R e $\sqrt{2}$ R e centro nel centro della forza.
Calcolare

1) il valore medio di r^2 in funzione di T.

2) Il calore specifico nel limite di alta temperatura $\left(T \gg \frac{gR^2}{k_B}\right)$

21

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

dell'1/2/1989

1)

Una particella neutra di massa m, spin S=1 e momento magnetico $\vec{\mu}$ =g S è sottoposta ad un campo magnetico uniforme B diretto lungo l'asse y. Lo stato al tempo t=o è descritto dallo spinore

$$\psi(\vec{r}, s_y) = A\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $\vec{K}$ ed $\vec{r}$ sono rispettivamente il vettore d'onda ed il vettore posizione della particella ed A è una costante di normalizzazione.
Determinare i possibili valori di una misura di S_z e le rispettive probabili al tempo t=o.
Scrivere l'evoluzione temporale dello stato e la probabilità in funzione del tempo di ottenere in una misura di S_z l'autovalore $+\hbar$
Dopo quanto tempo la probabilità di ottenere $S_z = +\hbar$ è uguale a quella inizi le?

2)

Un gas di fermioni di spin ½ in due dimensioni, contenuto in un recipiente quadrato di lato L ha una temperatura di Fermi T_F.

a) Calcolare il potenziale chimico in funzione della temperatura.
b) Calcolare per quale temperatura metà dei fermioni hanno una energia maggiore dell'energia di Fermi ϵ_F.

PRIMO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

dell'8/4/1989 A.A. 1988-89

Proff.: M. Lusignoli, A. Pugliese

Si abbia un gas perfetto di N particelle racchiuse in un volume V.
La relazione fra energia ed impulso di ogni particella è la seguente:

$$\mathcal{E}(p) = c\, p_0 \log\left(1+\frac{p}{p_0}\right) \qquad \left[\, p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}\,\right]$$

A) Considerando il sistema come un gas classico di particelle senza spin, calcolarne la funzione di partizione nell'ensemble canonico.
Mostrare che esiste una temperatura massima possibile T_M per questo sistema e determinarla.
Calcolare poi, per $T < T_M$, l'energia interna ed il potenziale chimico del gas.

B) Considerando il sistema come un gas quantistico di particelle di spin $\frac{1}{2}$, determinarne nel limite di $T \to 0$ °K l'energia di Fermi e l'energia interna.

C) Discutere il limite per $p_0 \to \infty$ per i risultati ottenuti in A) e B)

D) (Facoltativo)

Considerando il sistema come un gas quantistico di particelle di spin inter discutere se per esso si verifica o no il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein.

Formulario:

Per $a > -1$ e $b < -1-a$ si ha

$$\int_0^\infty dx\, x^a (1+x)^b = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(-a-b-1)}{\Gamma(-b)}$$

dove Γ è la funzione di Eulero:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n!$$

COMPITO DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
del 20/6/89 - A.A. 1988-89

1) L'hamiltoniano che descrive l'interazione di due particelle identiche di massa m e spin ½ nel sistema di quiete del loro baricentro è

$$H = \frac{P^2}{m} + \frac{1}{4} m \omega^2 r^2 + 2 A \vec{\ell} \cdot \vec{S}$$

dove $P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{\ell}$ sono gli operatori di momento angolare orbitale del moto relativo e $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ quelli dello spin totale.

Determinare per lo stato fondamentale e per il primo stato eccitato gli autovalori dell'energia, il loro grado di degenerazione e le autofunzioni, sapendo che $-\frac{1}{2} \hbar\omega < A < +\frac{1}{4} \hbar\omega$

Facoltativo:

Supponendo $A > 0$, calcolare le correzioni al primo ordine perturbativo agli autovalori determinati in precedenza determinate dalla presenza di un ulteriore termine nell'hamiltoniano:

$$V = \lambda\, (\ell_z + 2\, S_z).$$

2) Si consideri un gas perfetto classico di N particelle a temperatura T sottoposte ad un campo esterno di forze.
L'energia di singola particella è

$$\epsilon = \frac{P^2}{2m} + br$$

con $b > 0$. Le particelle sono vincolate a muoversi all'esterno di una sfera di raggio R e centro nell'origine.

a) Calcolare la funzione di partizione nell'ensemble canonico;
b) Calcolare la pressione esercitata dal gas sulla superficie della sfera anzidetta;
c) Calcolare l'energia interna del gas;
d) Come si comporta il calore specifico per temperature molto maggiori o molto minori di b·R?

2H

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 7/2/90

1º Esercizio

Si abbia un gas perfetto di N particelle di massa m racchiuse in un cono di altezza l, raggio di base R, con vertice nell'origine e come asse il semiasse $z>0$, soggette alla forza peso. Il gas è mantenuto all'equilibrio a temperatura T.

Considerando il sistema come un gas di Boltzmann, calcolare l'energia libera di Helmotz.

Calcolare l'energia interna del sistema e discutere i limiti per temperature molto maggiori e molto minori di mgl/k.

2º Esercizio

Due particelle identiche di spin 1/2 vincolate a muoversi in una dimensione sono descritte dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = H_0 + g\vec{B}\cdot(\vec{S}_1+\vec{S}_2)+G\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

dove

$$H_0 = p_1^2/2m + p_2^2/2m + {}^1/_2\, k(x_1^2 + x_2^2)$$

e $\vec{B}$ è un campo magnetico diretto secondo l'asse z positivo e le costanti g e G sono positive.

Sapendo che lo stato è autostato di H_0 con autovalore $2\hbar\omega$ ($\omega=\sqrt{k/m}$):

1) Scrivere le autofunzioni di H compatibili con questa informazione e determinare i corrispondenti autovalori.

2) Determinare quale di questi stati ha l'energia più bassa, in funzione del campo magnetico.

3) Determinare per quale valore del campo lo stato di energia più bassa risulta degenere. Qual'è il grado della degenerazione?

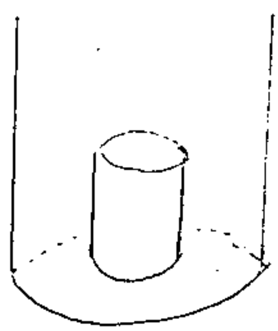
PRIMO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
II SEMESTRE A.A. 1989-90
Proff.: M. Lusignoli, A. Pugliese

1) Si abbia un gas classico di N particelle di massa m non interagenti soggette ad un campo di forze con energia potenziale

$$V(r) = -a\,r^3 \qquad (\text{con } a > o)$$

e racchiuse in una corona sferica di raggi R_1 e R_2 ($R_1 < R_2$). Il sistema è un equilibrio a temperatura T.
Determinare l'energia libera e successivamente l'energia interna del sistema.
Determinare, in funzione di r (distanza dal centro della corona) la densità del gas.
Determinare la pressione esercitata dal gas suelle superfici interne ed esterne della corona sferica, discutendo in particolare i limiti per temperatura molto maggiore di $\frac{a R_2^3}{k}$ e per $T \rightarrow 0$ °K.

2) Si consideri un recipiente costituito da un cilindro di altezza infinita e raggio R contenente al suo interno (appoggiato sulla base) un altro cilindro coassiale di raggio R/2 e altezza ℓ (v. figura)



Supponendo di immettere nella zona compresa fra i due cilindri dei fermioni di massa m e spin 1/2 soggetti alla forza peso, qual'è il numero massimo di particelle N_{Max} affinchè allo zero assoluto la quota massima, di una particella sia uguale ad ℓ ?
Per $N = N_{Max}$ calcolare il valor medio della quota di una particella del sistema.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 21/6/1990

Proff.: M. Lusignoli, G. Martinelli, A. Pugliese, P. Tombesi, M. Virasoro

1)

Sia dato un gas classico costituito da N molecole non interagenti in equilibrio a temperatura T, contenuto in un volume V. Le singole molecole hanno una struttura interna tale che l'energia di ognuna di esse può essere scritta come

$$\mathcal{E}_n(p) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + n\hbar\omega$$

con n=0, 1, 2 .....∞

Determinare l'energia interna del gas, la sua pressione e il potenziale chimico.

Determinare anche il valore specifico a pressione costante definito come

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_p$$

2)

Si considerino due elettroni vincolati a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R e soggetti al seguente hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(\hat{l}_1^{\,2} + \hat{l}_2^{\,2} + a\,\vec{L}\cdot\vec{S}\right)$$

dove a è costante, $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ è il momento angolare orbitale totale e $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ è lo spin totale. Verificare che $\hat{l}_1^{\,2}$ e $\hat{l}_2^{\,2}$ sono costanti del moto. Determinare le altre costanti del moto.

Scelti gli autovalori $l_1 = l_2 = 1$, scrivere gli autostati dell'hamiltoniano in funzione degli autovalori degli operatori precedentemente determinati. Determinare quindi gli autovalori dell'hamiltoniano e la relativa degenerazione.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA dell'11/9/90

Meccanica Statistica

N bosoni di massa m in d dimensioni sono soggetti ad un potenziale attrattivo

$$V(\vec{r}) = m\,\omega^2\,(\vec{r})^2 \quad \text{dove}$$

$$(\vec{r})^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \,.$$

La frequenza ω e le temperature che ci interessano sono tali che $\hbar\omega \ll \tau$. In tal caso si può trascurare la discretizzazione quantistica dei livelli e considerare gli oscillatori semiclassici.

1) Discutere quale sarà la dimensione di minima affinché ci possa essere condensazione di Bose.

2) Calcolare T_c in funzione di N, $\hbar\omega$ ed, eventualmente di integrali adimensionali del tipo

$$\int_0^\infty \frac{f(x,d)\,dx}{e^x - 1}$$

3) Trovare la dipendenza da T/T_c del numero di bosoni nello stato fondamentale.

Meccanica quantistica

Due particelle identiche di massa m e spin 1/2 si muovono di moto unidimensionale, soggette al potenziale dell'oscillatore armonico e ad una debole interazione

$$H_{int} = \lambda\, m\,\omega^2 x_1 x_2$$

con $\lambda \ll 1$, e x_1 e x_2 coordinate delle particelle.

1) Determinare, in assenza di interazione ($\lambda=0$) i primi due livelli energetici, la loro degenerazione e le corrispondenti funzioni d'onda (compresa la parte di spin).

2) Determinare i livelli di energia per $\lambda\neq 0$.

3) (facoltativo): Dimostare che sviluppando al prim'ordine in λ si ottiene, per i primi tre livelli, il risultato di un calcolo perturbativo allo stesso ordine in λ .

PRIMA PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

I° SEMESTRE Proff.: G. MARTINELLI, M.A. VIRASORO

del 19/11/1990

1 Esercizio

In un metallo di volume V l'energia degli elettroni nella banda di conduzione e' data da $\epsilon = E_G + p^2/2m_1$; l'energia degli elettroni nella banda di valenza e' data da $\epsilon = p^2/2m_2$.

1) Determinare l'equazione che permette di calcolare l'energia di Fermi.

2) Calcolare il valore dell'energia di Fermi al di sotto del quale non ci sono elettroni nella banda di conduzione e spiegare il risultato.

3) Calcolare il potenziale chimico nel limite in cui il gas di Fermi non e' degenere (cioe' ad alta temperatura).

2 Esercizio

Sia dato un sistema di N molecole biatomiche la cui Hamiltoniana unidimensionale e' data da

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + K(r_1 - r_2)^2/2 \tag{1}$$

1) Calcolare l'energia libera, l'energia interna ed il calore specifico.

2) Calcolare le medesime quantita' nel caso quantistico in cui l'energia di un oscillatore armonico unidimensionale e' data da $E_n = h\nu(1/2 + n)$, dove ν e' la frequenza caratteristica dell'oscillatore.

3) Studiare il caso 2) nel limite di alta temperatura e confrontarlo con il risultato del caso 1).

Suggerimento: utilizzare il sistema di coordinate del centro di massa e della distanza relativa.

29

PRIMO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (CORSO SERALE) 19 gennaio 1991 (prof. M.Lusignoli)

1) Si abbia un sistema di N oscillatori armonici bidimensionali non interagenti in equilibrio alla temperatura T. I livelli energetici di ogni oscillatore sono dati dalla seguente formula:

$$\epsilon_n = (n+1)\,h\nu$$

con $n = 0, 1, 2, ...$ ed a ogni livello corrispondono $n+1$ stati indipendenti.

a) calcolare l'energia media del sistema;

b) calcolare il calore specifico e discuterne il limite per alte temperature ($h\nu \ll kT$).

2) Si abbia un sistema di N particelle di massa m e spin $\frac{1}{2}$ dotate di momento magnetico α in un volume V e a T= $0°K$. In presenza di un campo magnetico B l'energia di ogni particella è

$$\epsilon(p,\sigma) = \frac{p^2}{2m} - \sigma\alpha B$$

con $\sigma = \pm 1$.

a) determinare il minimo valore del campo magnetico B, B_{min}, affinché la magnetizzazione sia uguale a Nα;

b) per $B \geq B_{min}$ determinare l'energia media per particella e la pressione.

I 30

3°

Compito di esonero del 30 maggio 1991 di
ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - corso serale

1) L'Hamiltoniano di un rotatore sferico immerso in un campo magnetico diretto lungo l'asse z è:

$$H = \frac{L^2}{2I} + \mu B L_z$$

All'istante $t = 0$ lo stato del sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta, \phi, t = 0) = A\,(\cos\theta + \sin\theta\cos\phi)$$

(con A costante di normalizzazione).

Determinare, in funzione del tempo:

a) il valore medio di L_x;

b) la probabilità di trovare il rotatore nell'intervallo:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < 3\,\frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} < \phi < +\frac{\pi}{4}$$

2) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e massa m sono vincolate da barriere di potenziale infinite a muoversi sul segmento $0 < x < \mathrm{L}$. Determinare gli autovalori e le autofunzioni corrispondenti ai primi due livelli energetici e discuterne il grado di degenerazione.

Supponendo che sul sistema agisca inoltre una perturbazione

$$\delta H = B\,\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{S_2} + V\,\mathrm{L}\left[\delta(x_1 - \frac{\mathrm{L}}{2}) + \delta(x_2 - \frac{\mathrm{L}}{2})\right]$$

(dove $\mathbf{S}_i$ sono gli operatori di spin della i-esima particella e $\delta(x)$ è la "funzione" di Dirac), calcolare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, gli spostamenti dei primi due livelli e discuterne il grado di degenerazione.

Scritto esame
17 /6 /1991
31

1. Esercizio

Un gas classico costituito di N particelle di massa m e' posto all'esterno di una sfera di raggio R. Le particelle del gas sono soggette al potenziale:

$$V(r) = a|\vec{r}| \tag{1.1}$$

Determinare:

i) L'energia media ed il calore specifico nei limiti $T \to 0$ e $T \to \infty$;

ii) La pressione sulla superfice della sfera e studiarne il limite per $T \to 0$ e $T \to \infty$;

iii) Il numero di particelle per unita' di volume in funzione di r.

2. Esercizio

Due particelle identiche di massa m e spin 1/2 son descritte dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{K}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \tag{2.1}$$

Discutere tutte le proprieta' di simmetria del sistema ed elencare le corrispondenti grandezze conservate.

Trascurando il moto del baricentro, determinare gli autovalori dell'energia, l'eventuale degenerazione e tutti i numeri quantici dello stato fondamentale e del primo livello eccitato.

Se si introduce la perturbazione:

$$V = g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) \tag{2.2}$$

quale delle simmetrie di H viene rotta?

Quali sono gli elementi di matrice di V diversi da zero nel sottospazio di Hilbert che contiene lo stato fondamentale ed il primo livello eccitato ?

Determinare la dipendenza da g degli autovalori di $H + V$ in questo sottospazio.

Scritto 11/9/1991

32

1. Esercizio

Un gas bidimensionale e' costituito da N oscillatori armonici indistinguibili di spin 1/2.

Determinare l'energia di Fermi e l'energia media di un oscillatore a $T = 0$

i) nel caso di oscillatori quantizzati

ii) per oscillatori classici (nel senso di considerare continuo lo spettro dell'energia)

Per quali valori di N e ω l'effetto quantistico e' irrilevante ?

Nota Bene $\sum_0^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

2. Esercizio

L'Hamiltoniana di una particella di spin 1/2 in tre dimensioni e' data da:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2} \tag{2.1}$$

La funzione d'onda all'istante iniziale e' data da:

$$\psi = \psi_0(\vec{r}) \times X_{S_z=+1/2} \tag{2.2}$$

dove $X_{S_z=\pm 1/2}$ e' lo spinore corrispondente all'autovalore di $\hat{S}_z$, $S_z = \pm\hbar/2$ e :

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{3/4}\frac{m\omega}{\hbar}(x^2+y^2)exp(-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}) \tag{2.3}$$

Determinare ad un istante t generico:

i) La funzione d'onda del sistema

ii) i possibili risultati di una misura dell'energia e le relative probabilita'

iii) i possibili risultati di una misura di j^2 e j_z, j essendo il momento angolare totale.

Formulario:

$$Y_{0,0} = 1/\sqrt{4\pi} \quad Y_{1,0} = \sqrt{3/4\pi}\, cos\theta \tag{2.4}$$

Scritto 11/9/91

$$Y_{1,1} = -\sqrt{3/8\pi}\, sin\theta e^{i\phi} = -Y^*_{1,-1} \quad Y_{2,0} = \sqrt{5/16\pi}\,(3cos^2\theta - 1) \tag{2.5}$$

$$Y_{2,1} = -\sqrt{15/\underset{8}{\cancel{16}}\pi}\, sen\theta cos\theta e^{i\phi} = -Y^*_{2,-1} \quad Y_{2,2} = \sqrt{15/32\pi}\, sin^2\theta e^{2i\phi} = Y^*_{2,-2} \tag{2.6}$$

Le prime autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale sono:

$$U_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-\xi^2/2} \tag{2.7}$$

$$U_1 = \sqrt{2}\xi U_0 \tag{2.8}$$

$$U_2 = 1/\sqrt{2}(2\xi^2 - 1)U_0 \tag{2.9}$$

con $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$.

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - (prof. M.Lusignoli e A.Pugliese)
Secondo compito di esonero (del 16 dicembre 1991)

1) Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω si trova in uno stato tale che il valore medio dell'energia è

$$< H >= \frac{3}{2}\hbar\omega,$$

lo scarto quadratico medio è dato da

$$< (H- < H >)^2 >= \frac{1}{2}(\hbar\omega)^2,$$

ed inoltre una misura dell'energia <u>non</u> può dare un risultato maggiore di $3\hbar\omega$.

a) Quali risultati si possono ottenere facendo una misura dell'energia, e con quali probabilità ?

b) Scrivere il più generale vettore di stato compatibile con le informazioni suddette.

c) Sapendo che all'istante $t = 0$ il valore medio dell'operatore di posizione x è il massimo possibile, determinarne il valore ad un istante $t > 0$ generico.

d) Determinare in funzione del tempo il valore medio dell'operatore quantità di moto p.

2) Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta all'azione di un potenziale (buca rettangolare):

$$V(x) = 0 \qquad (\text{per } |x| > a)$$

$$V(x) = -V_0 \qquad (\text{per } |x| < a)$$

a) Quale deve essere la profondità della buca V_0, data la larghezza $2a$, perchè il primo livello eccitato abbia energia $E_1 = -\frac{1}{2}V_0$?

b) Se la particella si trova nell'autostato dell'hamiltoniano corrispondente al primo livello eccitato, qual'è la probabilità di trovarla facendo una misura della sua posizione nella regione classicamente proibita ?

c) L'energia del livello fondamentale E_0 obbedisce evidentemente alle condizioni:

$$-V_0 < E_0 < E_1 = -\frac{1}{2}V_0 .$$

Determinare per E_0 un limite superiore ed uno inferiore più stringenti dei precedenti.

d) Quanti sono gli stati legati di questo hamiltoniano ?

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - (prof. M.Lusignoli e A.Pugliese)
Terzo compito di esonero (del 30 gennaio 1992)

1) L'hamiltoniano di una particella di spin $\frac{1}{2}$ e massa m vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R è

$$H = \frac{L^2}{2\,m\,R^2} + \frac{2\,\omega}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}.$$

All'istante $t = 0$ lo stato della particella è rappresentato dal seguente spinore:

$$\psi\,(t = 0) = Y_{1,0}(\theta, \phi)\ \chi_+ \,.$$

a) Determinare l'evoluzione nel tempo dello stato ψ.
b) Determinare in funzione del tempo la probabilità di trovare la particella con $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ e $\theta < \frac{\pi}{3}$.

2) Due particelle identiche di massa m e spin $\frac{1}{2}$ si muovono di moto unidimensionale e sono vincolate da barriere infinite di potenziale, in modo tale che la loro distanza non può superare a e la coordinata del loro baricentro è $\frac{|x_1+x_2|}{2} < L$.
a) Considerando solo gli stati per i quali l'energia del moto del baricentro è la minima possibile, determinarne autovalori ed autofunzioni dell'energia, precisando il grado di degenerazione.
b) Se l'hamiltoniano contiene l'ulteriore termine

$$\lambda V = \lambda\,\frac{\pi^2\,\hbar^2}{4\,m\,a^3}\,|x_1 - x_2|\;\sigma_1\cdot\sigma_2\;,$$

determinare le correzioni al primo ordine della teoria delle perturbazioni ai primi due fra i livelli determinati al punto (a).

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Compito di esame del 6 febbraio 1992

1) Un gas è composto da N particelle non interagenti di massa m e spin $\frac{1}{2}$, che si muovono soggette ad un campo di forze con energia potenziale (di singola particella)

$$V(\mathbf{r}) = a\,|\mathbf{r}|\,,$$

con $a > 0$.

a) Determinare l'energia media ed il calore specifico nel limite classico.

b) Nel limite di $T \to 0$ determinare l'energia di Fermi, la massima distanza dall'origine alla quale si possono ancora trovare particelle e l'energia totale del sistema.

2) Due particelle identiche di massa m e non interagenti sono vincolate a rimanere nell'interno del parallelepipedo:

$$|x| < a\,,$$

$$|y| < b\,,$$

$$|z| < c\,,$$

con $a > b > c$.

a) Determinare autovalori ed autofunzioni dell'energia, precisando il grado di degenerazione, per il livello fondamentale ed il primo eccitato per il caso di particelle prive di spin e per il caso di spin $\frac{1}{2}$.

b) Supponendo che le particelle si trovino in uno degli autostati comuni allo spin totale ed all'hamiltoniano, corrispondenti al primo livello eccitato, determinare la probabilità di trovare entrambe le particelle con coordinata $x > 0$.

c) Se all'hamiltoniano si aggiunge l'ulteriore termine ($\lambda << 1$)

$$\lambda V = \lambda \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\,m\,a^4}\,\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}\,,$$

si determinino le correzioni al primo ordine della teoria delle perturbazioni ai due livelli determinati al punto (a).

3 Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
6-6-1992

1 Esercizio: Una particella è soggetta au un potenziale centrale e ad un campo magnetico diretto lungo l'asse z. L'Hamiltoniana del sistema è:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) - \mu B L_z$$

All'istante t =0 la funzione d'onda è:

$$\Psi(t=0) = A\ \Phi(r)(\cos\theta + e^{i\alpha}\sin\theta\cos\phi)$$

Determinare:

a) il valore di α per il quale a $t = 0$ si ha $\langle L_X \rangle = 0$.

b) la probabilità al tempo t che una misura di L_X fornisca il valore 0.

2 Esercizio: Due particelle identiche di spin 1/2 non interagenti sono vincolate sull'asse x e sono soggette ad un potenziale armonico di uguale pulsazione.

Determinare:

a) autofunzioni e autovalori dell'Hamiltoniana, specificando sia la parte spaziale che di spin e il grado di degenerazione del sistema.

b) lo stato del sistema sapendo che:

i) lo spin totale è zero.

ii) Una misura dell'energia fornisce i risultati $\hbar\omega$ e $2\hbar\omega$ con uguale probabilità.

iii) il valore medio della coordinata del baricentro $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ è 0.

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
Compito di esame del 14 settembre 1992

1) Un gas è composto da N particelle non interagenti di massa m, che si muovono in due dimensioni, soggette ad un campo di forze con energia potenziale (di singola particella)

$$V = a\,(x^2 + y^2)^2\ ,$$

con $a > 0$.
a) Supponendo che le particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$, determinare la massima distanza dall'origine alla quale si possono trovare le particelle se la temperatura è $T = 0$.
b) Supponendo invece che lo spin delle particelle sia nullo, determinare la temperatura al di sotto della quale avviene il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein.
Nota bene: Esprimere il risultato in termini di integrali adimensionali, che si possono lasciare indicati.

2) I tre livelli più bassi di un atomo paramagnetico in un reticolo cristallino ed immerso in un campo magnetico $(0,0,B)$ possono essere ricavati dall'Hamiltoniana efficace:

$$H = \alpha B S_z + \beta S_z^2 + \gamma\,(S_x^2 - S_y^2),$$

dove α, β e γ sono costanti positive ($\beta \leq \gamma$) e $\hbar S_i$ sono gli operatori di spin per una particella di spin uno.
Nella base in cui S_z è diagonale (ket di base $|- \rangle, |O \rangle, |+ \rangle$) gli operatori sono rappresentati dalle matrici

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},\ S_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},\ S_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare autoket ed autovalori dell'operatore hamiltoniano. Determinare inoltre il valore medio del momento magnetico ($\mu = -\alpha S_z$) nello stato fondamentale, discutendo in particolare i casi di campo magnetico nullo e di grande campo magnetico ($\alpha B \gg \gamma$).

39

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - (prof. M.Lusignoli e A.Pugliese)
Secondo compito di esonero (del 16 dicembre 1992)

1) L'Hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli può essere scritto come

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2}(|0><0| - |1><1|)$$

dove $|0>$ e $|1>$ sono gli autoket, mutuamente ortogonali e normalizzati, appartenenti agli autovalori $\mp\frac{\hbar\omega}{2}$, rispettivamente.
Si considerino l'operatore lineare $a = |0><1|$ ed il suo coniugato hermitiano $a^\dagger$.
a) Dimostrare che valgono le relazioni seguenti:

$$\{a, a^\dagger\} \equiv a\,a^\dagger + a^\dagger a = 1\,; \qquad a^2 = a^{\dagger 2} = 0$$

$$[H, a] = -\hbar\omega\, a\,; \qquad [H, a^\dagger] = +\hbar\omega\, a^\dagger$$

e che l'operatore $N = a^\dagger a$ ha autovalori 0 e 1 e che i suoi autoket sono i ket di base. Esprimere l'Hamiltoniano in termini di N e dell'identità.
b) Supponendo che il sistema si trovi all'istante iniziale $t = 0$ nell'autostato dell'operatore hermitiano $A = a + a^\dagger$ corrispondente all'autovalore 1, determinare i valori medi di A e A^2 e l'indeterminazione $< (\Delta A)^2 >$ in funzione del tempo t. Detto $B = -i\,(a - a^\dagger)$ un altro operatore hermitiano, determinare anche $< B >$, $< B^2 >$ e $< (\Delta B)^2 >$ in funzione del tempo t. Verificare la relazione di indeterminazione generalizzata fra A e B.

2) Una particella di massa m è vincolata a muoversi in una dimensione soggetta all'azione del potenziale

$$V(x) = +\infty \qquad (\text{per } |x| \geq \frac{L}{2})$$

$$V(x) = 0 \qquad (\text{per } |x| < \frac{L}{2})\,.$$

All'istante iniziale la funzione d'onda è:

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\cos\frac{\pi x}{L} - \cos\frac{3\pi x}{L}\right)\theta(x + \frac{L}{2})\,\theta(-x)\,.$$

a) Quali, fra i possibili risultati di una misura dell'energia della particella, hanno probabilità non nulla?
b) Determinare le probabilità dei primi tre autovalori dell'Hamiltoniano.
c) Supponendo che il sistema evolva liberamente, esiste un istante di tempo $t > 0$ tale che in quell'istante la particella *non* possa essere trovata nella metà sinistra del segmento, $x < 0$? In caso affermativo, quando questo si verifica per la prima volta ?

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - (prof. M.Lusignoli e A.Pugliese)
Terzo compito di esonero (del 27 gennaio 1993)

Una particella di massa m, spin $\frac{1}{2}$ e carica elettrica q è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio r ed è soggetta all'azione di un campo magnetico B diretto lungo l'asse z. L'operatore hamiltoniano è quindi ($I \equiv m\, r^2$)

$$H = \frac{L^2}{2I} - \frac{qB}{2mc}(L_z + 2\,S_z)\,.$$

All'istante $t = 0$ la particella si trova in un autostato degli operatori di momento angolare totale J^2 e J_z con autovalori $\frac{3}{4}\hbar^2$ e $\frac{1}{2}\hbar$ rispettivamente. Si sa inoltre che la probabilità di ottenere $-\frac{1}{2}\hbar$ come risultato di una misura di S_z è $\frac{1}{3}$ e che il valor medio del coseno dell'angolo θ è il massimo possibile, compatibilmente con i dati precedenti.

(1) Quali risultati si possono ottenere e con quali probabilità facendo una misura dell'energia?

(2) Determinare in funzione del tempo le probabilità dei diversi possibili risultati di una misura di S_z e di L^2, nonchè il valor medio $< \cos\theta >$.

(3) Se all'hamiltoniano si aggiunge una perturbazione

$$\lambda V = \lambda \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}}{2I}\,,$$

con $\lambda \ll 1$, quali variabili di momento angolare sono ancora costanti del moto ?

(4) Determinare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, lo spostamento degli autovalori dell'energia di cui alla domanda (1).

Facoltativo: (5) Determinare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, le correzioni alle autofunzioni associate.

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Prova scritta di esame del 5 febbraio 1993

1) Si consideri un gas di particelle di massa m, spin $\frac{1}{2}$ (e momento magnetico μ), vincolate a muoversi in un piano, racchiuse in un cerchio di raggio R e mantenuto allo zero assoluto. Le particelle non interagiscono fra loro, ma sono soggette all'azione di un campo magnetico disomogeneo perpendicolare al piano e di intensità $B = B_0 r/R$, sicchè l'energia di una singola particella può essere scritta

$$\epsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \pm \mu B_0 \frac{r}{R} .$$

a) Sapendo che l'energia di Fermi è pari a μB_0 determinare il numero totale di particelle del sistema.

b) Determinare con quale probabilità il momento magnetico di una particella è diretto come il campo **B**.

c) Determinare la distanza media dall'origine per una particella con momento magnetico antiparallelo a **B**.

2) Una particella di massa m e spin $\frac{1}{2}$ è soggetta all'azione di un potenziale attrattivo di oscillatore armonico isotropo. L'operatore hamiltoniano è quindi

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 .$$

Ad esso va aggiunto un ulteriore termine:

$$\lambda V = \lambda \sqrt{\frac{m\omega^3}{\hbar^3}}\, r\, \mathbf{L}\cdot\mathbf{S},$$

dove **L** e **S** sono gli operatori di momento angolare orbitale e di spin, rispettivamente.

Considerando i due livelli energetici più bassi dell'Hamiltoniano H_0, calcolare le loro correzioni al primo ordine nella teoria delle perturbazioni in λV. Discutere in particolare i gradi di degenerazione di questi livelli sia in assenza che in presenza della perturbazione.

I prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1992-93 - 29 Marzo 1993

(1) Un sistema è costituito da 2 particelle, non interagenti, ognuna delle quali ha a disposizione 2 stati le cui energie valgono ϵ e 2ϵ. Scrivere in forma esplicita la somma di partizione canonica del sistema nei casi seguenti:

a) Le particelle sono distinguibili,

b) Le particelle seguono la statistica di Fermi-Dirac,

c) Le particelle seguono la statistica di Bose-Einstein.

Come si modificano le risposte ai punti precedenti se le particelle sono $N > 2$ (e gli stati di singola particella non cambiano) ?

Determinare infine l' entropia del sistema nei casi b) e c) ($N = 2$) e discutere il risultato.

(2) Un gas perfetto classico di N particelle, di massa m, è racchiuso in un cilindro, la cui sezione misura A, infinitamente lungo, con asse parallelo all' asse z. Le particelle sono soggette a una forza di richiamo elastica verso il piano $z = 0$; l' Hamiltoniana di singola particella si scrive:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2.$$

Sapendo che il gas è in equilibrio alla temperatura T, determinare:

a) la sua energia media,

b) la densità di particelle in funzione della quota,

c) la pressione nel gas in funzione della quota.

Discutere il limite delle grandeze determinate in b) e c) per $T \to 0$.

II prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1992-93 - 4 Maggio 1993

(1) L' Hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli è descritto dal seguente operatore

$\mathcal{H}|1\rangle = |1\rangle + \frac{1+i}{\sqrt{2}}|2\rangle, \qquad \mathcal{H}|2\rangle = \frac{1-i}{\sqrt{2}}|1\rangle$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono gli autostati normalizzati di un altro operatore hermitiano $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}|1\rangle = \sqrt{2}|1\rangle, \qquad \mathcal{A}|2\rangle = -\sqrt{2}|2\rangle.$

All' istante $t = 0$ si esegue una misura dell'osservabile associata all'operatore $\mathcal{A}$ e si trova il valore $-\sqrt{2}$.

a) Immediatamente dopo si esegue una misura di energia; qual' è la probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale ?

b) Come cambia questa probabilità eseguendo la misura dopo un intervallo di tempo finito T ?

c) Se all' istante t_1 il sistema si trova con certezza nello stato $|2\rangle$, in quali istanti successivi (se esistono) il sistema si troverà nella stessa condizione ?

(2) Un fascio monocromatico di particelle di massa m si muove lungo l' asse x in presenza del potenziale

$V(x) = -V_o\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la delta di Dirac.

Per un fascio proveniente da $-\infty$ una funzione d' onda stazionaria di energia E si puo' scrivere:

$\exp(ix\sqrt{2mE}/\hbar) + R\exp(-ix\sqrt{2mE}/\hbar), \qquad \text{per } x < 0,$

$T\exp(ix\sqrt{2mE}/\hbar), \qquad \text{per } x > 0.$

a) Determinare per quale valore di E il flusso trasmesso è uguale al flusso riflesso, nei due casi: $V_o > 0$ e $V_o < 0$.

b) Nel caso $V_o > 0$ determinare l' energia dello stato fondamentale.

44

III prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1992-93 - 31 Maggio 1993

(1) 2 particelle identiche di massa $2m$ si attraggono con una forza armonica isotropa; nel riferimento del centro di massa il loro hamiltoniano è:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^{\,2}$$

dove $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ è la distanza relativa tra le particelle e $\vec{p}$ il suo impulso coniugato.

a) Discutere la degenerazione del livello fondamentale e del primo livello eccitato nel caso che le particelle abbiano spin 0 oppure spin 1/2.

b) Nel caso che le particelle abbiano spin 1/2, calcolare il valor medio dell' operatore L_x^2 sugli stati del primo livello eccitato che siano anche autostati dell'operatore L_z (L_x e L_z sono due componenti del momento orbitale $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$).

(2) L' Hamiltoniano di un oscillatore unidimensionale è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + ax^3 + bx^4 \qquad (b > 0).$$

Trattando il termine $ax^3 + bx^4$ come una perturbazione, determinare, al primo ordine perturbativo, le correzioni allo spettro dell' hamiltoniano dell' oscillatore armonico.

15

Esame di Istituzioni di Fisica Teorica

A.A. 1992-93 - 21 Giugno 1993

(1) 2 fermioni di massa m e spin $1/2$ si trovano in una buca infinita unidimensionale di larghezza L. L' interazione tra i 2 fermioni è :

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2}[(3+\frac{4S_1S_2}{\hbar^2})+\lambda L\delta(x_1-x_2)],$$

dove $\delta(y)$ è la delta di Dirac a) Calcolare, nel caso $\lambda=0$, autovalori e autostati dei primi 3 livelli dell' Hamiltoniano. Discutere l'eventuale degenerazione dei livelli.

b) Calcolare, nel caso $\lambda\neq 0$, la correzione, al primo ordine della teoria delle perturbazioni, dell' energia dello stato fondamentale e del secondo livello eccitato.

(2) In uno spazio a 1 dimensione si consideri un gas di N fermioni di massa m e spin $3/2$ contenuti in un segmento di lunghezza L. Il sistema è immerso in un campo magnetico B, in modo tale che l' Hamiltoniano di singola particella è:

$$H=\frac{p^2}{2m}+cB\sigma_z \qquad \sigma_z=\pm1,\pm3.$$

a) Calcolare l' energia di Fermi nel caso $B=0$.

b) Calcolare, in funzione del potenziale chimico, il valore minimo di B per cui, a $T=0$, il numero medio di particelle con $\sigma=3$ è uguale a zero. Determinare inoltre, in questo stesso caso, il numero medio di particelle presenti nel sistema.

46

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Compito di esame del 13 settembre 1993

1) Un gas è composto da particelle non interagenti di massa m e spin $\frac{1}{2}$, che si muovono soggette ad un campo di forze con energia potenziale $V(x, y, z) = m\, g\, z$ (forza peso). Il gas è racchiuso in un cilindro di raggio R sulla cui base $z = 0$ è poggiata una semisfera impenetrabile anch'essa di raggio R.
Determinare il massimo numero di particelle che può essere posto nel recipiente in modo che allo zero assoluto la massima quota occupata da particelle sia $z = R$. Determinare inoltre il valor medio della quota z delle particelle, sempre a $T = 0$.

Formula utile : $\int_0^1 x^a\,(1-x)^b\,dx = \dfrac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$.

2) Due particelle identiche di massa m che si muovono in una dimensione sono vincolate a rimanere nell'interno del segmento $|x| \leq a$. Inoltre, la loro interazione è descritta dall'hamiltoniano

$$H_{\text{int}} = \lambda\,\frac{(\hbar\pi)^2}{m\,a^4}x_1 x_2,$$

con $\lambda << 1$.

a) Determinare, al primo ordine della teoria delle perturbazioni, gli autovalori dell'energia dei primi tre livelli, precisandone il grado di degenerazione con e senza interazione. Si considerino separatamente il caso di particelle prive di spin e il caso di spin $\frac{1}{2}$.

b) Si determinino inoltre quali dei coefficienti dello sviluppo del ket corrispondente allo stato fondamentale in autoket dell'hamiltoniano imperturbato sono diversi da zero, sempre al primo ordine della teoria delle perturbazioni.

47

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (proff. M. Lusignoli e G. Martinelli)
Primo compito di esonero del 15 novembre 1993

Sia dato un gas di bosoni non interagenti di massa m e spin 1, in presenza di un campo magnetico esterno $\vec{B}$ diretto lungo l'asse z. L'hamiltoniana per una singola particella è:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha\sigma B_z \qquad (1)$$

dove α è il modulo del momento di dipolo magnetico e σ può assumere i valori $+1$, 0, -1.

- Determinare il valore massimo del potenziale chimico.
- Calcolare nel limite classico il potenziale chimico, la magnetizzazione e l'energia interna. Esprimere l'energia interna in termini della temperatura e della magnetizzazione.
  Discutere il limite $B_z \to 0$ e confrontare i risultati con il caso di bosoni di spin zero.
- Scrivere l'equazione che determina la temperatura critica T_c per la condensazione di Bose, lasciando indicati alcuni integrali adimensionali.
- Calcolare la temperatura critica T_c nel limite di campo magnetico intenso, cioè tale che $\alpha B_z / kT_c \gg 1$.

$\mu 8$

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (prof. M.Lusignoli e G.Martinelli)
anno accademico 1993-94 - primo semestre

SECONDO COMPITO DI ESONERO (20/12/'93)

1) Una particella di massa m e spin zero è vincolata a muoversi in una dimensione ed è soggetta all'azione del potenziale

$$V(x) = +\infty \quad \text{per } |x| > a$$
$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\gamma\,\delta(x) \quad \text{per } |x| < a$$

a) Si determini il valore di $\gamma > 0$ per il quale l'autovalore più basso dell'Hamiltoniano è E=0 e se ne scriva la funzione d'onda normalizzata.
b) Si scrivano le equazioni che determinano gli altri autovalori, eventualmente lasciandole indicate.
c) Supponendo che all'istante iniziale t=0 lo stato della particella sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,t=0) = N\{1 - \frac{|x|}{a} + \sin(\pi\frac{x}{a})\},$$

dire dopo quanto tempo la particella ritorna allo stato iniziale. Se si fa una misura dell'energia in questo stato, quali risultati si possono ottenere e con quali probabilità ?

2) Si consideri un sistema quantistico a due livelli e si assumano come ket di base gli autoket $|+\rangle$ e $|-\rangle$ di un operatore lineare A, che è rappresentato da

$$A = |+\rangle\langle+| \; - \; |-\rangle\langle-|$$

L'operatore Hamiltoniano è

$$H = \hbar\omega_1(|+\rangle\langle+| \; + \; |-\rangle\langle-|) +$$
$$+\hbar\omega_2(|+\rangle\langle-| \; + \; |-\rangle\langle+|)$$

Il sistema si trova all'istante iniziale nello stato $|+\rangle$.
Calcolare il valor medio dell'energia e la dispersione di A ($\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$) in funzione del tempo. In quali istanti lo stato del sistema è autostato di A ?

19

III COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Profs. Maurizio Lusignoli e Guido Martinelli, A.A. 1993-1994

ESERCIZIO 1

Sia data una particella di spin $S = 1/2$ la cui Hamiltoniana e' data da:

$$H_0 = \frac{\epsilon}{\hbar^2}\Big(\frac{4}{3}\vec{L}^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S} + \hbar(L_z + S_z)\Big) \tag{1}$$

1) Trovare gli autostati e gli autovalori di H_0.
2) Si consideri ora l'Hamiltoniana $H = H_0 + V$ dove

$$V = \lambda\epsilon\frac{z}{|\vec{r}|} \tag{2}$$

e $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ e' il vettore che individua la posizione della particella.

Cosiderando V come una perturbazione, $\lambda \ll 1$, si calcoli lo spostamento in energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato e la funzione d'onda dello stato fondamentale al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

ESERCIZIO 2

Siano date tre particelle di spin zero, tali che una e' certamente in uno stato di momento angolare $|\vec{L}^2| = 0$ e le altre due hanno momento angolare $|\vec{L}^2| \leq 2\hbar^2$.

1) Trovare tutte le funzioni d'onda angolari indipendenti per questo sistema.
2) Supponendo che l'Hamiltoniana sia

$$H = \frac{\vec{J}^2}{2I} + \alpha J_z\ , \tag{3}$$

dove $\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3$ e' il momento angolare totale del sistema, calcolare gli autovalori di H corrispondenti agli stati trovati al punto 1).

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

COMPITO DI ESAME DEL GIORNO 8 FEBBRAIO 1994

1) Si abbia un sistema di N fermioni non interagenti di massa m e spin 3/2, vincolati a muoversi in due dimensioni in un volume V e soggetti all'azione di un campo magnetico uniforme e costante di intensità B. L'energia di una singola particella è

$$\varepsilon(p_x, p_y, \sigma) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - \alpha B \sigma$$

dove σ può assumere i valori (-3, -1, +1, +3). Il sistema è mantenuto allo zero assoluto.

Calcolare in funzione della intensità B del campo magnetico la frazione delle particelle che hanno lo spin totalmente allineato con la direzione del campo, $N(\sigma=3)/N$.

2) Si consideri un sistema quantistico costituito da due particelle identiche di spin 1/2. L'operatore hamiltoniano è

$$H_0 = \frac{1}{2I}(j_1^2 + j_2^2)$$

essendo $j_i^2 = (\vec{l}_i + \vec{s}_i)^2$ l'operatore del quadrato del momento angolare totale di una particella. Le due particelle sono in un autostato del quadrato del momento angolare orbitale con $l_1 = l_2 = 1$.

a) Determinare i possibili autovalori dell'energia, il loro grado di degenerazione e la forma degli autostati di H_0, l_1^2 e l_2^2 (con $l_1 = l_2 = 1.$)

b) Dire quali sono i possibili risultati di una misura del quadrato del momento angolare totale del sistema, $j^2 = (\vec{j}_1 + \vec{j}_2)^2$, negli stati determinati al punto precedente.

c) Se all'hamiltoniano si aggiunge una perturbazione $\lambda V = \frac{\lambda}{I} \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2$, calcolare lo spostamento dell'autovalore più basso (fra quelli discussi in precedenza) al primo ordine della teoria perturbativa.

I COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

(11 - 4 - 94)

Un sistema termodinamico è costituito da N fermioni non interagenti di massa zero, di spin 1/2 e di momento magnetico α . Il sistema è racchiuso in un volume V ed è immerso in un campo magnetico B; l'energia di singola particella è quindi:

$$\varepsilon = c|\vec{p}| - \sigma \alpha B \qquad (\sigma = \pm 1) \quad .$$

a) Determinare nel limite classico (alta temperatura e bassa densità) l'energia libera, la magnetizzazione e il potenziale chimico del sistema.

b) Il sistema si trova allo zero assoluto. Per quale valore di B vale la seguente condizione ?

$$N(\sigma = 1) = 8N(\sigma = - 1)$$

Determinare l'energia di Fermi e l'energia media per particella.

II Compito di Esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
16-5-1994

1) Una particella è vincolata a muoversi nel segmento

$$-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Lo stato del sistema è tale che una misura dell'energia dà certamente un valore $E < 5\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$. Al tempo $t = 0$ la densità di probabilità di trovare la particella a $x = \frac{L}{4}$ è nulla. Determinare ad un istante t generico $< E >$ e $< px + xp > -2 < p >< x >$. Determinare inoltre la probabilità di trovare la particella tra 0 e $\frac{L}{2}$.

2) L'Hamiltoniana di una particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

con

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad |x| > a \\ V(x) &= -V_0 \quad -a < x < a, V_0 > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Determinare V_0 in modo tale che il secondo stato eccitato abbia energia $E_2 = -\frac{V_0}{4}$. Determinare in questo caso la probabilità di trovare la particella all'interno della buca. Derminare il numero di stati legati.
Per l'energia dello stato fondamentale vale certamente la seguente diseguaglianza $-V_0 < E_0 < E_2$, sapreste trovare due limiti più stringenti?

53

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (prof. A. Pugliese)
anno accademico 1993-94 - secondo semestre

TERZO COMPITO DI ESONERO (8/6/'94)

1) Un elettrone è vincolato a muoversi su una sfera di raggio R ed è soggetto ad un campo magnetico diretto lungo l'asse x. L'Hamiltoniano è

$$H = \frac{L^2}{2mR^2} + \frac{\mu B}{\hbar}(L_x + 2S_x).$$

All'istante iniziale lo stato della particella è descritto dallo spinore

$$\chi(t=0) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Determinare lo spinore all'istante generico t. Determinare in funzione del tempo i possibili risultati di una misura di L_z e di J_z, dove J_z è la componente del momento angolare totale, e le loro probabilità.

2) Due particelle identiche sono vincolate a muoversi in una dimensione. L'Hamiltoniano del sistema è

$$H = H_0 + \lambda V =$$
$$= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2(x_1 - x_2)^2 + \lambda\sqrt{m\frac{\omega^3}{\hbar^3}}\,|x_1 - x_2|\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 .$$

a) Si determinino, nel sistema in cui il baricentro è in quiete, i due autovalori più bassi di H_0 ed i corrispondenti autoket, nei casi di particelle di spin 1/2 e di particelle di spin 1.

b) Calcolare al primo ordine in λ le correzioni agli autovalori di cui al punto a). Discutere la degenerazione dei livelli con e senza perturbazione.

54

COMPITO SCRITTO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

A.A. 1993-1994, 17 Giugno 1994

ESERCIZIO 1

Sia dato un sistema costituito da due particelle indentiche di spin $s = 1/2$, la cui Hamiltoniana e' data da

$$H = H_0 + \frac{\alpha}{\hbar}\vec{L}\cdot\vec{S} \tag{1}$$

con

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\vec{r}_1^{\,2} + \vec{r}_2^{\,2}\right). \tag{2}$$

$\vec{L}$ e $\vec{S}$ sono rispettivamente il momento angolare orbitale totale e lo spin totale del sistema.

1) Trovare gli autostati e gli autovalori E_0 di H_0.

2) Per $E_0 \leq 4\hbar\omega$ calcolare gli autostati e gli autovalori di H e determinare il valore di α, α_c, per il quale lo stato corrispondente a $E_0 = 3\hbar\omega$ non e' piu' lo stato di energia piu' bassa. Trovare lo stato fondamentale per $\alpha \geq \alpha_c$.

3) Data la perturbazione

$$\delta H = \lambda\,(z_1 - z_2)^2 \tag{3}$$

trovare, al prim'ordine della teoria delle perturbazioni, lo spostamento in energia per lo stato fondamentale, quando $\alpha \geq \alpha_c$.

ESERCIZIO 2

Sia dato un gas di N particelle identiche di massa nulla in una dimensione. L'Hamiltoniana di singola particella e'

$$H = c|p| + a|x|, \tag{4}$$

con $a > 0$.

1)Per un gas di particelle di spin 1/2, determinare l'energia di Fermi e il massimo valore che $|x|$ puo' assumere. a $T = 0$.

2) Per un gas di particelle di spin zero, dimostrare che c'e' condensazione e calcolare la temperatura critica (lasciando indicati gli eventuali integrali adimensionali).

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
compito scritto di esame del 12 SETTEMBRE 1994

1) Un gas bidimensionale è composto di N particelle non interagenti, vincolate a muoversi nella regione $-a\exp\left(\frac{y}{y_o}\right) \leq x \leq a\exp\left(\frac{y}{y_o}\right)$ (dove y_o ed a sono costanti positive e $-\infty < y < \infty$).
L'energia di una particella è:

$$\epsilon = \frac{p^2}{2\,m} + V_o\ \exp\left(2\frac{y}{y_o}\right)$$

con m e V_o costanti positive.

Supponendo che le particelle abbiano spin $\frac{1}{2}$ determinare l'energia di Fermi del sistema.

Nel caso in cui le particelle siano prive di spin, dire se si verifica il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein e, in caso affermativo, al di sotto di quale temperatura.

2) Si abbia un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico diretto lungo l'asse z. Supponendo di poter trascurare gli effetti relativistici, l'hamiltoniano nel sistema del baricentro è:

$$H = \frac{p^2}{2\,m} - \frac{e^2}{r} + \frac{e}{2mc}B\,(L_z + 2\,S_z)\,.$$

Al tempo $t = 0$ lo stato dell'elettrone è dato da:

$$\psi(r,\theta,\varphi;t=0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\exp\left(\frac{-r}{a}\right) \\ \frac{r}{4a}\cos\theta\exp\left(\frac{-r}{2a}\right)\end{pmatrix}$$

dove a è il raggio di Bohr e si sono usati come spinori di base gli autostati di S_z.

Determinare lo stato ad un tempo $t > 0$.

Determinare i possibili risultati di una misura di H, L^2 e J_z e le rispettive probabilità.

Calcolare in funzione del tempo il valor medio del quadrato del momento angolare totale, $\langle J^2\rangle$.

I prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1994-95 - 4 Aprile 1995

Un oscillatore armonico unidimensionale ha massa m e pulsazione ω. Eseguendo misure di energia si trovano i valori $(3/2)\hbar\omega$ e $(7/2)\hbar\omega$, con valor medio $2\hbar\omega$.

a) Determinare con quali probabilitá si ottengono le energie permesse e scrivere lo stato piú generale compatibile con queste informazioni.

b) Determinare lo stato $|\Psi\rangle$ completamente sapendo che al tempo $t = 0$ si ha

$$\langle\Psi|x^2|\Psi\rangle = \frac{11}{4}\frac{\hbar}{m\omega}$$

e

$$\langle\Psi|\frac{xp+px}{2}|\Psi\rangle = -\frac{3}{4}\hbar;$$

essendo x e p la coordinata e l'impulso dell'oscillatore.

c) Calcolare il valor medio, in funzione del tempo, degli osservabili $(a^\dagger a a^\dagger a)$ e x^2.

d) Determinare la corrente di probabilitá in $x = 0$, in funzione del tempo.

e) All' istante $t_1 > 0$ viene eseguita una misura di energia di cui ignoriamo il risultato. Calcolare i valori possibili, e le relative probabilitá, dello scarto quadratico medio dell'osservabile $A = (xp + px)/2$ a un tempo $t_2 > t_1$.

I prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1994-95 - 26 Aprile 1995

Un oscillatore armonico unidimensionale ha massa m e pulsazione ω; la sua funzione d' onda al tempo $t = 0$ si scrive:

$$\psi(x) = C\left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2 + i\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\right]\exp -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)^2 ,$$

essendo C una costante di normalizzazione.

a) Calcolare il valor medio, in funzione del tempo, delle osservabili $(xp + px)/2$ e p.

b) Dopo quanto tempo $\langle\psi|p|\psi\rangle$ e $\langle\psi|(xp+px)/2|\psi\rangle$ riassumono contemporaneamente il valore iniziale ?

c) A un tempo $t_1 > 0$ si misura la posizione dell'oscillatore trovando $x \sim 0$: si assuma che sia esattamente $x = 0$. Se si misura l' energia del sistema a un tempo $t > t_1$, quali valori si possono ottenere ? Si considerino le due più basse energie possibili e si dica quale è più probabile.

II prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1994-95 - 9 Maggio 1995

Avvertenza. L' elaborato sará corretto solo se:

I) le risposte ai quesiti posti saranno scritte in forma chiara sulla prima facciata del foglio *di bella*;

II) nelle pagine interne saranno riportati in modo chiaro e conseguente gli sviluppi formali e le eventuali osservazioni necessari a ottenere le risposte. N.B. queste pagine interne *non sono la brutta copia*

(1) L' Hamiltoniano di un sistema quantistico composto da due particelle identiche di spin 1/2 è

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 + \alpha \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

dove $\alpha = costante$, $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Determinare lo stato del sistema sapendo che l' energia vale esattamente $3\hbar\omega - (3/4)\alpha$ e il valor medio dell' osservabile $\mathcal{A} = (x_1 p_1 + p_1 x_1)/2 \cdot (x_2 p_2 + p_2 x_2)/2$ é zero.

(2) Due particelle identiche di spin 1/2 sono vincolate a muoversi sul segmento $-(L/2) < x < (L/2)$ con hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1) + V(x_2) + \frac{\gamma}{\hbar}(S_{1z} + S_{2z}),$$

dove $V(x) = 0$ se $-(L/2) < x < (L/2)$ e $V(x) = \infty$ altrimenti. $0 < \gamma < (\pi\hbar/L)^2/(2m)$, S_{1z} e S_{2z} sono le componenti secondo l' asse z dello spin delle due particelle. All' hamiltoniano del sistema si aggiunge il termine $\delta V = \lambda x_1 x_2 S_{1x} S_{2x}$. da considerare una piccola perturbazione: calcolare. al I ordine perturbativo, le correzioni ai primi tre livelli energetici del sistema imperturbato e discutere la degenerazione dei livelli.

Formulario. $2 \sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$

$\int x \sin(nx) dx = -(1/n) x \cos(nx) + (1/n^2) \sin(nx) + costante$

III prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica

II semestre dell' A.A. 1994-95 - 5 Giugno 1995

(1) Un gas classico é costituito da N particelle identiche, di massa m e senza spin. Le particelle non interagiscono tra di loro e sono vincolate a muoversi in un piano, all'interno di una circonferenza con centro nell' origine degli assi di riferimento e di raggio R. L' hamiltoniana di singola particella si scrive:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - A(x^2 + y^2), \qquad \text{con} \quad A > 0.$$

Il gas é in equilibrio alla temperatura T.

a) Calcolare l'energia media del gas e la pressione esercitata nei punti della frontiera.

b) Discutere i limiti di alta temperatura ($kT \gg AR^2$) e bassa temperatura ($kT \ll AR^2$) dei risultati precedenti.

(2) Si consideri un sistema composto da N fermioni indistinguibili, non interagenti tra loro; ciascuna particella ha a disposizione due livelli energetici ($H_1 = 0$ $H_2 = \epsilon$) e ogni livello ha degenerazione N.

a) Determinare il potenziale chimico e l'energia media del sistema, in funzione della temperatura e del numero di particelle.

b) Discutere i limiti di alta ($kT \gg \epsilon$) e bassa ($kT \ll \epsilon$) temperatura dell' energia media.

Prova di scritta di Istituzioni di Fisica Teorica

A.A. 1994-95 - Giugno 1995

(1) L' Hamiltoniana di singola particella di un gas perfetto, costituito da N particelle indistinguibili di massa m, vincolate a muoversi tra i piani $z = 0$ e $z = L$, è

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) \qquad (0 \leq z \leq L),$$

dove ω è una costante.

A) Assumendo che le particelle non abbiano spin, che il gas sia in equilibrio termodinamico alla temperatura T e possa considerarsi un gas classico, determinare:

i) la sua energia media,

ii) la sua densitá (numero di particelle per unitá di volume) $\rho(x, y, z)$.

B) Assumendo che le particelle siano fermioni di spin 1/2, determinare l'energia di Fermi.

C) Assumendo che le particelle siano bosoni di spin zero, dire se esiste la transizione di Bose e, nel caso affermativo, determinare la temperatura critica, lasciando indicati eventuali integrali adimensionali.

(2) Due particelle di massa m e spin 1/2, non interagenti tra loro, si muovono in una dimensione attratte verso l' origine del sistema di riferimento da un potenziale armonico; l' hamiltoniana del sistema è quindi

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2).$$

A) Determinare i valori dei primi due livelli energetici e la loro degenerazione, scrivendo le relative funzioni d' onda.

B) Se l' hamiltoniana delle particelle viene modificata aggiungendo un potenziale di interazione

$$V = \lambda \frac{m\omega^2}{\hbar^2}\, x_1 x_2\ \mathbf{S_1} \cdot \mathbf{S_2},$$

determinare, al primo ordine perturbativo in λ, le correzioni ai primi due livelli.

61

Prova di scritta di Istituzioni di Fisica Teorica

A.A. 1994/95 - 12 Settembre 1995

(1) Un gas, costituito da N fermioni identici, non interagenti tra loro e vincolati a muoversi in 2 dimensioni, è mantenuto allo zero assoluto. L' hamiltoniana di singola particella si scrive:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha \mathbf{r}^2$$

dove α è una costante positiva. Determinare:

a) l' energia di Fermi;

b) la massima distanza dall'origine (r_{max}) a cui puó trovarsi una particella;

c) la frazione media di particelle con $r \leq r_{max}/\sqrt{3}$.

(2) L' operatore hamiltoniano di un sistema quantistico a due livelli è:

$$H = \hbar\omega(e^{-i\phi}|1\rangle\langle 2| + e^{+i\phi}|2\rangle\langle 1|),$$

dove $|1\rangle$ e $|2\rangle$ sono due ket ortonormali, ω e ϕ due costanti ($\omega > 0$ e $0 \leq \phi < 2\pi$). Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema è $|\psi, t = 0\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$.

a) Determinare l'evoluzione temporale di $\langle A\rangle$ e di $\langle A^2\rangle$ - $\langle A\rangle^2$,
essendo $A = i\,(|2\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 2|)$.

b) Esistono valori di ϕ per i quali $|\psi, t\rangle$ diventa autostato di A per qualche t ?

62.

Istituzioni di Fisica Teorica - I prova di esonero

A.A. 1995-96 - 7 Novembre 1995

(1) L' hamiltoniana di una particella è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Determinare lo stato iniziale, $|\alpha, t = 0\rangle$, sapendo che:

a) una misura di energia dà certamente un valore minore di $3\hbar\omega$,

b) lo stato è autostato della parità con autovalore $+1$,

c) $\langle H \rangle = (7/6)\hbar\omega$,

d) $\langle x^2 \rangle_{t=0}$ è il massimo compatibile con le condizioni precedenti.

Determinare inoltre $|\alpha, t\rangle$ e $\langle x^2 \rangle_t$.

(2) Si consideri un sistema quantistico descritto dall' hamiltoniana:

$$H = E(|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|),$$

dove E è una costante positiva e i vettori $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ costituiscono una base ortonormale completa.

a) Determinare autoket e autovalori di H.

Si consideri inoltre l' osservabile

$$A = |1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|.$$

b) Determinarne gli autoket e gli autovalori.

Al tempo $t = 0$ lo stato del sistema, $|\alpha, t = 0\rangle$, è tale che una misura di A dà certamente il suo massimo autovalore.

c) Determinare $|\alpha, t\rangle$.

d) Esiste un valore di $t > 0$ tale che una misura di A dà con certezza uno degli altri autovalori ? In caso affermativo determinare t.

63

Prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
20-dicembre 1995

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si muove in uno spazio a tre dimensioni e la sua Hamiltoniana é:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 + \lambda\sqrt{\frac{\omega}{m\hbar}}\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}.$$

Determinare :

a) l'energia del livello fondamentale fino al II ordine in λ e la relativa degenerazione,

b) i corrispondenti ket fino al I ordine in λ

2) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ sono vincolate a muoversi sulla superfice di una sfera di raggio R.

La loro Hamiltoniana é:

$$H_0 = \frac{1}{2mR^2}\mathbf{L}_1^2 + \frac{1}{2mR^2}\mathbf{L}_2^2 + \frac{1}{mR^2}\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{S}_1 + \frac{1}{mR^2}\mathbf{L}_2\cdot\mathbf{S}_2.$$

Determinare:

a) le costanti del moto;

b) autovalori e autoket dell'hamiltoniana nel caso in cui $l_1 = l_2 = 1$.

Si consideri ora la perturbazione

$$\lambda V = \lambda\frac{1}{mR^2}(L_{1z}\cdot L_{2z}).$$

c) calcolare la correzione al I ordine in λ dell'energia di quelli tra gli stati discussi al punto (b) che sono autostati di J_z ($J_z = L_{1z} + S_{1z} + L_{2z} + S_{2z}$) con autovalore zero e hanno la massima energia.

64

Prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
12-gennaio-1996

1) Una particella si muove in uno spazio a una dimensione e la sua Hamiltoniana é:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

dove

$$V(x) = +\infty \quad x < -L/2$$

$$V(x) = \lambda \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad -L/2 < x < L/2$$

$$V(x) = +\infty \quad x > L/2$$

Determinare:
a) l'energia dello stato fondamentale fino al II ordine in λ
b) il ket corrispondente fino al I ordine in λ

2) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ e massa m si muovono in uno spazio a tre dimensioni sotto l'azione del seguente potenziale:

$$V(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = \frac{1}{2}\mathrm{k}|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^2(1 - \frac{2}{\hbar^2}\mathbf{S_1}\cdot\mathbf{S_2}) \qquad \mathrm{k} > 0$$

a) Determinare l'energia del livello fondanentale;
discutere la sua degenerazione e scrivere i relativi ket.

b)Determinare come si modificano le energie e le relative degenerazioni degli stati di cui al punto a) se si aggiunge all'interazione il termine

$$V' = \alpha(\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}) \cdot \mathbf{L}$$

dove $\mathbf{L}$ é il momento angolare del moto relativo e α é una opportuna costante.

65

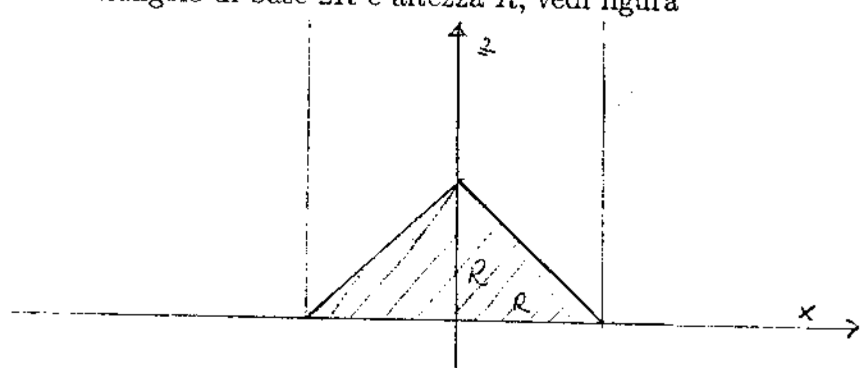
Prova di esonero di Istituzioni di Fisica Teorica
(2 - febbraio - 1996)

1) Cosideriamo due sfere concentriche, quella esterna di raggio R e quella interna di raggio variabile ρ. Nel sistema sono contenute N particelle non interagenti di massa m, N_1 nella corona sferica e N_2 nella sfera interna. L' hamiltoniana si singola particella è:

$$\frac{1}{2m}|\mathbf{p}|^2 + A|\mathbf{r}|^3,$$

dove $A > 0$. Sapendo che il sistema si comporta come un gas classico in equilibrio alla temperatura T determinare ρ in modo che sulla superfice della sfera interna ci sia equilibrio meccanico.

2) Si consideri un gas di particelle non interagenti di spin $1/2$ e massa m racchiuso nel seguente dominio bidimensionale: un rettangolo di base $2R$ e altezza infinita da cui è stato tolto un triangolo di base $2R$ e altezza R, vedi figura



L'hamiltoniana di singola particella è:

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz$$

Sapendo che il sistema è all'equilibrio allo zero assoluto e che nessuna particella supera la quota R, determinare:
a)il numero massimo, N_{max}, di particelle che possono essere contenute nel sistema;
b) il valore medio di z quando il sistema contiene N_{max} particelle.

66

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Teorica
13-febbraio-1996

1)Si consideri un oscillatore armonico tridimensionale isotropo di pulsazione ω e di spin 1/2. Determinare gli autovalori e gli autoket relativi ai primi due livelli della Hamiltoniana.

Si aggiunga ora alla Hamiltoniana il seguente potenziale:

$$V = i\frac{\omega}{4\hbar}(L_+S_- - L_-S_+)$$

a) Verificare che J_z è ancora una costante del moto.
b)Come si modificano gli autovalori e gli autoket precedentemente determinati?
c) Discutere la degenerazione dei livelli.

2)Si consideri un gas costituito da N particelle identiche, non interagenti, di massa m. Il Gas è confinato nel seguente dominio:

$$0 < z < \infty, \quad -L\sqrt{\sinh\frac{z}{L}} < x < L\sqrt{\sinh\frac{z}{L}}, \quad -L\sqrt{\sinh\frac{z}{L}} < y < L\sqrt{\sinh\frac{z}{L}}$$

ed è soggetto al seguente potenziale:

$$V(z) = V_0(\cosh\frac{z}{L} - 1)$$

dove $V_0 > 0$.
a) Nel caso di particelle di spin 1/2 determinare l'energia di Fermi.
b) Nel caso di particelle di spin 1 verificare che si presenta il fenomeno della condensazione di Bose e calcolare la temperatura critica (eventualmente in funzione di integrali adimensionali).