UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
" LA SAPIENZA "
Dipartimento di Fisica

ESAMI DI FISICA TEORICA

Autori Vari

Testi dal 1965...........

Servizio Fotostampa Dispense

Marzo 1999

199 / 3.100 VARI

€ 1600

ESAME SCRITTO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

3 giugno 1965

Meccanica analitica

1) Scrivere le equazioni di Hamilton e trovare una costante del moto per il problema di una pallina di massa m e di dimensioni trascurabili soggetta alla forza peso e vincolata a muoversi senza attrito sulla superficie di un cono di apertura α il cui asse è verticale (con la punta del cono in basso).

2) Trovare con il metodo di Hamilton-Jacobi le equazioni orarie per le tre coordinate di un oscillatore anisotropo. L'hamiltoniana di tale sistema è

$$H=(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/(2m)+(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^2)/2$$

e le condizioni iniziali sono

$$p_x(0)=p_y(0)=p_z(0)=0, \quad x(0)=y(0)=a, \quad z(0)=0.$$

Meccanica quantistica

3) Un elettrone è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,y,z) = N\,|x|^{1/2}\exp\left(-r^2+\sqrt{3}\,xy\right)$$

dove $r^2=x^2+y^2+z^2$ ed N è una costante di normalizzazione. Trovare la probabilità che nella misura della coordinata x dell'elettrone si ottenga un valore di modulo minore di 2.

4) Una particella vincolata su un segmento di lunghezza L ha per ipotesi un'energia che è certamente inferiore a $8\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$. Ad un certo istante la particella si trova in uno stato in cui è massima la probabilità di trovare la particella nella metà di destra del segmento. Quanto vale tale probabilità? Dopo quanto tempo la probabilità che la particella si trovi nella metà di destra è diventata, da massima che era, minima?

Meccanica Statistica

5) Consideriamo un sistema di 10^6 fermioni di massa 10^{-27} gr in un volume di 1 cm^3 termostatato a 0°K. Calcolare di quanto varia l'energia interna del sistema se lo si comprime in un volume di 0.125 cm^3. Di quanto varierebbe l'energia interna nel caso di un gas di Bose? E nel caso di un gas perfetto classico?

6) L'hamiltoniana di un rotatore tridimensionale è $L^2/(2I)$, dove L^2 è il modulo quadrato del momento angolare ed I è il momento di inerzia. Gli autovalori dell'operatore L^2 sono i valori $n(n+1)\hbar^2$ con n intero non negativo. A ciascun autovalore corrispondono 2n+1 autofunzioni indipendenti. Consideriamo un sistema di N rotatori quantistici cosiffatti in equilibrio termodinamico. Supponendo che N sia molto grande e che $I=1.6\ 10^{-40}$ gr cm^2 si trovi quale è il livello energetico più popolato alle seguenti temperature: -273°C, -270°C, -263°C, 0°C, 1000°C.

Relatività

7) A che velocità si muove un elettrone, inizialmente fermo, dopo essere stato accelerato da una differenza di potenziale di un milione di volt?

8) Due particelle di massa m_1 ed m_2 si urtano trasformandosi in altre due particelle di massa m_3 ed m_4. Quale deve essere l'impulso della particella 1 nel sistema del baricentro affinchè in tale sistema le particelle finali rimangano ferme ($m_1=10^{-24}$ gr, $m_2=m_3=3\cdot10^{-24}$ gr, $m_4=2\cdot10^{-24}$ gr).

Meccanica statistica

Si consideri un sistema di N oscillatori armonici unidimensionali uguali di massa M e costante di richiamo K.

Il volume dello spazio delle fasi (a 2N dimensioni!) corrispondente a un'energia minore o uguale di E è dato da

$$\text{a)} \qquad F(E) = 2^N \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{N}{2}} \frac{\pi^N E^N}{N!}$$

(proporzionale al volume di una sfera in 2N dimensioni).

1) Quanti stati quantici del sistema sono compresi tra E ed E+dE?

2) Calcolare il valore medio dell'energia in funzione della temperatura.

3) Dimostrare l'equazione a) (facoltativa).

Relatività

Una particella di massa m_1 urta una particella di massa m_2 ferma nel sistema del laboratorio.

L'interazione tra le due particelle è tale che, in certe condizioni, esse possono legarsi per formare una particella di massa $m_3 > m_1+m_2$.

Quale deve essere la velocità V della particella incidente affinchè la formazione del sistema legato sia energeticamente possibile? Qual'è la velocità di m_3 alla soglia (cioè quando V è appena sufficiente) nel sistema del laboratorio?

PROVA SCRITTA DEL CORSO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
Sessione Autunnale 1969
A.A. 1968-69

9 ottobre 1969
Tutti gli indirizzi

I candidati dovranno svolgere due esercizi su tre, su fogli separati. Indicare chiaramente nome, cognome, numero di matricola e indirizzo.

1. - Una particella libera di massa M [illegible], costretta nel rettangolo

$$0 \le x \le L_1 , \quad 0 \le y \le L_2$$

è descritta al tempo t = 0 dalla funzione d'onda:

$$\psi(x,y) = c\left(\operatorname{sen}\alpha \ \operatorname{sen}\frac{n_1\pi x}{L_1} + \cos\alpha \ \operatorname{sen}\frac{m_1\pi x}{L_1}\right) \cdot \left(\operatorname{sen}\beta \ \operatorname{sen}\frac{n_2\pi x}{L_2} + \cos\beta \ \operatorname{sen}\frac{m_2\pi x}{L_2}\right) \qquad (1)$$

c costante di normalizzazione

$n_1 = 1 \qquad m_1 = 3 \qquad \alpha = 30°$

$n_2 = 2 \qquad m_2 = 4 \qquad \beta = 45°$

1° Confrontare la (1) con la espressione generale della autofunzione dell'hamiltoniana del sistema.

2° Calcolare nello stato (2) i risultati possibili della misura della energia della particellla e le relative probabil[illegible].

2. - Consideriamo una particella di spin ½; Detto $\vec{L}$ l'operatore di momento angolare ed S l'operatore di spin si definisce

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

l'operatore momento angolare totale.

Siano $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ le autofunzioni di L^2 ed L_z di autovalori $\hbar^2\ell(\ell+1)$ ed $\hbar m$ rispettivamente:

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$
$$L_z Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

e χ_s le autofunzioni di S_z (S^2 per una particella di spin ½ ha sempre autovalore $\frac{3}{4}\hbar^2$) con autovalori $\pm\frac{\hbar}{2}$:

$$S_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+ =$$
$$S_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_- =$$

A.A. 1967-68
ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
(Tutti gli incarichi)
6.11.68

AVVERTENZA - RISOLVERE OGNI ESERCIZIO SU UN FOGLIO SEPARATO CONTRASSEGNATO DA NOME, MATRICOLA E INDIRIZZO DI LAUREA. SI RICORDA CHE NON E' CONSENTITO CONSULTARE LIBRI O APPUNTI.

QUANTISTICA -

1) Calcolare la energia cinetica media e la energia potenziale media nel livello fondamentale di un oscillatore armonico unidimensionale (forza di richiamo $-KX$, $K=4\cdot 10^{-54}$, $m=10^{-24}$, unità C.G.S.).

2) Al tempo $t=0$ una particella in moto unidimensionale di massa m è descritta dalla funzione d'onda
$$\psi(x,t=0) = A \exp\left[\frac{-x^2}{2a^2}\right]$$
Supponendo che sulla particella non agiscono forze, determinare la funzione d'onda (normalizzata) al tempo t.

Suggerimento: assumere che la funzione d'onda al tempo t abbia la forma
$$\psi(x,t) = N e^{-\alpha(t)x^2-\beta(t)}$$
e sostituirla nella eq. temporale di Schödinger
$$H\psi = +i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

STATISTICA -

1) Un cilindro cavo di alluminio di altezza H e raggio R e pieno di un gas monoatomico classico (massa delle molecole: m). Il cilindro e il gas ruotano con velocità angolare ω costante, intorno all'asse del cilindro: il sistema è in equilibrio a temperatura T. Sia M la massa del gas, e si assuma trascurabile la massa del cilindro.

   1) Calcolare la densità del gas in funzione del raggio, $\rho(r)$.
   2) Discutere il limite del risultato per $\omega\to 0$.
   3) Calcolare il momento di inerzia del sistema (intorno all'asse di rotazione).

FORMULARIO
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Elemento di volume in coordinate cilindriche
$$dV = d\varphi\ \ r dr\ dh$$

Date le seguenti funzioni d'onda complessive che descrivono lo stato della particella

$$Z_1 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_+ + \tfrac{1}{\sqrt{3}} Y_{11}(\theta,\varphi)\chi_-$$

$$Z_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\, Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_+ + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, Y_{11}(\theta,\varphi)\chi_-$$

1) Dimostrare che Z_1 e Z_2 sono ortogonali

2) Dimostrare che Z_1 e Z_2 sono autofunzioni dell'operatore

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S}$$

e determinare i rispettivi autovalori.

3) Determinare il valor medio di L_z e la probabilità P_1 di trovare il valore $m = 1$ per L_z negli stati descritti da Z_1 e Z_2

4) Data la funzione d'onda

$$U(\theta,\varphi) = Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_+$$

determinare qual'è la probabilità di trovare per J^2 il valore $\frac{15}{4}$

<u>FACOLTATIVA</u>

5) Scrivere la funzione d'onda complessiva dello stato della particella tale che una misura di L_x dia con certezza $\hbar$ e una misura di S_x dia con certezza $\hbar/2$. In tale stato quanto vale J_x ?

3. - Una particella di massa M è sottoposta all'azione di un potenziale armonico di costante di richiamo K. Il problema è unidimensionale. All'istante iniziale (t = 0) il sistema è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,0) = A x^3 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

con A costante di normalizzazione

Calcolare, al tempo t = 0

1) $\langle \psi\, \pi\, \psi \rangle$, valor medio della parità
2) $\langle \psi\, p\, \psi \rangle$, valor medio dell'impulso
3) $\langle \psi H \psi \rangle$, valor medio dell'energia
4) Calcolare quale è la funzione d'onda all'istante generico t
5) Calcolare a quell'istante i valori medi delle grandezze π , p H

$\langle \psi\, \pi\, \psi \rangle_t$, $\langle \psi\, p\, \psi \rangle_t$, $\langle \psi\, H\, \psi \rangle_t$

NOTA - Le domande relative a $\langle \psi\, \pi\, \psi \rangle$ in 1) e 5) possono essere sostituite dalla seguente:

1' Ha la funzione ψ una parità definita al tempo t = 0, e qual Ed al tempo t generico?

FORMULARIO

Equazione di Schrödinger $H\psi = E\psi$

Autofunzioni dell'oscillatore armonico

$$\psi_n(\xi) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad ; \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$H_n(\xi)$: polinomi di Hermite

$H_0(\xi) = 1$

$H_1(\xi) = 2\xi$

$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$ ecc.

Autofunzioni di una particella su un segmento $0 \mapsto L$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \text{sen}\, \frac{n\pi x}{L} \qquad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ML^2} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Operatori e autofunzioni del momento angolare e di spin

$$L_x Y_{11} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} Y_{10} \; , \; L_x Y_{1-1} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} Y_{10} \; , \; L_x Y_{10} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(Y_{11} + Y_{1-1} \right)$$

$$S_x \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_- \; , \; S_x \chi_- = \frac{\hbar}{2} \chi_+ .$$

$$L_y Y_{11} = +i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} Y_{10} \; , \; L_y Y_{1-1} = -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}} Y_{10} \; , \; L_y Y_{10} = \frac{\hbar}{2} \left(-i Y_{11} + i Y_{1-1} \right)$$

$$S_y \chi_+ = i\frac{\hbar}{2} \chi_- \; , \; S_y \chi_- = -i\frac{\hbar}{2} \chi_+$$

PROVA SCRITTA DIE SAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

10/10/70

- Risolvere due problemi a scelta dei tre proposti ognuno su un foglio separato (indicare su ogni foglio l'indirizzo di studio).
- Consegnare bella e brutta copia in modo da poter controllare i calcoli effettuati.
- E' permessa la consultazione di testi.

Esercizio n. 1

Una particella di spin ½ in campo centrale, di Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + U(r) \tag{1}$$

si trova in un autostato di H_0 di autovalore $E^{(0)}$ descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_1 = f(r)\, Y_{10}(\theta,\varphi)\, \chi_+ \quad ; \quad \int_0^\infty |f(r)|^2 r^2 dr = 1 \tag{2}$$

dove $Y_{10}(\theta,\varphi)$ è l'autofunzione del momento angolare orbitale L^2 e della sua componente L_z di autovalore $\ell=1$ ed $m=0$ rispettivamente, e χ_+ è l'autofunzione della componente S_z dello spin di autovalore $\frac{\hbar}{2}$.

In presenza di un potenziale aggiuntivo

$$\lambda V = \lambda \vec{L}\cdot\vec{S} \tag{3}$$

l'Hamiltoniana totale diventa

$$H = H_0 + \lambda V$$

Le autofunzioni esatte di H si possono classificare come autofunzioni simultanee di H_0, L^2, J^2 e J_z essendo

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

a) Perché?

b) Scrivere gli autovalori esatti di H in funzione degli autovalori di H_0, J^2, L^2.

c) La funzione d'onda (2) si può scrivere come combinazione lineare di due autofunzioni esatte di H.

Scrivere questa combinazione lineare e determinare i due autovalori di H corrispondenti a tali autofunzioni;

d) Esiste un'altra autofunzione di H_0 che corrisponde allo stesso autovalore $E^{(0)}$ al quale corrisponde la ψ_1 .

Essa è

$$\psi_2 = f(r)\, Y_{11}(\vartheta,\varphi)\,\chi_-$$

La ψ_2 si può scrivere come combinazione lineare indipendente delle stesse autofunzioni esatte di H che compaiono nell'espressione trovata per la ψ_1. Assumendo ψ_1 e ψ_2 come funzioni d'onda imperturbate e degeneri calcolare assumendo come potenziale perturbatore λV con la teoria delle perturbazioni al 1° ordine in λ (caso degenere) la correzione ad E_0.

e) Confrontare i valori trovati con gli autovalori esatti delle autofunzioni di H che compaiono nelle espressioni di ψ_1 e ψ_2.

Discutere il risultato.

<u>Esercizio 2°</u>

Si consideri un rotatore rigido, descritto da l'Hamiltoniana

$$H = \frac{L^2}{2I} + g\, f(t)\, L_z$$

dove L^2 , L_z sono gli usuali operatori di momento angolare, g una costante e $f(t)$ un'opportuna funzione reale del tempo.

Si chiede:

a) descrivere l'equazione che governa l'evoluzione del sistema;

b) utilizzando il metodo della separazione delle variabili, risolvere l'equazione;

c) al tempo t=0, la funzione d'onda del sistema è $\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{10} + Y_{20})$.

Descrivere la evoluzione del sistema.

<u>Esercizio 3°</u>

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sulla superficie di un cilindro di raggio unitario, con l'asse coincidente con l'asse z. Essa è sottoposta all'azione di un potenziale $V(z,\varphi) = \frac{k}{2} z^2$, indipendente da φ .

1) Scrivere l'hamiltoniana del sistema e verificare che l'eq. di Schrödinger è separabile nelle coordinate z e φ .

2) Sapendo che le autofunzioni di H sono del tipo

$$\psi_{n\ell}(z,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) e^{i\ell\varphi} \qquad \begin{array}{l} n = 0,1,2\ldots \\ \ell = \ldots -1,0,1\ldots \end{array}$$

$H_n(\xi)$ polinomi di Hermite

N_n costante di normalizzazione.

Calcolare gli autovalori dell'energia e determinarne l'eventuale degenerazione.

3) Supponendo che all'istante $t=0$ la particella sia descritta dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(\xi,\varphi,t=0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} A e^{-\xi^2/2}(1+\xi)(e^{i\varphi}+e^{2i\varphi})$$

(A costante di normalizzazione)

Calcolare:

a) il valor medio dell'energia;

b) il valor medio del momento angolare;

c) la probabilità che la particella si trovi nella regione della superficie del cilindro definita da

$$z \geq 0 \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$$

d) dopo quanto tempo sarà massima la probabilità di trovare la particella nella regione $\quad z \leq 0 \quad +\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{3\pi}{2}$?

Per sviluppare i calcoli si assuma in questo caso,

$$\frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar^2}{2m} = \varepsilon$$

FORMULARIO:

Autofunzioni di J^2, J_z, L^2:

$$J^2 Z^{\ell}_{j j_z} = \hbar^2 j(j+1) Z^{\ell}_{j j_z}$$

$$J_z Z^{\ell}_{j j_z} = \hbar j_z Z^{\ell}_{j j_z}$$

$$L^2 Z^{\ell}_{j j_z} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Z^{\ell}_{j j_z}$$

$$Z^{1}_{3/2\,1/2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, Y_{10}(\theta,\varphi)\,\chi_+ + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, Y_{11}(\theta,\varphi)\,\chi_-$$

$$Z^{1}_{1/2\,1/2} = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\, Y_{10}(\theta,\varphi)\,\chi_+ + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, Y_{11}(\theta,\varphi)\,\chi_-$$

Teoria delle perturbazioni (caso degenere) correzione al primo ordine dell'energia:

$$E = E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \dots$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} - E^{(1)} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

$$V_{ij} = \int \psi_i^{(0)*}\, V\, \psi_j^{(0)}\, d\tau \qquad i,j = 1,2$$

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (ind. generale)
del 6.4.71

Risolvere due problemi a scelta dei tre proposti ognuno su un foglio separato (indicare su ogni foglio l'indirizzo di studio).

- Consegnare bella e brutta copia in modo da poter controllare i calcoli effettuati.
- E' permessa la consultazione di testi.

Esercizio n°1

Si consideri una particella di massa m sottoposta al potenziale:

$$V(x) = \infty \qquad x \leq 0$$
$$V(x) = \frac{1}{2} K x^2 \qquad x > 0$$

Si chiede:

a) Lo stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi_1 = A x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

è soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria? Con quale autovalore dell'energia?

b) Esiste uno stato di energia minore?

c) Lo stato descritto dalla ~~frazione~~ funzione d'onda

$$\psi_2 = B x^3 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

è autofunzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria?

d) Scrivere l'evoluzione temporale della funzione d'onda a $t = 0$

$$\psi(x, 0) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

e) Descrivere gli autostati dell'Hamiltoniana e discutere la completezza.

Esercizio n°2

Due oscillatori armonici unidimensionali di massa m e frequenze ω_1 ed ω_2 sono accoppiati tramite il potenziale $V = g x_1 x_2$:

a) scrivere l'hamiltoniana del sistema

b) trovare la trasformazione lineare unitaria che disaccoppia i due oscillatori

c) calcolare i livelli energetici del sistema

Esercizio n°3

Una particella si trova in uno stato tale che il quadrato del momènto angolare totale è definito e vale $2\hbar^2$. Una misura di L_z dà invece i valori $\hbar$, 0, $-\hbar$ con probabilità rispettivamente

$$P_1 = \frac{1}{16} \quad , \quad P_0 = \frac{9}{16} \qquad P_{-1} = \frac{3}{8}$$

Si domanda:

a) Esiste una direzione $\vec{\xi}$ tale che la componente L_ξ del momento angolare in questa direzione dia con certezza il valore zero? In caso affermativo discutere la eventuale determinazione della direzione ξ.

b) Esiste una direzione $\vec{\eta}$ tale che la componente L_η del momento angolare in questa direzione dia con certezza il valore $\hbar$? In caso affermativo discutere la eventuale determinazione della direzione η.

c) Nel caso che la determinazione di tali direzioni non sia possibile completamente con i dati forniti inizialmente che altre misure fareste per determinare completamente gli angoli che le definiscono?

FORMULARIO

La componente L_ξ di $\vec{L}$ nella direzione $\vec{\xi}$ è data da

$$L_\xi = \cos\alpha\, L_x + \cos\beta\, L_y + \cos\gamma\, L_z$$

dove $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sono i coseni direttori della direzione $\vec{\xi}$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si suggerisce di descrivere lo stato con il vettore colonna

$$\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \sqrt{p_2}\, e^{i\varphi} \\ \sqrt{p_{-1}}\, e^{i\chi} \end{pmatrix}$$

Le autofunzioni dell'oscillatore armonico unidimensionale sono

$$\psi_n(x) = N_n\, e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \qquad \text{con} \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$H_0 = 1$$
$$H_1 = 2\xi$$
$$H_2 = 4\xi^2 - 2$$
$$H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$$

e gli autovalori corrispondenti sono

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$$

ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

11 giugno 1973

1) Una particella di massa m, vincolata a restare sul segmento O-L dell'asse x è descritta al tempo t=0 dalla funzione d'onda normalizzata

$$\psi(x,0) = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin\frac{2\pi x}{L} \cos\frac{\pi x}{L}$$

Calcolare, in funzione del tempo, la densità di probabilità nel punto di mezzo del segmento x=L/2.

2) Un rotatore quantistico di momento d'inerzia $\mathcal{J}$ è descritto dall'hamiltoniana

$$M = \frac{L^2}{2J} + gL_z \mathcal{H}$$

dove $\mathcal{H}$ è la componente z di un campo magnetico e gL_z è il momento magnetico del rotatore. All'istante t=0 il rotatore si trova in un autostato di L^2 con autovalore $\hbar^2 2$ e in un autostato di $\frac{1}{\sqrt{2}}(L_x+L_z)$ con autovalore $+\hbar$.

Si calcoli il valor medio dell'energia e il valor medio di L_x in funzione del tempo.

3) L'Hamiltoniana di un sistema di due particelle identiche di massa m è la seguente:

$$(1) \qquad H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

Introducendo la coordinata del baricentro R e la coordinata relativa r mediante le relazioni

$$\frac{x_1+x_2}{2} = R \qquad x_1-x_2 = r$$

si possono scrivere le seguenti due funzioni d'onda del sistema

$$\psi_1 = N_1 e^{-(R^2 + r^2/4)\frac{m\omega}{\hbar}} \; ; \quad \psi_2 = N_2 e^{-(R^2 + r^2/4)\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot r \; ;$$

a) Determinare a quale tipo di particelle identiche (bosoni o fermioni) appartengono le due funzioni d'onda ψ_1 e ψ_2 (nel caso dei fermioni si trascura lo spin).

b) Verificare se le due funzioni d'onda ψ_1 e ψ_2 siano autofunzioni dell'Hamiltoniana (1) e, nel caso affermativo, a quali autovalori corrispondano.

Formulario

Autofunzioni di una particella su un segmento 0-L e relativi autovalori.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2mL^2} \cdot n = 1, 2, 3 \ldots$$

Autofunzioni ed autovalori dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\psi_n(\xi) = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$H_0 = 1$$
$$H_1 = 2\xi \qquad E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$
$$H_2 = 4\xi^2 - 2$$

Armoniche sferiche normalizzate

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{i\varphi}$$
$$Y_{10} = +\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$
$$Y_{1,-1} = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta\, e^{-i\varphi}$$

Operatori del momento angolare per $\ell = 1$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_+ = L_x + iL_y \qquad L_- = L_x - iL_y$$

$$L_\pm Y_{\ell,m} = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)}\; Y_{\ell,m\pm 1}$$

TERZA PROVA D'ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (2° Semestre)

del 16/6/76 - A.A. 1975-76

1) Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω ha al tempo t = 0 la seguente funzione d'onda

$$\psi(x,0) = \psi_0(x) = N\,(1+\alpha x)\,e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

ove $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ e N è una costante di normalizzazione.

Calcolare

1) i possibili risultati di una misura dell'energia e le relative probabilità;
2) l'espressione $\psi(x,t)$ della funzione d'onda a un istante $t \neq 0$.

2) Calcolare il valor medio dell'operatore $e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_z}$ nello stato

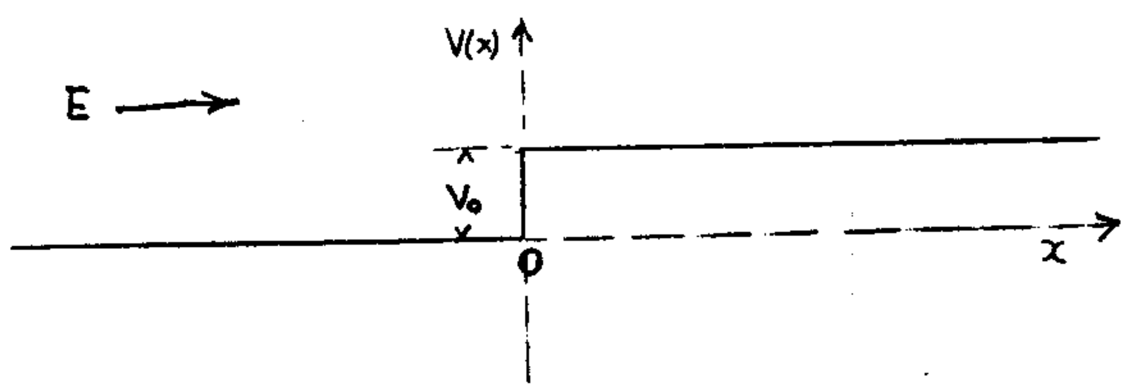
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

PROVA SCRITTA D'ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 24/6/76

2° Semestre - A.A. 1975-76 - Sessione estiva

1. Un rotatore di momento d'inerzia I possiede un momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{L}$. In assenza di un campo magnetico, l'hamiltoniana che descrive il sistema è $H_0 = L^2/2I$.
All'istante $t=0$ la funzione d'onda del rotatore è $\psi(\theta,\varphi) = N \sin\theta \cos\varphi$ ove N è una costante di normalizzazione.
Calcolare il valore medio di L_z.
Ponendo il rotatore in un campo magnetico $\vec{B}$ omogeneo e costante diretto lungo l'asse z, scrivere la nuova hamiltoniana del sistema e ricavare l'espressione della funzione d'onda a un tempo $t \neq 0$.

2. Una particella con energia E che si muove lungo l'asse x incide da sinistra su di un gradino di potenziale di altezza Vo, con $V_0 < E$.
Quale deve essere il rapporto $\frac{E}{V_0}$ affinchè il rapporto tra il coefficiente di trasmissione e quello di riflessione risulti $\frac{T}{R} = \frac{16}{9}$?



PRIMO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

13 DICEMBRE 76 - A.A. 1976-77

(1° Semestre - Corso Prof. Maiani)

1. Per trasformazioni adiabatiche reversibili (e cioè con $đQ=0$ ovvero S = entropia = costante) un gas perfetto segue la legge:

$$pV^{\gamma} = cost$$

Mostrare che:

a) $\gamma = 5/3$ per un gas monoatomico classico;

b) $\gamma = 4/3$ per il gas di fotoni (corpo nero);

c) $\gamma = 5/3$ per un gas monoatomico quantistico, sia nel caso Bose-Einstein che nel caso Fermi-Dirac, a qualunque temperatura.

2. Sia dato un gas formato da particelle indistinguibili che godono della seguente proprietà: in ogni stato K di energia fissata (ϵ_K) possono esserci o zero particelle o due particelle (Nota bene: nel caso Fermi-Dirac, possono esserci o zero o una particella).

a) Calcolare la somma di partizione dell'insieme gran canonico, e il numero medio di particelle in ogni stato di energia ϵ_K.

b) (Facoltativo) Mostrare che è ancora valida la legge:

$$pV = \frac{2}{3} U \quad \begin{array}{l}(U = \text{energia media};\\ p = \text{pressione};\\ V = \text{volume})\end{array}$$

III^ PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

(Corso del Prof. Ferrari) A.A. 1976-77

1°. Una particella di massa infinita e spin $\frac{1}{2}$ si trova all'istante $t=0$ in uno stato in cui la probabilità di osservare la componente dello spin lungo la direzione positiva dell'asse z è $\frac{1}{4}$ e lungo la direzione negativa è $\frac{3}{4}$. Questa informazione determina lo stato a meno di un parametro.

La particella è sottoposta a un campo magnetico $\vec{B}$ costante e uniforme diretto lungo l'asse x. Si chiede

a) di scrivere l'espressione dello stato iniziale (includente un parametro indeterminato).

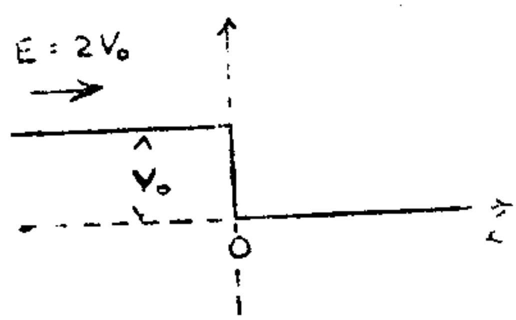
b) di scrivere l'hamiltoniana del sistema (l'operatore momento magnetico della particella è $\vec{\mu} = \gamma\vec{\sigma}$).

c) di scrivere l'espressione dello stato (sempre contenente un parametro indeterminato) in funzione del tempo.

d) di determinare per quali valori del parametro accade che la funzione d'onda a un certo istante di tempo si riduce a un autostato di σ_z, e trovare a quali tempi ciò accada.

2°. Un fascio di particelle di massa m e energia 2Vo incide da sinistra sul gradino di potenziale indicato in figura.

Determinare il coefficiente di riflessione R e il coefficiente di trasmissione T, e dare una valutazione numerica in percentuale [anche approssimata] di tali quantità.



II PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

A.A. 1976-77 - 26/1/77

(Corso Prof. Maiani)

1. - Una particella libera di massa m si trova al tempo t=0 nello stato descritto dalla funzione d'onda (a^2, reale, > 0):

$$\psi(x,0) = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}$$

a) Calcolare la funzione d'onda $\psi(x,t)$ al tempo t

b) Calcolare il valor medio di x al tempo t

$$\langle x(t)\rangle = (\psi(t),\ x\,\psi(t))$$

c) Calcolare il valor medio di x^2 al tempo t : $\langle x^2(t)\rangle =$

$$= (\psi(t),\ x^2\,\psi(t))$$; per riferimenti si osservi che $\langle x^2(0)\rangle = a^2$)

d) Calcolare il valor medio di p^2 al tempo t :

$$\langle p^2(t)\rangle = (\psi(t),\ p^2\,\psi(t))$$

Si ricordano le formule integrali:

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ay^2-By} = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} e^{\frac{B^2}{4A}}$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-Ay^2} = \frac{1}{2A}\left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2}$$

valide per A,B complessi, purchè sia ReA > 0.

2. - Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale, di massa m e frequenza ω, con hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

a) Mostrare che il valor medio dell'energia cinetica e dell'energia potenziale nello stato di minima energia, ψ_0, sono uguali:

$$(\psi_0, T\psi_0) = (\psi_0, V\psi_0) = \frac{1}{2} E_0 = \frac{\hbar\omega}{4}$$

$$T = \frac{p^2}{2m}, \quad V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

b) Mostrare che per qualsiasi altro stato di energia definita, ψ_n, ($E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$) si ha similmente:

$$(\psi_n, T\psi_n) = (\psi_n, V\psi_n) = \frac{1}{2} E_n$$

Si ricordi che: $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \psi_0$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (P + i m\omega x)$$

$$[a, a^+] = 1$$

In alternativa agli esercizi 1 o 2, può essere svolto il solo seguente esercizio.

1'. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω, e sia ψ_λ lo stato (stato coerente):

$$\psi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda)^n (a^+)^n \psi_0$$

(λ = numero complesso fissato).

a) mostrare che $(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = e^{\lambda^* \lambda}$

b) definito uno stato φ_λ normalizzato: $\varphi_\lambda = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} \psi_\lambda$

mostrare che, se

$$\psi(x,0) = \varphi_\lambda$$

allora

$$\psi(x,t) = e^{-i\frac{\omega}{2}t} \varphi_{\lambda(t)}$$

dove:

$$\lambda(t) = e^{-i\omega t} \lambda$$

c) mostrare che:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\varphi_{\lambda(t)}, T\varphi_{\lambda(t)})dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\varphi_{\lambda(t)}, U\varphi_{\lambda(t)})dt$$
$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(|\lambda|^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\varphi_\lambda, H\varphi_\lambda)$$

se τ è il periodo classico di oscillazione:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

e T = energia cinetica
U = energia potenziale

3° COMPITO ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 24/3/77 - A.A.1976/77 (L. MAIANI)

1. Siano date le funzioni d'onda angolari:

$$\Psi_1(\theta,\varphi) = N_1 \sin\theta \cos\varphi$$
$$\Psi_2(\theta,\varphi) = N_2(1 + \cos\theta)$$
$$\Psi_3(\theta,\varphi) = N_3 \cos\theta$$

a) Esprimere Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 come combinazioni lineari delle autofunzioni del momento angolare ($\Psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$; $\Psi_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{i\varphi} \sin\theta$; $\Psi_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$; $\Psi_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{-i\varphi} \sin\theta$) e determinare i coefficienti (reali e positivi) N_1, N_2 ed N_3 in modo che:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |\Psi_1|^2 \sin\theta \, d\theta = 1$$

e analogamente per Ψ_2 e Ψ_3.

b) Quali tra Ψ_1, Ψ_2 e Ψ_3 sono autofunzioni di L_z e con che autovalori? quali sono autofunzioni di L^2 e con che autovalori?

$$(L_z = - i \frac{\partial}{\partial\varphi} \; ; \; L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)$$

2. Siano date le funzioni d'onda del momento angolare $\Psi_{1,1}$ e $\Psi_{1,-1}$:

$$L_z \Psi_{1,1} = + \Psi_{1,1} \qquad L_z \Psi_{1,-1} = - \Psi_{1,-1}$$
$$L^2 \Psi_{1,2} = 2 \Psi_{1,1} \qquad L^2 \Psi_{1,-1} = 2 \Psi_{1,-1}$$

e l'hamiltoniana

$$H = AL_z + \tfrac{1}{2} BL^2 \qquad (1)$$

a) Posto

$$\psi(t) = \alpha(t)\,\psi_{1,1} + \beta(t)\,\psi_{1,-1}$$

determinare $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ dell'equazione di Schroedinger, con l'hamiltoniana (1), per fissate condizioni iniziali $\alpha(t=0) = \alpha_0$, $\beta(t=0) = \beta_0$.

b) Posto

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{1,1} \pm \psi_{1,-1}\right)$$

Se al tempo t=0, $\psi(0) = \psi_+$ dopo quanto tempo $\psi(t)$ sarà proporzionale a ψ_- ?

(Facoltativo)

c) Definita un'osservabile tale che:

$$F\,\psi_+ = \psi_+$$

$$F\,\psi_- = 0$$

e considerato lo stato $\psi(t)$ tale che $\psi(0) = \psi_+$, calcolare:

$$F(t) = \big(\psi(t),\, F\,\psi(t)\big)$$

e mostrare che

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 6/7/1977

Prof. E. Ferrari

Sessione Estiva, A.A. 76-77

1) Una particella, vincolata sul segmento $0 \leq x \leq L$, all'istante $t=0$ si trova in uno stato in cui una misura di energia può fornire, con uguale probabilità, solo due valori: il valore più basso E_1 e quello immediatamente superiore $E_2=4E_1$.

   a) Scrivere l'espressione della funzione d'onda normalizzata (contenente un parametro arbitrario).

   b) Determinare tale parametro sapendo che all'istante $t=0$ il valor medio dell'impulso della particella è $\bar{p}=+\frac{4}{3}\frac{\hbar}{L}$.

   c) Determinare qual'è l'istante di tempo successivo a $t=0$ in cui il valor medio dell'impulso assume per la prima volta il valore zero.

2) Due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$, non interagenti tra loro, sono vincolate a muoversi su una superficie sferica di raggio costante, in modo che i soli gradi di libertà sono quelli angolari e di spin. Tra tutti gli stati accessibili al sistema delle due particelle, determinare quanti sono gli stati che soddisfano le seguenti proprietà:

   1) Sono autostadi sia di L_z che di S_z ($\vec{L} = \vec{L}^{(1)}+\vec{L}^{(2)}$; $\vec{S} = \vec{S}^{(1)}+\vec{S}^{(2)}$, ove gli indici (1) e (2) si riferiscono alle singole particelle).

   2) i numeri quantici $\ell^{(1)}$ e $\ell^{(2)}$ relativi ai momenti angolari delle due particelle valgono o 0 o 1;

   3) la configurazione dello spin totale è in uno stato di tripletto (cioè gli stati sono anche autostati di S^2 con $S=1$).

   Scrivere la funzione d'onda di uno di tali stati, scelto a piacere, e discutere quali sono gli autovalori di L_z che possono essere ottenuti.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 20/7/1977 - A.A. 1976-77

1) Sia dato un oscillatore armonico unidimensionale, con hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

a) calcolare, nel caso classico, la funzione di partizione Z dell'ensemble canonico, l'energia media U e il calore specifico a frequenza costante, $C = (\partial U/\partial T)_\omega$ verificando il teorema dell'equipartizione dell'energia.

b) Sapendo che, nel caso quantistico, lo spettro dell'energia è:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e che ad ogni n corrisponde un solo stato, calcolare nuovamente, nel caso quantistico, Z, U e C.

c) In che limite per la temperatura T, l'energia media e il calore specifico del caso (b) tendono ai limiti classici calcolati in (a)?
Al contrario, in che regione di T, si hanno deviazioni dal caso classico?

d) (facoltativo) Nella regione di T in cui gli effetti quantistici sono rilevanti, C quantistico $<$ C classico.
Sapeste darne una spiegazione intuitiva?

2) Una particella quantistica senza spin viene preparata nello stato corrispondente alla funzione d'onda:

$$\psi = \chi(r)\,\frac{x}{r}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

dove $\chi(r)$ è un'opportuna funzione d'onda radiale normalizzata in modo che $\int |\chi|^2 r^2 dr = 1$

a) quali risultati dà, sullo stato ψ una misura di L_z e con che possibilità?
(L_z = componente z del momento angolare, in unità di $\hbar$)

b) quali risultati dà una misura di L_x, e con che probabilità?

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DELL'11/10/77

A.A. 1976-77

N.B. Gli studenti del corso del Prof. Maiani svolgeranno gli esercizi 1 e 2; quelli del corso del Prof. Ferrari svolgeranno gli esercizi 2 e 3.

1) Sia $p_F = |\vec{p}_F|$ l'impulso massimo tra quelli degli stati occupati da un gas di elettroni (considerato come gas perfetto di Fermi) allo zero assoluto, e sia $E_F = p^2_F/2m$ la corrispondente energia massima.

(a) Dimostrare che l'energia media per elettrone è

$$\bar{E} = \frac{3}{5} E_F$$

(b) Dimostrare che il valor medio del modulo dell'impulso, $\bar{p}$, è dato da

$$\bar{p} = \frac{3}{4} p_F$$

(c) Confrontare questo valore di $\bar{E}$ con quello che si otterrebbe per un gas che obbedisse alla statistica di Bose o alla statistica classica e discutere la ragione fisica della differenza.

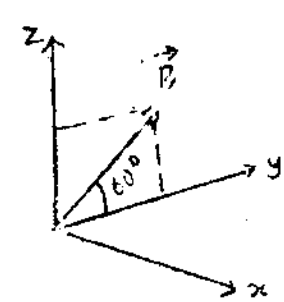
2) Sia data una particella vincolata nel piano (x,y), cioè descritta da una funzione d'onda $\psi(x,y)$, e soggetta ad una forza di richiamo elastica diretta verso l'origine, $F = -m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$, dove m è la massa della particella ed ω una frequenza caratteristica.

(a) Scrivere l'equazione di Schrödinger per la particella, e determinarne gli autovalori dell'energia.

(b) Consideriamo l'operatore $L_z = xp_y - yp_x$. Dimostrare che lo stato fondamentale della particella è un autostato di L_z, e determinarne l'autovalore.

3) Una particella di massa infinita, avente spin $\frac{1}{2}$ e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{\sigma}$, è, al tempo $t=0$, in un autostato di s_z con autovalore $-\frac{1}{2}\hbar$.

La particella è sottoposta a un campo magnetico costante di intensità B giacente nel piano yz e formante un angolo di 60° con l'asse y (vedi figura)



Si chiede

(a) di scrivere l'hamiltoniana del sistema;

(b) quali sono i possibili risultati di una misura dell'energia, e le relative probabilità,

(c) dopo quanto tempo il sistema, nella sua evoluzione temporale, ritorna nello stato iniziale.

COMPITO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

0|77 ~~[illegible]~~

1) Si abbia una particella con momento angolare $L=0$ in una buca di potenziale sferica, cioè $V(r)=0$ per $r > a$, $V(r)=-V_0$ per $r < a$. Determinare le autofunzioni e gli autovalori dell' Hamiltoniana.

2) Si abbia una particella vincolata a stare su un segmento di lunghezza L descritta dalla seguente autofunzione:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \pi \frac{x}{L} \qquad 0 < x < L$$

Determinare la distribuzione di probabilità dell'impulso e il valor medio dell'impulso.

3) Si abbia un elettrone di spin $\frac{1}{2}$ immerso in un campo magnetico diretto lungo l'asse z H_z, se inizialmente l'elettrone è in autostato di S_y con autovalore $+\hbar\frac{1}{2}$ determinare la probabilità che dopo un tempo t abbia $S_y = -\hbar\frac{1}{2}$.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 5/12/77

Appello di Dicembre 1977

N.B. Gli studenti del corso del Prof. Maiani svolgeranno gli esercizi 1 e 2; quelli del corso del Prof. Ferrari svolgeranno gli esercizi 2 e 3.

1) Un gas perfetto classico di N particelle di massa m è posto in un campo gravitazionale uniforme di accelerazione g diretto verso il basso lungo l'asse z, ed è contenuto in un cilindro con area di base A, infinitamente alto. Sia T la temperatura assoluta.

(a) Calcolare la funzione di partizione canonica per il sistema, e l'energia libera F.

(b) Calcolare il calore specifico a volume costante C_V del gas.

2) Una particella di massa m è vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio r. Sia φ l'angolo che individua la sua posizione sulla circonferenza.

(a) Scrivere l'Hamiltoniana della particella in termini di φ e del suo momento coniugato $\hat{\ell}_z = -i\hbar\,\partial/\partial\varphi$,

e determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia.

(b) Al tempo t=0 la particella viene preparata nello stato $|\psi\rangle$ di funzione d'onda $\psi(\varphi) = C \sin\varphi \cos 2\varphi$, dove C è una costante. Quale sarà la funzione d'onda al generico tempo t successivo?

(c) Dopo quanto tempo T la particella tornerà nello stesso stato in cui si trovava al tempo t=0?

3) L'hamiltoniana di un sistema di due particelle identiche di spin $\frac{1}{2}$ contiene un termine di interazione spin-spin

$$H_s = a\,\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}$$

in cui $\vec{S}^{(i)}$ è l'operatore di spin relativo alla particella i-esima, e a è una costante numerica.

A un certo istante di tempo la funzione d'onda del sistema può essere scritta come il prodotto di una funzione delle coordinate e di una funzione degli spin (entrambe normalizzate a 1):

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{s}_1,\vec{s}_2) = \varphi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,\chi(\vec{s}_1,\vec{s}_2)$$

Calcolare il valore medio dell'operatore H_s in tale stato

(a) quando φ è simmetrica nello scambio $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$;

(b) quando φ è antisimmetrica nello scambio $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$.

Si suggerisce di trattare il problema introducendo lo spin totale

$$\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}.$$

SECONDA PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA
DEL 17/12/77 - A.A. 1977-78
(M. Altarelli)

1 - Una particella si muove in una dimensione sotto l'influenza del potenziale

$$V(x) = \infty \qquad x < 0$$
$$V(x) = \tfrac{1}{2}\, m\, \omega^2 x^2 \qquad x > 0$$

dove m è la massa della particella, ed ω una frequenza caratteristica.
dove m è la massa della particella, ed ω una frequenza caratteristica.

a) Determinare gli autovalori e le autofunzioni dell'energia.
b) Qual'è il valor medio di x nello stato di energia più bassa?
c) Se al tempo t=0 la particella è nello stato di funzione d'onda

$$\psi(x) = C\, x^3 \exp(-m\omega x^2/2\hbar) \qquad x > 0$$
$$= 0 \qquad x < 0$$

dove C è una costante, quale sarà la funzione d'onda al generico tempo t?

2 - Una particella di massa m, che si muove nel verso positivo dell'asse x, è soggetta al potenziale

$$U(x) = 0 \quad \text{per} \quad x < 0$$
$$U(x) = U_0 > 0 \quad \text{per} \quad x > 0$$

Lo stato della particella al tempo t=0 è descritto dalla funzione d'onda $\psi_I(x)$, che per $x<0$, vale

$$\psi_I(x) = \psi_{k_1}(x) + \psi_{\sqrt{3}\,k_1}(x)$$

dove
$$\psi_{k_1}(x) = e^{ik_1x} + \frac{1}{3}\, e^{-ik_1x}$$
$$\psi_{\sqrt{3}\,k_1}(x) = e^{i\sqrt{3}\,k_1x} + B\, e^{-i\sqrt{3}\,k_1x} \,,$$

ψ_{k_1} e $\psi_{\sqrt{3}k_1}$ essendo soluzioni stazionarie dell'equazione di Schrödinger.

a) Determinare l'altezza U_0 della barriera (in funzione di k_1 ed m) ed il coefficiente B.
b) Scrivere la forma di $\psi_I(x)$ per $x > 0$.
c) Se la funzione d'onda fosse, per $x<0$, $\psi_{II}(x) = \psi_{k_1}(x)$, quale sarebbe il coefficiente di trasmissione?

3^ PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 14/1/78

Prof. M. Altarelli - A.A. 1977-78

1. Una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,y,z) = C\,(x+z)\,e^{-r/a}$$

dove $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ e C ed a sono costanti.

(a) Dimostrare che la particella è in un autostato di $\hat{l}^2$, e determinarne l'autovalore

(b) Quali sono i possibili risultati di una misura di $\hat{l}_z$, e quali le rispettive probabilità?

2. Un atomo di idrogeno si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda (in unità atomiche):

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,(x-iy)\,e^{-r/2} + \frac{2}{27\sqrt{\pi}}\,(x+iy)\left(1-\frac{r}{6}\right)e^{-r/3}\right]$$

(a) Scrivere ψ come sovrapposizione di autofunzioni del-l'Hamiltoniana e calcolare il valor medio dell'energia.

(b) Trovare il valor medio di r.

PROVA D'ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL

A.A. 1977-78 - (M. Altarelli)

Un gas perfetto classico di N particelle di massa m è soggetto ad una forza di richiamo elastica verso il piano $z = 0$, $F = -m\omega^2 z$, diretta lungo l'asse z. Il sistema è racchiuso in un cilindro di asse z, infinitamente lungo e di area di base A

(a) Calcolare la funzione di partizione canonica per il sistema, e l'energia libera F.

(b) Calcolare il calore specifico a volume costante, C_v, per il sistema.

2. La compressibilità isoterma K di un sistema è definita dall'equazione:

$$\frac{1}{K} = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$$

a) Dimostrare che, per un gas perfetto di fermioni allo zero assoluto K è proporzionale a $V^{5/3}$

b) Dimostrare che, invece, per il gas di fotoni K è infinito a qualsiasi temperatura T.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

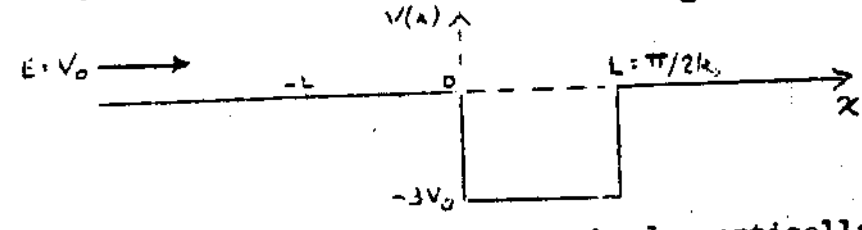
del 10/2/78

Gli studenti del corso del Prof. Altarelli (A.A. 1977-78) e del corso del Prof. Maiani (A.A. 1976-77) svolgeranno gli esercizi n.1 e 2; quelli del corso del Prof. Ferrari (A.A. 1976-77) gli esercizi n. 2 e 3; quelli del corso del Prof. Cassandro (A.A. 1977-78) a scelta un esercizio fra il primo e il quarto e un altro fra il secondo e il terzo.

1. (a) Dimostrare che, per un sistema descritto dall'ensemble canonico, la fluttuazione di energia quadratica media, definita da:
$$\Delta E = \sqrt{\overline{(H-\overline{H})^2}}$$
dove H è l'Hamiltoniana e la sbarra indica il valor medio sull'ensemble, è data da:
$$\Delta E = \sqrt{kT^2 C_V}$$
(b) Calcolare la fluttuazione ΔE per un sistema costituito da un oscillatore armonico unidimensionale classico, in funzione di T.
(c) Calcolare ΔE per un oscillatore unidimensionale quantistico, con frequenza caratteristica ω .

2. Un fermione di spin $s=\frac{1}{2}$ e massa m, descritto al tempo t=o dallo spinore
$$\psi(\vec{r}, \sigma_z, 0) = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
si trova in un campo magnetico uniforme H_x diretto lungo l'asse x, e la corrispondente Hamiltoniana è:
$$H = \frac{p^2}{2m} + g\sigma_x H_x$$
dove g è una costante.
(a) Quali sono i possibili risultati di una misura di σ_z al tempo t=o, e quali le rispettive probabilità?
(b) Qual'è il valor medio dell'energia al tempo t=o?
(c) Quale sarà lo spinore che descrive lo stato della particella dopo un tempo $t = \pi\hbar/(2gH_x)$?

3. Una particella di massa m ed energia $E=V_o$, che si muove lungo l'asse x, incide da sinistra su una buca di potenziale di profondità -3Vo e di lunghezza L, con $k_0 L = \frac{\pi}{2}$, $k_0 = \sqrt{2mV_o/\hbar^2}$ vedi fig.



Calcolare la probabilità relativa che la particella si trovi entro la buca (cioè nell'intervallo $0 \le x \le L$) e fuori dalla buca, nell'intervallo $-L \le x \le 0$.

4. Una particella di massa nulla, con energia E e impulso diretto lungo l'asse x, urta contro una particelle in quiete di massa M. Qual'è il minimo valore E_o di E necessario perchè nello stato finale siano presenti una particella di massa m e una di massa M? Supponendo che le particelle finali si muovano nella direzione dell'asse x, calcolare gli impulsi in funzione dell'energia E della particella incidente.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 5/4/78

A.A. 1977-78 - Proff. M.Altarelli
E. Ferrari

Gli studenti del corso del Prof. Altarelli (A.A. 1977-78) e del Prof. Maiani (A.A. 1976-77) svolgeranno gli esercizi 1 e 2; quelli del corso del Prof. Ferrari gli esercizi 2 e 3.

1. Un sistema di N molecole si trova immerso in un campo magnetico uniforme H diretto lungo l'asse z. Tutte le molecole sono nel loro stato fondamentale, in cui il momento angolare totale J ha autovalore $J(J+1)\hbar^2$ dove J è un intero, e ciascuna interagisce con il campo magnetico attraverso l'hamiltoniana.

$$\mathcal{H} = - c\, J_z\, H$$

dove c è una costante

(a) Calcolare la funzione di partizione canonica del sistema a temperatura T.

(b) Calcolare la magnetizzazione del sistema, data da

$$M_z = - \frac{\partial F}{\partial H}$$

dove F è l'energia libera.

2. Un atomo di idrogeno si trova, al tempo t=o nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{3\pi a_0^3}} \left[e^{-r/a_0} + \frac{i}{4}\left(\frac{z}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \right]$$

dove a_0 è il raggio di Bohr $a_0 = \hbar^2/me^2$.

(a) Quali sono i possibili risultati di misura di $\hat{\ell}^2$ e di $\hat{\ell}_z$ e quali le rispettive probabilità?

(b) Qual'è il valor medio di $\hat{z}$ al generico tempo $t > 0$?

3. Una particella di massa m è vincolata a muoversi sul segmento $0 \leq x \leq L$ e per t=o la sua funzione d'onda è:

$$\psi(x, 0) = a\,\phi_1 + b\,\phi_2$$

in cui ϕ_1 e ϕ_2 sono le prime due autofunzioni dell'energia. Sapendo che l'energia media della particella è $E = 3\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ e che la probabilità di trovare la particella nel segmento $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ è all'istante iniziale la minima possibile, determinare:

a) i coefficienti a e b;

b) la funzione d'onda della particella per $t > 0$.

TERZA PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL

Prof. Ferrari

2° Semestre - 13/6/1978

1) Partendo dall'espressione della capacità termica a volume costante di un gas di Fermi fortemente degenere, valida per T piccola:

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} nk \frac{T}{T_F}$$

(k=costante di Boltzmann; n=numero di particelle; T_F=temperatura di Fermi), scrivere l'espressione dell'energia interna del gas in tali condizioni.

Mostrare che per il gas vale il teorema di Nernst (secondo cui l'entropia è nulla per T=0) solo se il potenziale chimico alla temperatura T (con T piccola) differisce dal valore per T=0 per una funzione della temperatura che va a zero più rapidamente di T.

2) Una particella libera di spin ½ è in un autostato simultaneo dell'impulso (con autovalore $\vec{P}$) e dell'operature h definito da

$$h = \vec{\sigma} \cdot \vec{p}$$

($\vec{\sigma}$=vettore delle matrici di Pauli; $\vec{p}$=operatore dell'impulso), corrispondentemente all'autovalore massimo di h.

a) Scrivere l'espressione esplicita dell'autofunzione della particella e specificare l'autovalore di h.

b) Quali altri autovalori di h sono possibili (mantenendo invariato $\vec{P}$)?

c) Quali condizioni deve soddisfare il vettore $\vec{P}$ perchè la particella si trovi in un autostato di S_z? (S_z=operatore associato alla componente z dello spin).

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 23/6/1978

sessione estiva - A.A. 1977-78

Gli studenti del corso del Prof. Ferrari e di quello del Prof. Alta-velli svolgeranno gli esercizi 1 e 2. Gli studenti del corso della Prof.ssa Pugliese svolgeranno gli esercizi 2 e 3. Gli studenti del corso del Prof. Cassandro svolgeranno due esercizi a loro scelta.

---

1) Un gas è formato da un numero n (molto grande) di particelle iden-tiche, non interagenti, ciascuna delle quali è un oscillatore armo-nico quantistico, tridimensionale, isotropo, di frequenza ω, che ha spin $\frac{1}{2}$ e quindi obbedisce alla statistica di Fermi.
Calcolare l'energia di Fermi E_F del sistema (cioè l'energia del più alto livello occupato a temperatura nulla) e mostrare che, per $T=0$, l'energia totale del sistema è data da $\frac{3}{4}\, n\, E_F$.
Per evitare inutili complicazioni di calcolo, si raccomanda in tut-te le espressioni di conservare solo il termine dominante in n, tra-scurando tutti gli altri. Quando è necessario, si usi la relazione approssimata $\sum_{r=0}^{n} r^K \simeq \frac{n^{K+1}}{K+1}$
Quale risulta l'energia totale di un sistema di oscillatori analo-ghi, ma soddisfacenti la statistica di Bose, a temperatura nulla?

2) Una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, è soggetta al potenziale $V(x)$ definito da:

$V(x) = +\infty$ per $x < 0$

$V(x) = -V_0$ per $0 < x < a$ $(V_0 > 0)$

$V(x) = 0$ per $x > a$

(a) Determinare per quali valori di V_0 esiste un autostato dell'e-nergia con autovalore $E = 0$.

(b) Calcolare la probabilità relativa di osservare la particella in $0 \leq x \leq a$ e in $a \leq x \leq 2a$ per uno stato con $E = 0$.

3) Determinare la funzione d'onda per una particella di spin $\frac{1}{2}$ e mo-mento magnetico $\vec{\mu} = c\vec{S}$, tale che la probabilità di trovare il va-lore $+\frac{\hbar}{2}$ facendo una misura di S_z è 1/3, e il valore medio di S_x è zero.
Se la particella è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ che giace nel piano xy e fa un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle x, de-terminare la probabilità di ottenere il valore $-\frac{\hbar}{2}$ facendo una mi-sura di S_z al tempo t. (Si considerino i valori della prima do-manda come ottenuti al tempo $t = 0$).

I° PROVA D'ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

A.A. 1978-79 - 1° Semestre - 27/11/1978

1. Sia dato un sistema classico a due dimensioni descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \cdot \left\{ a(x^2+y^2) + 2bxy \right\}$$

ove a e b sono due costanti fissate ($a > 0$, $a^2 > b^2$).

Calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media del sistema.

FACOLTATIVO: Discutere che cosa succede se le condizioni $a^2 > b^2$ e $a > 0$ non sono soddisfatte.

N.B. Si ricorda il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-(Ax^2+2Bx)} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \; e^{B^2/A}$$

2. Sia dato un gas di bosoni di spin zero, il cui numero N è conservato (potenziale chimico μ non identicamente nullo) e massa nulla. Per tali particelle $E = c\,|\vec{p}|$ (E = energia, $\vec{p}$ = quantità di moto, c = velocità della luce).

a) Calcolare la capacità termica a volume costante C_v nel limite classico.

b) Calcolare la stessa grandezza quando il gas è fortemente degenere (ovvero T è inferiore alla temperatura critica To).

c) Calcolare To.

N.B. Nelle risposte b) e c), quando si incontra un integrale del tipo

$$I_k = \int_0^{\infty} \frac{x^k\,dx}{e^x-1} \qquad \text{(k intero)}$$

lasciarlo indicato con il simbolo I_k, senza cercare di risolverlo.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 6/12/1978

li studenti del corso del Prof. Ferrari e del Prof. Altarelli svolgeranno gli eserizi 1 e 2; quelli del corso della Prof.ssa Pugliese gli esercizi 2 e 3; quelli del orso del Prof. Cassandro due esercizi a loro scelta.

) Un sistema è costituito da N rotatori rigidi quantistici ma distinguibili, che hanno per hamiltoniana $L^2/2I$, ove L^2 è il momento angolare e I è il momento d'inerzia. Il sistema è in equilibrio termico alla temperatura T.

a) Scrivere la funzione di partizione canonica del sistema.

b) Calcolare l'energia interna del sistema nel limite di T molto grande (si consiglia di usare per lo spettro dei livelli del rotatore l'approssimazione di spettro continuo).

c) Calcolare l'energia interna e la capacità termica del sistema nel limite di T molto piccolo (si consiglia di troncare la somma di partizione lasciando solo i termini significativi).

) All'istante t = o una particella di spin $\frac{1}{2}$, momento magnetico $\vec{\mu} = g\,\vec{s}$ e massa infinita si trova in uno stato nel quale la possibilità di trovare il valore $\hbar/2$ facendo una misura di S_z è $\frac{2}{3}$, e i valori medi di S_x e S_y sono uguali (e entrambi positivi). La particella è immersa in un campo magnetico costante $\vec{B}$ parallelo all'asse y.

a) Scrivere la funzione d'onda all'istante t = o e determinare il valore medio comune di S_x e S_y.

b) Calcolare il valore massimo e minimo della probabilità di trovare il valore $\hbar/2$ in una misura di s_z durante l'evoluzione temporale del sistema.

) Determinare la funzione d'onda e l'energia nello stato fondamentale di una particella di massa m vincolata a stare in una sfera di raggio R.
Si abbiano ora due particelle identiche non interagenti immerse in questo potenziale; si determini la loro funzione d'onda complessiva quando entrambe le particelle si trovano nello stato fondamentale. Discutere i due casi: a) bosoni di spin 0; b) fermioni di spin $\frac{1}{2}$.

III COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 13/2/79

A.A. 1978-79

1) Una particella si trova, ad un certo istante di tempo, nello stato descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = A\,\chi(r)\,(\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi)$$

dove A è una costante di normalizzazione e $\chi(r)$ è normalizzata:

$$\int_0^\infty dr\, r^2\, |\chi(r)|^2 = 1$$

a) Calcolare A, e determinare la probabilità di ottenere, da una misura su ψ, i vari valori di L^2 e di L_z.

b) Mostrare che, su ψ, i valori medi di L_+ e di L_- sono uguali, e calcolarne il valore comune.

2) Una particella di massa infinita e spin $\frac{1}{2}$ è immersa in un campo magnetico costante. Il campo magnetico $\vec{B}$ giace nel piano XZ e forma con l'asse Z un angolo θ. L'hamiltoniana è:

$$H = \mu\,\vec{B}\cdot\vec{\sigma} = \mu B\,(\cos\theta\,\sigma_z + \sin\theta\,\sigma_x)$$

Se lo stato iniziale è l'autostato di σ_z con autovalore +1, qual'è, in funzione di θ, il minimo valore che può assumere il valore di aspettazione di σ_z al variare di t?

II° COMPITO D'ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

A.A. 1978-79 II° Semestre 14/5/79

Un oscillatore armonico in una dimensione di massa m e pulsazione ω si trova al tempo t = o in uno stato determinato dalle seguenti condizioni:

a) Ogni misura di energia dà con certezza valori che soddisfano
$$\hbar\omega < E < 3\hbar\omega$$

b) Il valore medio dell'energia è
$$\overline{E} = \frac{11}{6}\hbar\omega$$

c) Il valore medio della coordinata è:
$$\overline{x} = -\sqrt{\frac{8\hbar}{9m\omega}}$$

Identificare tale stato. Determinare poi a quali valori del tempo il valore medio della coordinata è positivo e massimo. Determinare infine il valore medio dell'energia cinetica a tutti i tempi.

III° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 5/6/1979

L'Hamiltoniana di una particella di spin $\frac{1}{2}$ sia

$$H = - g\, \vec{s} \cdot \vec{B}$$

dove $\vec{s}$ è lo spin e $\vec{B}$ è diretto lungo l'asse z.

Determinare :

a) La forma esplicita in funzione di $\vec{s}$ e $\vec{B}$ dell'operatore $\dot{\vec{s}}$

b) Gli autostati di $(\dot{\vec{s}})_y$ e i corrispondenti autovalori

c) L'evoluzione temporale di uno stato che coincida al tempo $t = 0$ con uno dei suddetti autostati e il valore medio dell'Hamiltoniana.

PROVA D'ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

Sessione Estiva 9/7/79 - A.A.1978-79

Prof. G. Altarelli

) - Si consideri un gas di particelle classiche in una dimensione non interagenti con massa m, in un campo esterno tale che l'energia della singola particella è

$$H = \frac{p^2}{2m} + b\,x^{2n}$$

con $b > 0$ e n intero:

Determinare:

a) con quale potenza della temperatura varia lo scarto quadratico medio

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

b) il calore specifico molare a "volume" costante.

Si tenga presente che per risolvere il problema non è necessario fare alcun integrale.

2) - Una particella di massa m in una dimensione ha Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega'^2(x-x_0)^2$$

Determinare in modo esatto lo spettro di autovalori dell'energia e il valore medio della coordinata in uno stato stazionario. Successivamente considerare l'ultimo termine come una perturbazione e determinare la variazione al primo ordine dei livelli. Confrontare con la soluzione esatta per lo spettro.

I^ PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 30/11/1979 - A.A. 1979-80

1) Sia dato un sistema di N particelle distinguibili, ciascuna delle quali può trovarsi in un livello energetico appartenente ad uno spettro di livelli discreti ed equispaziati ($E_R = Ra$, $R = 0,1,2,\dots$, $a > 0$), in cui il livello di energia E_R contiene R+1 stati distinti (cioè il livello fondamentale (R = 0) non è degenere, il livello successivo (R = 1) contiene due stati, e così via). Calcolare la funzione di partizione canonica alla temperatura T, l'energia interna U e il limite di U per $T \to \infty$ (si ricordi che

$$\sum_k k e^{-k\nu} = -\frac{d}{d\nu}\sum_k e^{-k\nu} \text{)}$$

2) Si consideri il caso di un gas quantistico di particelle non interagenti. Le particelle sono bosoni di spin zero, ed il loro numero è esattamente conservato (μ = potenziale chimico $\neq 0$). La massa di ciascuna delle particelle è uguale a zero, per cui la relazione tra impulso p ed energia E è E = cp, ove c è la velocità della luce nel vuoto

a) Mostrare che il limite classico (T grande, μ negativo e grande in valore assoluto) il gas obbedisce all'equazione di stato pV = NkT.

b) Determinare la temperatura critica T_0 (al di sotto della quale si ha la condensazione di BoseEinstein) in funzione di N e V.

c) Per $T < T_0$, determinare il numero di particelle nello stato fondamentale (E = o) in funzione di N, T e T_0.

(Si ricordi che $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$)

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 28/3/80

N.B.- Gli studenti dei corsi dei Proff. Altarelli, Ferrari, Maiani svolgeranno gli esercizi n.1 e 2; quelli del corso della Prof.ssa Pugliese gli esercizi n.2 e 3.

1) Un gas di oscillatori classici è costituito da N punti materiali di massa m legati allo stesso centro O da una forza di richiamo elastica $\vec{F} = -a\vec{r}$ $(a > 0)$, ed è in equilibrio termico alla temperatura T. Il volume in cui è contenuto il gas può essere considerato come infinito

a) Si calcoli il valor medio $\overline{|\vec{F}|}$ del modulo della forza agente su un singolo oscillatore;

b) Si calcolino i valori medi $\overline{F_x}$, $\overline{F_y}$, $\overline{F_z}$ delle componenti della stessa forza $\vec{F}$ lungo gli assi coordinati, e si discuta il risultato ottenuto.

c) Indicando con $P(r)\cdot dr$ la probabilità che un oscillatore si trovi a una distanza dal centro O compresa tra r e r+dr, calcolare il valore di r per cui tale probabilità è massima.

2) Un sistema formato da due particelle identiche che si muovono sull'asse x ha l'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

Introducendo la coordinata del baricentro $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e la coordinata relativa $x = x_1 - x_2$ l'hamiltoniana diventa

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kx^2$$

ove $M = 2m$, $\mu = m/2$, P è l'impulso relativo alla coordinata X e p è l'impulso relativo alla coordinata x.

Nell'ipotesi che il baricentro del sistema sia in quiete, scrivere le autofunzioni dell'energia del sistema (includenti eventualmente anche le funzioni d'onda di spin) corrispondenti al valore più basso dell'energia e a quello immediatamente successivo, sia nel caso di bosoni di spin zero che di fermioni di spin $\frac{1}{2}$.

3) Un rotatore sferico con momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{L}$, immerso in un campo magnetico diretto lungo l'asse z è descritto all'istante iniziale dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{3\cdot 4\pi}}\left(1 + \cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi - 3\cos^2\theta\right)$$

Determinare $\psi(\theta,\varphi,t)$ e il valor medio di L_x.

Determinare i possibili risultati di una misura di L^2 e L_z e le rispettive probabilità.

(Si ricorda che se $L^{\pm} = L_x \pm iL_y$

$$L^+ Y_{\ell m} = \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)}\, Y_{\ell, m+1}$$

$$L^- Y_{\ell m} = \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)}\, Y_{\ell, m-1}$$

TERZA PROVA DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

DEL 7/2/80 - A.A. 1979-80

1) Si consideri un oscillatore armonico tridimensionale, di hamiltoniana

$$H = \frac{P_x^2+P_y^2+P_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,(x^2+y^2+z^2)$$

Gli autostati di H dipendono da tre numeri interi positivi o nulli n_x, n_y, n_z:

$$E(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega\,(n_x+n_y+n_z+3/2)$$

$$\psi_E \equiv \psi_{n_x,\, n_y,\, n_z}$$

a) Esprimere gli operatori di momento angolare L_x, L_y, L_z in funzione degli operatori di innalzamento e abbassamento pertinenti ai vari gradi di libertà, a_x, a_x^+, a_y, a_y^+, a_z, a_z^+, definiti nella maniera usuale:

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(P_x - i m\omega x) \text{ etc.}$$

e calcolare il commutatore di L_z con n_z, ove $n_z = a_z^+ a_z$.

b) Considerati i tre autostati con $n_x+n_y+n_z=1$, determinare le loro combinazioni che corrispondono agli autostati di L_z e calcolare i corrispondenti autovalori.

2) Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova in uno stato di spin in cui il valor medio di s_x è $\frac{\hbar}{2}\alpha$ e quello di s_y è $\frac{\hbar}{2}\beta$, con α e β compresi tra -1 e 1.

Mostrare che deve valere la condizione $\alpha^2+\beta^2 \leq 1$, e che per $\alpha^2+\beta^2 < 1$ il problema ammette due soluzioni, mentre per $\alpha^2+\beta^2=1$ se ne ha una sola.

In quest'ultimo caso, calcolare le probabilità di trovare lo spin della particella orientato parallelamente o antiparallelamente all'asse z.

'ERZO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA del 13/6/1980

A.A. 1979-80 - Prof. G. Altarelli

Una particella di massa m e spin 1/2 è confinata nel segmento $0 \leq X \leq L$ e immersa in un campo magnetico B uniforme e costante diretto lungo l'asse X, di modo che all'interno del segmento l'hamiltoniana completa è:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \mu B \sigma_x \qquad (0 \leq x \leq L)$$

Determinare autofunzioni e autovalori dell'energia.

Al tempo t = o la particella è in uno stato con

$$S_z = +\frac{\hbar}{2} \; ; \frac{L}{2} - \bar{X} = 0 \; ; \quad \bar{E} = \frac{7\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$$

ottenuto come sovrapposizione dei due stati con più basse P^2.

Determinare la funzione d'onda di tale stato.

Calcolare in funzione del tempo la probabilità di trovare $S_y = +\hbar/2$

PROVA SCRITTA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 3/12/1980 - A.A. 1979-80

1) Un gas di fotoni all'equilibrio si trova racchiuso in una cavità di volume V_i alla temperatura T_i.
Determinare:
a) il lavoro necessario a variare isotermicamente il volume della cavità fino ad un volume V_f.

b) Il lavoro necessario per variare adiabaticamente il volume della cavità fino ad un volume V_f e la temperatura finale T_f

c) Calcolare il rapporto tra il numero totale di fotoni presenti nel volume V_f nei due casi.

2) Si consideri l'hamiltoniana di una particella di spin $\frac{1}{2}$ immersa in un campo magnetico B uniforme e costante che si ottiene trascurando il termine cinetico:

$$H = -\mu\hbar\, \underline{B}\cdot\underline{\sigma}$$

Si consideri il caso in cui B giace sul piano zx con

$$\epsilon \equiv \frac{B_x}{B_z} \ll 1$$

Si determinino con il formalismo della teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo gli autovalori di H fino all'ordine ϵ^2 incluso, e gli autostati fino all'ordine ϵ.

Si determini poi la soluzione esatta per gli autovalori e gli autovettori.

ESAME DI ISTITUZI... FISICA TEORICA DELL' 11/7/1980
Sessione Esti... A.A. 1979-1980
G. A...arelli

.) Un solido contiene N nuclei non interagenti di spin 1 distinguibili (perchè in siti reticolari differenti). Ciascun nucleo può essere in uno qualsiasi dei tre stati di spin con $m=\pm 1,0$. Per le interazioni elettriche con i campi interni del solido, un nucleo nello stato m=1 oppure m=-1 ha la stessa energia $\epsilon > 0$, mentre l'energia è zero nello stato m=0. Trascurando ogni altro termine nell'hamiltoniana dei nuclei si calcoli:

a) la funzione di partizione canonica;
b) l'entropia S complessiva degli N nuclei;
c) il calore specifico nel limite $\epsilon/kT \ll 1$;

2) Si consideri per un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω l'equazione agli autovalori:

$$a\,\phi_\lambda = \lambda\,\phi_\lambda$$

dove a è l'operatore di abbassamento degli indici: $a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}(\omega x + i\dot{x})$
e λ un numero complesso.
Determinare le autofunzioni ϕ_λ.
Calcolare i valori medi dell'energia e della posizione nello stato ϕ_λ (per λ generico).

3) L'hamiltoniana di un rotatore è data da

$$H = AL^2 + BL_z$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale e A e B sono costanti. Inizialmente il rotatore è nello stato

$$\psi(\theta,\varphi,t=0) = k\,(r-2x)$$

con k uguale a una costante.
Determinare l'evoluzione temporale dello stato e la probabilità di trovare $L^2=2\hbar^2$.

3° COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 2/2/1981

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ e momento angolare orbitale $\underline{L}^2 = \hbar^2 2$ è descritta da una hamiltoniana della forma $H = \frac{\underline{L}^2}{2I} + \alpha\, \underline{L}\cdot\underline{S}$

dove $\underline{L}$ e $\underline{S}$ sono rispettivamente il momento angolare orbitale e lo spin. a) Costruire gli stati di momento angolare totale $\underline{J}^2 = \frac{15}{4}\hbar^2$ e $J_z = \frac{\hbar}{2}$ e $\underline{J}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$ e $J_z = \hbar/2$ (in funzione delle armoniche sferiche e degli autostati di S_z). b) Poichè H è invariante per rotazioni tali due stati sono autovettori di H. Determinare i due autovalori. c) Se inizialmente il sistema si trova in uno stato con $\underline{L}^2 = 2\hbar^2$, $L_z = 0$, $S_z = \frac{\hbar}{2}$, determinare lo stato del sistema all'istante t. d) Dopo quale intervallo minimo di tempo T il sistema torna allo stato iniziale, a meno di un fattore di fase globale?

PROVA SCRITTA D'ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - 6/2/1981

Gli studenti dovranno risolvere il problema di meccanica statistica più uno a scelta tra i due di meccanica quantistica.

1) Si consideri un sistema costituito da N particelle distinguibili fisse (cioè prive di energia cinetica) e non interagenti, l'energia di ciascuna delle quali può assumere due valori: 0, corrispondente allo stato fondamentale, ed E (diverso da particella a particella) corrispondente allo stato eccitato. Il numero di particelle, il cui livello eccitato è compreso tra E ed E+dE è dato da:

$$dn = \gamma E\, dE \quad (\text{se } E < E_M)$$
$$= 0 \quad (\text{se } E > E_M)$$

dove γ e E_M sono opportune costanti positive.

1) Determinare γ in funzione di N, E_M dalla condizione che il numero totale di particelle sia N.
2) Supponendo il sistema in equilibrio termico a temperatura T, scrivere la funzione di partizione per ciascuna particella e il logaritmo della funzione di partizione per il sistema totale.
3) Calcolare il valore specifico a volume costante dell'intero sistema e discuterne l'andamento per $T \to 0$ e (facoltativo) per $T \to \infty$

2) Una particella di massa μ è vincolata a muoversi sulla superficie di un cilindro di raggio R e asse Z. Essa è soggetta ad una forza di richiamo elastica di costante K verso l'origine sull'asse del cilindro.
- Scrivere l'hamiltoniana della particella in termini delle coordinate cilindriche Z e φ e dei relativi momenti coniugati.
- Determinare gli autovalori dell'energia, e le autofunzioni corrispondenti.
- Al tempo t=0 la funzione d'onda della particella è data da
  $\Psi(z,\varphi,0) = A\, z \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar} z^2\right] \cos^2\varphi$ dove A è una costante.
  Determinare $\Psi(z,\varphi,t)$.

3) Un rotatore quantistico di momento d'inerzia I e momento magnetico $\vec{\mu} = g\vec{L}$ si trova in un campo magnetico $\vec{B}$ costante diretto lungo l'asse y $\left(H = \frac{L^2}{2I} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}\right)$. All'istante t=0 sono stati misurati simultaneamente L^2 e L_z con i risultati $2\hbar^2$ e 0 rispettivamente.
- Scrivere la funzione d'onda del sistema ad un tempo t > 0 generico.
- Calcolare il valore medio dell'energia.
- Determinare se e per quali valori di t il sistema si troverà in un autostato di L_x e con quali autovalori.

PROVA SCRITTA DELL'ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 13/4/81

A.A. 1979-1980

1) Si consideri un gas perfetto di N fermioni di spin 1/2 allo zero assoluto, ciascuno dei quali è un oscillatore quantistico lineare di pulsazione ω e momento magnetico μ in un campo magnetico esterno costante ed uniforme B. I livelli di ciascun fermione sono:

$$\text{spin} + \quad : \quad E_n^+ = n\hbar\omega - \mu B$$
$$\text{spin} - \quad : \quad E_n^- = n\hbar\omega + \mu B \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots$$

Calcolare: a) l'energia di Fermi del sistema; b) la polarizzazione relativa, cioè la quantità $\dfrac{N_+ - N_-}{N}$ ($N_\pm$ numero di fermioni con spin $\pm$)

2) Al tempo t=0 una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x,y,z) = N\,(x+y+z)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2}$$

dove N è una costante di normalizzazione e a un parametro che ha la dimensione di una lunghezza.

Ricordando che le prime autofunzioni di L^2 e L_z sono ($\vec{L}$ = momento angolare orbitale):

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad ; \quad Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad ; \quad Y_{1\pm1}(\theta\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

determinare le probabilità di trovare i possibili valori di L^2 e L_z.

Se l'Hamiltoniana ha la forma:

$$H = -\lambda\, L_z$$

determinare il valore medio di L_x a tutti i tempi t successivi, ricordando che

$$L_\pm = L_x \pm iL_y$$

$$L_\pm Y_{\ell m} = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm1)}\; Y_{\ell,m\pm1}$$

3) Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi sull'asse x con energia potenziale V(x) data da:

1) $\quad V(x) = +\infty \qquad (x<0)$

2) $\quad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \qquad (x>0)$

Inizialmente la particella si trova nello stato fondamentale. All'istante t=0 si rimuove, senza perturbare lo stato della particella, la parete che impediva l'accesso alla regione $x<0$, di modo che il potenziale ha la forma (2) in tutto l'asse x. Qual'è la probabilità che una misura di energia eseguita successivamente dia il risultato $E = \frac{\hbar\omega}{2}$?

Si ricorda che le prime autofunzioni dell'oscillatore armonico sono:

$$u_n(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}\, e^{-\xi^2/2}\, H_n(\xi)/\sqrt{2^n n!} \quad ; \quad \xi = x\sqrt{m\omega/\hbar}$$

$$H_0 = 1 \quad , \quad H_1 = 2\xi \quad , \quad H_2 = 4\xi^2 - 2 \,, \ldots$$

1° COMPITO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA (Corso Prof. Maiani L.)

del 28/4/1981 - A.A. 1980-81

Si consideri un gas costituito da particelle di spin zero, per cui la relazione tra energia e quantità di moto è

$$\epsilon(p) = \epsilon_0 + \frac{p^2}{2M}$$

e il cui numero non è conservato: μ = potenziale chimico = 0.
Il gas è a temperatura T tale che

$$kT \ll \epsilon_0$$

e quindi:

$$e^{-\epsilon_0/kT} \ll 1$$

1) Calcolare la somma di partizione gran - canonica e verificare che si ottiene lo stesso risultato nella statistica di Bose-Einstein e in quella di Fermi-Dirac, nel limite (2).
2) Approssimando la somma sugli stati con un integrale (limite continuo) calcolare il numero totale di particelle N, e l'energia interna, U, in funzione del volume e della temperatura.
3) Determinare l'equazione di stato del gas.

Istituzioni di Fisica Teorica
prof. L. MAIANI

III Compito di esonero

Due particelle distinguibili, di spin $\frac{1}{2}$, sono in uno stato con funzione d'onda orbitale fissata. Fissando la nostra attenzione sulle sole variabili di spin, il sistema può trovarsi in quattro stati distinti: $\chi_1^+ \chi_2^+$; $\chi_1^+ \chi_2^-$; $\chi_1^- \chi_2^+$; $\chi_1^- \chi_2^-$.

L'interazione tra gli spin è:

$$H = \frac{A}{4}\ \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \frac{A}{4}\left(\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}\right)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare le combinazioni lineari dei quattro stati che corrispondono agli autovettori di H, e i corrispondenti autovalori.
2. Se il sistema è in equilibrio termico con una sorgente a temperatura T, determinare il valore di T per cui la probabilità di trovare il sistema nello stato di energia minima è: $P_0 = 1/2$.

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 17 GIUGNO 1981

A.A. 1980-81 - Proff. Altarelli e Testa

1. - Un gas classico con N particelle di massa m si trova all'equilibrio a temperatura T ed è contenuto in un recipiente cilindrico con asse z, altezza H e area di base A. Le particelle sono soggette al potenziale

$$V(x,y,z) = a \operatorname{Log}\left(1+\frac{z}{b}\right)$$

Calcolare l'energia libera.
Nel caso in cui $a=mgb$ stabilire se la quota del baricentro z_B è maggiore, minore o uguale di quella che si avrebbe se le particelle fossero invece soggette al potenziale gravitazionale mgz (Nota bene che per rispondere a questa domanda non occorre calcolare esplicitamente gli integrali).

2. - Siano n e p due particelle di spin ½ e momenti magnetici

$$\vec{\mu}_n = \mu_n \vec{\sigma}_n \quad ; \quad \vec{\mu}_p = \mu_p \vec{\sigma}_p$$
$$\vec{S}_i = \hbar/2\, \vec{\sigma}_i \qquad (i = p,n)$$

(s è lo spin, $\vec{\sigma}$ le matrici di Pauli).

a) Calcolare il valor medio delle componenti dell'operatore del momento magnetico totale $\vec{\mu}=\vec{\mu}_n+\vec{\mu}_p$ nello stato di spin totale $s=0$;
b) Dimostrare che gli elementi di matrice di $\vec{\mu}$ fra stati di spin totale $s=1$ sono proporzionali agli elementi di matrice dello spin totale
$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma}_n+\vec{\sigma}_p)$$
e determinare il coefficiente di proporzionalità.
(può essere utile ricordare che:
$$\mu_n\vec{\sigma}_n + \mu_p\vec{\sigma}_p = \frac{1}{2}(\mu_n+\mu_p)(\vec{\sigma}_n+\vec{\sigma}_p) + \frac{1}{2}(\mu_n-\mu_p)(\vec{\sigma}_n-\vec{\sigma}_p))$$
c) Dimostrare che $\vec{\mu}$ ha elementi di matrice diversi da zero tra lo stato di singoletto e gli stati di tripletto. (Calcolando uno di tali elementi di matrice non nulli).

3. - Si considerino due oscillatori (lineari) armonici di masse m_1, m_2 e uguale frequenza ω. Essi interagiscono tra di loro con un potenziale anch'esso armonico dipendente dalla distanza relativa.
L'hamiltoniana è quindi:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_1\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 x_2^2 + \lambda(x_1-x_2)^2$$

Calcolare il valore imperturbato e il valore al primo ordine perturbativo in λ dell'energia dello stato fondamentale del sistema dei due oscillatori accoppiati.
Si ricorda che

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

del 14/9/1981 - A.A. 1980-81

1) Si consideri un sistema costituito da N rotatori quantistici distinguibili non interagenti tra loro e in equilibrio termico a temperatura T. L'Hamiltoniana di ciascun rotatore sia

$$H = \frac{2\pi}{h} A L^2$$

dove $\vec{L}$ è il momento angolare e A è una costante data. Determinare: a) a quale temperatura la probabilità di trovare un rotatore nel livello fondamentale è uguale a quella di trovarlo in un qualsiasi stato del primo livello eccitato; b) il comportamento del calore specifico in funzione di T nelle vicinanze dello zero assoluto.

2) Una particella di massa m è confinata su un segmento $0 \leq x \leq L$ sul quale si muove liberamente. Si sa che la misura della sua energia può dare i valori del primo livello (fondamentale) E_1 e dal terzo livello E_3 entrambi con probabilità $\frac{1}{2}$. Si sa inoltre che al tempo t = o la probabilità di trovare la particella al centro del segmento è la massima possibile per un tale stato. Calcolare dopo quanto tempo la probabilità di trovare la particella al centro del segmento è diventata nulla.

3) Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova al tempo t = o nello stato con spin $+\frac{1}{2}$ lungo l'asse Z. Essa è soggetta ad un'interazione magnetica del tipo

$$H = \frac{A}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_y) \qquad \text{(A costante)}$$

($\sigma_{x,y}$ sono le matrici di Pauli). Si calcoli dopo quanto tempo la componente lungo l'asse Z dello spin è $-\frac{1}{2}$.

COMPITO SCRITTO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 2/12/81

A.A.1980-1981

Proff.: G.Altarelli, M.Lusignoli, L.Maiani, P.Tombesi

. Un oscillatore armonico di hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

si trova al tempo t=0 in uno stato specificato dalla funzione d'onda $\psi(x)$.

a) Determinare la relazione funzionale tra $\psi(x)$ e la funzione d'onda ai tempi

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}$$
$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$$

(suggerimento: partire dalla forma generale dello sviluppo di ψ in autofunzioni dell'energia).

b) Se $\psi(x,t=0) = \cos\alpha\,\psi_0(x) + \sin\alpha\,\psi_1(x)$. dove ψ_0 e ψ_1 sono le funzioni d'onda dello stato fondamentale e del primo livello eccitato, determinare il valore di $\Delta x \Delta p$.

$$\left((\Delta x)^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} \qquad , \qquad (\Delta p)^2 = \overline{(p-\bar{p})^2} \right)$$

). Un sistema costituito da N particelle distinguibili non interagenti tra loro è in equilibrio a temperatura T. Ciascuna particella può trovarsi indifferentemente in uno dei seguenti stati energetici E_i con la relativa molteplicità g_i

$$E_1 = -E,\ g_1 = 1;\quad E_2 = 0;\quad g_2 = 2;\quad E_3 = E,\quad g_3 = 1$$

a) Calcolare l'entropia del sistema;

b) Determinare C_V per $T \to 0$.

(Si trascuri ogni grado di libertà cinetica delle particelle)

SECONDO COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 19/12/1981 - A.A. 81-82

Proff. G. Altarelli e L. Maiani

Un oscillatore armonico lineare di massa m e pulsazione ω si trova al tempo t=0 in uno stato tale che a) misurando l'osservabile aa^+ si trovano solo i valori 1 e 3; b) il valore medio di a^+a è $\frac{1}{2}$ e quello di $aa+a^+a^+$ è zero (ove $a = \left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2}(\omega x + i\dot{x})$)

1) Determinare lo stato più generale che obbedisce a queste condizioni.
2) Calcolare in funzione del tempo il valore medio dell'energia potenziale.
3) Se un tale oscillatore si trova ad un dato istante nello stato la cui funzione d'onda è quella dello stato fondamentale di un oscillatore di uguale massa e pulsazione 2ω, qual'é la probabilità che misurando l'energia a tale istante si trovi $\frac{1}{2}\hbar\omega$, cioè quella del suo stato fondamentale?

III COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

30/1/1982 - A.A. 1981-82

Proff. G. Altarelli, L.Maiani

Un sistema composto di due particelle identiche di spin 1/2 (fermioni) è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

(le variabili spaziali sono 1-dimensionali).

a) determinare la funzione d'onda completa (parte orbitale e parte di spin) degli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato, nonchè i relativi autovalori di H, di $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ e di S_z;

b) calcolare il valore medio dell'operatore: $(x_1-x_2)^2$ su ciascuno degli stati che corrispondono al 1°livello eccitato.

Facoltativo - Se si aggiunge all'Hamiltoniana il termine $\lambda x_1 x_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ (dove $\vec{\sigma}_{1,2}$ sono le matrici di Pauli della particella 1,2) quali sono le correzioni al primo ordine in λ delle energie degli stati di cui sopra (fondamentale e 1°eccitato).

PROVA SCRITTA DI ESAME DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

dell'8/2/1982 - Proff. Altarelli e Maiani

1) Un gas perfetto di N fermioni di spin $\frac{1}{2}$ e massa m si trova a $T = 0°K$ in un volume V. L'Hamiltoniana di particella singola è data da $H = \frac{P^2}{2m} - \frac{P^4}{8m^3C^2}$ dove c è la velocità della luce. Determinare in funzione di N e V a) l'impulso P_F e l'energia E_F di Fermi; b) l'energia interna.

2) Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi in una circonferenza di centro O e di raggio a. L'unica coordinata del sistema è quindi l'angolo φ compreso tra il raggio vettore della particella e l'asse della x.

(a) La hamiltoniana del sistema è

$$H = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

Determinare autovalori e autofunzioni di questa hamiltoniana e il relativo grado di degenerazione.

(b) Si suppone che la particella abbia una carica q e sia sottoposta a un campo elettrico uniforme e parallelo all'asse x. Alla hamiltoniana H_0 si aggiunge quindi la perturbazione

$$V = -q E R \cos\varphi$$

Calcolare, al primo ordine in E, l'energia dello stato fondamentale del sistema.

(c) Si supponga $E = 0$ e che all'istante $t = 0$ lo stato sia descritto dalla funzione d'onda

$$N \cos^2\varphi$$

dove N è una costante di normalizzazione. Determinare la funzione d'onda all'istante t generico.

ESAME SCRITTO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA DEL 16 APRILE 1982

A.A. 1980-1981

Proff.: G. Altarelli e L. Maiani

1. - Un gas perfetto classico di particelle di massa M in un volume illimitato è sottoposto ad un potenziale centrale con hamiltoniana di singola particella:

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2M} + Ar^3 \qquad A > 0$$

Nel formalismo dell'ensemble gran canonico determinare il potenziale chimico μ in funzione di T e del numero medio di particelle $\bar{N}$. Determinare inoltre l'entropia totale in funzione di $\bar{N}$ e T.

2. - All'Hamiltoniana di un oscillatore armonico lineare

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_o^2 x^2$$

è aggiunta una perturbazione della forma:

$$V = \alpha x + \beta x^2$$

a) Al primo ordine di α e β, calcolare l'energia e la funzione d'onda dello stato fondamentale;

b) Calcolare l'energia dello stato fondamentale al 2° ordine in α e β.

Facoltativo

L'Hamiltoniana totale: H + V è essa stessa riconducibile all'Hamiltoniana di un nuovo oscillatore armonico, il che permette di risolvere il problema, esattamente in α o β . Sapreste ritrovare, per questa via, i risultati perturbativi di cui sopra?

PROVA SCRITTA DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA - SESSIONE ESTIVA DELL'A.A. 1981-82 , 19/6/1982

Proff. G. Altarelli, L. Maiani

1. - Si consideri il modello di un semiconduttore in cui le bande di valenza e di conduzione, ognuna composta di un numero molto grande di livelli, sono schematizzate da due singoli livelli di energia ϵ_1 e ϵ_2 ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), con uguale parametro di degenerazione g.
Per semplicità supponiamo che g=N, dove N è il numero totale di elettroni. Si avrà quindi un gas di fermioni con due soli livelli, ognuno dei quali corrisponde a tanti stati quantici degeneri (spin incluso) quanti sono gli elettroni.
Calcolare in funzione della temperatura, di ϵ_1 e di $\epsilon_2 = \epsilon_1 + \Delta\epsilon$

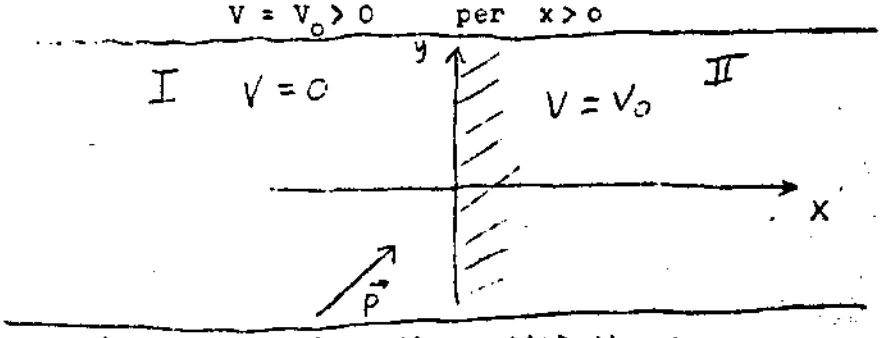
   a) Il potenziale chimico μ,

   b) I numeri di occupazione dei due livelli,

   c) Il calore specifico C_V.

2. - Si consideri una particella vincolata a stare in un piano e soggetta ad un potenziale:

$$V = 0 \quad \text{per} \quad x < 0$$
$$V = V_0 > 0 \quad \text{per} \quad x > 0$$



Un fascio monocromatico, di quantità di moto

$$\vec{p} = (p_x, p_y)$$

viene inviato dalla zona I. In condizioni stazionarie la funzione d'onda (autofunzione di $H = \frac{p^2}{2m} + V$ con autovalore $E > V_0$) è della forma:

$$\psi(x) = e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}} + A\, e^{i\frac{\vec{p}\,'\cdot\vec{x}}{\hbar}}$$

$$\vec{p}\,' = (-p_x, p_y)$$

nella regione I, e: $\psi = B\, e^{i\frac{\vec{p}\,''\cdot\vec{x}}{\hbar}}$

nella regione II. Il coefficiente A è associato all'onda riflessa dalla linea di separazione e il coefficiente B all'onda [illegible] trasmessa. Usando l'equazione di Schrödinger e le condizioni di continuità:

1. Determinare p_x'' e p_y'' in funzione di p_x, p_y e V_0
2. Determinare A e B
3. Posto: $p_x = p\sin\theta$, $p_y = p\cos\theta$

(θ è l'angolo tra $\vec{p}$ e l'asse y) determinare l'angolo limite e cioè il valore di θ (in funzione di p e di V_0) al di sotto del quale l'onda trasmessa in II diventa un'onda smorzata esponenzialmente, nella direzione dell'asse X.

III COMPITO DI ESONERO DI ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA

30/1/1982 - A.A. 1981-82

Proff. G. Altarelli, L.Maiani

Un sistema composto di due particelle identiche di spin 1/2 (fermioni) è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2)$$

(le variabili spaziali sono 1-dimensionali).

a) determinare la funzione d'onda completa (parte orbitale e parte di spin) degli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato, nonchè i relativi autovalori di H, di $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ e di S_z;

b) calcolare il valore medio dell'operatore: $(x_1-x_2)^2$ su ciascuno degli stati che corrispondono al 1°livello eccitato.

Facoltativo - Se si aggiunge all'Hamiltoniana il termine $\lambda x_1 x_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ (dove $\vec{\sigma}_{1,2}$ sono le matrici di Pauli della particella 1,2) quali sono le correzioni al primo ordine in λ delle energie degli stati di cui sopra (fondamentale e 1°eccitato).