ESERCIZI SVOLTI IN AULA
a cura di Stefano Patrì

1) Esercizio 3 del 03/6/1965, pag. 2 del file 1

Se indichiamo con A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$A = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, |x| < 2\Big\} ,$$

si ha che la probabilità richiesta $\mathcal{P}(|x| < 2)$ è data da

$$\mathcal{P}(|x| < 2) = \frac{\displaystyle\int_A |\psi(x, y, z)|^2 \, dx \, dy \, dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 \, dx \, dy \, dz} = \frac{\displaystyle\int_A |x| e^{-2x^2-2y^2-2z^2+2\sqrt{3}xy} \, dx \, dy \, dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |x| e^{-2x^2-2y^2-2z^2+2\sqrt{3}xy} \, dx \, dy \, dz} .$$

Per risolvere tali integrali, dobbiamo diagonalizzare la forma quadratica che compare all'esponente, dopo aver verificato che essa è definita negativa (si ricorda che l'integrale gaussiano è convergente se e solo se la forma quadratica all'esponente è definita negativa). Indicando con $\boldsymbol{r}$ il vettore $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, abbiamo che la forma quadratica $Q(\boldsymbol{r})$ all'esponente si scrive come $Q(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}^T Q \boldsymbol{r}$, dove Q denota la matrice simmetrica

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

e poiché gli autovalori di Q sono $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}, 2$, ovvero tutti e tre positivi, concludiamo che la forma quadratica risulta definita negativa.

Dagli autovalori $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2$ discendono gli autovettori normalizzati della matrice Q dati rispettivamente da

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

da cui si ottengono la matrice C che diagonalizza la forma quadratica

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e le equazioni del cambiamento di base $\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}'$, ovvero

$$\begin{cases} x = (1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{2})y' \\ y = (-1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{2})y' \\ z = z'. \end{cases}$$

Sostituendo in essi le equazioni del cambiamento di base, gli integrandi, com'è noto dalla teoria dell'algebra lineare, diventano

$$|x| e^{-2x^2-2y^2-2z^2+2\sqrt{3}xy} = \Big|(1/\sqrt{2})x' + (1/\sqrt{2})y'\Big| \, e^{-\lambda_1 x'^2 - \lambda_2 y'^2 - \lambda_3 z'^2},$$

il differenziale diventa $dx\,dy\,dz = dx'\,dy'\,dz'$ perché lo jacobiano del cambiamento di variabili coincide con il modulo del determinate di Q che vale 1 e il dominio d'integrazione A diventa il dominio A' dato da

$$A' = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x'+y'| < 2\sqrt{2}\Big\}\,.$$

Osservando che il cambiamento di base (rotazione) indotto dalla matrice C non altera il dominio d'integrazione $\mathbb{R}^3$, risolviamo prima l'integrale su tutto $\mathbb{R}^3$.

Abbiamo dunque (omettendo gli apici)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x| e^{-2x^2-2y^2-2z^2+2\sqrt{3}xy}\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right| e^{-\lambda_1 x'^2-\lambda_2 y'^2-\lambda_3 z'^2}\,dx'\,dy'\,dz' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^3} |x+y|\, e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_{D_+} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz - \int_{D_-} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz\right],$$

dove D_+ e D_- denotano gli insiemi

$$D_+ = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y > 0\Big\} \qquad \text{e} \qquad D_- = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y < 0\Big\}\,.$$

Segue pertanto (per il teorema di Fubini-Tonelli)

$$\int_{D_+} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{D_+} x\, e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz + \int_{D_+} y\, e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_2 y^2} dy \int_{-y}^{\infty} x\, e^{-\lambda_1 x^2} dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 x^2} dx \int_{-x}^{\infty} y\, e^{-\lambda_2 y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y^2} dy + \frac{1}{2\lambda_2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x^2} dx =$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\pi}{2\lambda_1\lambda_2\sqrt{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)}}\,.$$

In modo del tutto analogo si ottiene l'integrale sul dominio D_-

$$\int_{D_-} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz = -\,\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\pi}{2\lambda_1\lambda_2\sqrt{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)}}\,,$$

da cui segue dunque in conclusione l'integrale su tutto $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x| e^{-2x^2-2y^2-2z^2+2\sqrt{3}xy}\,dx\,dy\,dz = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\pi}{\lambda_1\lambda_2\sqrt{2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)}}\,.$$

Con lo stesso procedimento, risolviamo l'integrale su A

$$\int_{A} |x| e^{-2x^2-2y^2-2z^2+2\sqrt{3}xy}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{A'} |x+y|\, e^{-\lambda_1 x^2-\lambda_2 y^2-\lambda_3 z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_{S_+} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2} \, dx \, dy \, dz - \int_{S_-} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2} \, dx \, dy \, dz \right],$$

dove S_+ e S_- denotano gli insiemi

$$S_+ = \Big\{ (x, y, z) \; : \; 0 < x + y < 2\sqrt{2} \Big\},$$

$$S_- = \Big\{ (x, y, z) \; : \; -2\sqrt{2} < x + y < 0 \Big\}.$$

Segue pertanto

$$\int_{S_+} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_{S_+} x \, e^{-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2} \, dx \, dy \, dz + \int_{S_+} y \, e^{-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_2 y^2} dy \int_{-y}^{2\sqrt{2}-y} x \, e^{-\lambda_1 x^2} dx +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_1 x^2} dx \int_{-x}^{2\sqrt{2}-x} y \, e^{-\lambda_2 y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_1} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y^2} \, dy - \int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y^2 + 4\sqrt{2}\lambda_1 y - 8\lambda_1} \, dy \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda_2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_3 z^2} dz \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2) x^2} \, dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-(\lambda_1+\lambda_2) x^2 + 4\sqrt{2}\lambda_1 x - 8\lambda_1} \, dx \right] =$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \left[1 - e^{-8\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)} \right] \pi}{2\lambda_1 \lambda_2 \sqrt{\lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2)}},$$

dove si è utilizzata l'identità degli integrali gaussiani (con a parametro reale e positivo)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-au^2 + bu + c} \, du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{b^2/(4a) + c}.$$

In modo del tutto analogo si ottiene l'integrale sul dominio S_-

$$\int_{S_+} (x+y) e^{-\lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2} \, dx \, dy \, dz = - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \left[1 - e^{-8\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)} \right] \pi}{2\lambda_1 \lambda_2 \sqrt{\lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2)}},$$

da cui segue dunque in conclusione l'integrale su A

$$\int_A |x| e^{-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{3}xy} \, dx \, dy \, dz = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \left[1 - e^{-8\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)} \right] \pi}{\lambda_1 \lambda_2 \sqrt{2\lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2)}}$$

e infine la probabilità richiesta (in cui sostituiamo $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$)

$$\mathcal{P}(|x| < 2) = \frac{\displaystyle\int_A |x| e^{-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{3}xy} \, dx \, dy \, dz}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |x| e^{-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{3}xy} \, dx \, dy \, dz} = 1 - e^{-\frac{8\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 86.5\,\%.$$

2) Esercizio 1 del 26/01/1985, pag. 13 del file 2

In realtà consideriamo una "piccola" variazione di questo esercizio ed in particolare rispondiamo alle medesime domande di questo esercizio in cui però si consideri una particella di spin zero vincolata a muoversi su una superficie sferica di raggio R e lo stato iniziale (diverso rispetto a quello assegnato)

$$\psi(x,y,z) = N\left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y}{R}\right),$$

con N costante di normalizzazione.

a,b) Per determinare i risultati possibili di una misura di $\boldsymbol{L}^2$ e L_z, con rispettive probabilità, dobbiamo esprimere lo stato iniziale come combinazione lineare di autostati dei due operatori associati alle osservabili da misurare. Passando alle coordinate polari, abbiamo

$$\psi(r,\theta,\varphi) = N\left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y}{R}\right) = N\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\sin\varphi\right) =$$
$$= N\left(e^{2i\varphi}\sin^2\theta + e^{-2i\varphi}\sin^2\theta + 2\sin^2\theta - 2ie^{i\varphi}\sin\theta + 2ie^{-i\varphi}\sin\theta\right),$$

in cui è stato eliminato il fattor comune $1/4$. Sostituendo le espressioni

$$e^{2i\varphi}\sin^2\theta = 4\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\,Y_{2,2}\,, \quad e^{-2i\varphi}\sin^2\theta = 4\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\,Y_{2,-2}\,, \quad \sin^2\theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,Y_{2,0}\,,$$

$$e^{i\varphi}\sin\theta = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_{1,1}\,, \qquad e^{-i\varphi}\sin\theta = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_{1,-1}\,,$$

dove le $Y_{l,m}$ sono le armoniche sferiche, otteniamo lo stato iniziale normalizzato

$$|\psi,0\rangle = \frac{1}{4}|2,2\rangle - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|2,0\rangle + \frac{1}{4}|2,-2\rangle + \frac{i\sqrt{5}}{4}|1,1\rangle + \frac{i\sqrt{5}}{4}|1,-1\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}\,|0,0\rangle.$$

Ora, una misura di $\boldsymbol{L}^2$ può dare solo i valori (riferendoci al numero quantico l)

$$l = 2 \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathcal{P}(2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{6}\,,$$

$$l = 1 \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathcal{P}(1) = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}\,,$$

$$l = 0 \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathcal{P}(0) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{5}{24}$$

e una misura di L_z può dare solo i valori

$$l_z = 2\hbar \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathbb{P}(2\hbar) = \frac{1}{16}\,,$$

$$l_z = \hbar \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathbb{P}(\hbar) = \frac{5}{16}\,,$$

$$l_z = 0 \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathbb{P}(0) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{1}{4}\,,$$

$$l_z = -\hbar \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathbb{P}(-\hbar) = \frac{5}{16}\,,$$

$$l_z = -2\hbar \qquad \text{con probabilità} \qquad \mathbb{P}(-2\hbar) = \frac{1}{16}\,.$$

c) Se l'hamiltoniana è $H = gL_z$, lo stato $|\psi, t\rangle$ al tempo $t > 0$ è dato da

$$|\psi, t\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi, 0\rangle =$$

$$= \frac{e^{-2igt}}{4}\,|2,2\rangle - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|2,0\rangle + \frac{e^{2igt}}{4}\,|2,-2\rangle + \frac{i\,e^{-igt}\sqrt{5}}{4}\,|1,1\rangle + \frac{i\,e^{igt}\sqrt{5}}{4}\,|1,-1\rangle + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}\,|0,0\rangle.$$

d) Poiché L_x e L_y si esprimono come $L_x = (L_+ + L_-)/2$ e $L_y = (L_+ - L_-)/(2i)$, segue che $L_x|\psi, t\rangle$ e $L_y|\psi, t\rangle$ sono combinazione lineare delle armoniche sferiche $|2, 1\rangle$, $|2, -1\rangle$ e $|1, 0\rangle$ e allora concludiamo che $L_x|\psi, t\rangle$ e $L_y|\psi, t\rangle$ risultano ortogonali allo stato $|\psi, t\rangle$ e dunque i valori medi $\langle L_x\rangle(t)$ e $\langle L_y\rangle(t)$ sullo stato $|\psi, t\rangle$ sono nulli.

Anche il valor medio $\langle L_z\rangle(t)$ sullo stato $|\psi, t\rangle$ risulta nullo perché abbiamo

$$\langle L_z\rangle(t) = \langle\psi, t|L_z|\psi, t\rangle = \sum l_z\mathbb{P}(l_z) = \frac{1}{16}\,2\hbar + \frac{5}{16}\,\hbar + \frac{5}{16}\,(-\hbar) + \frac{1}{16}\,(-2\hbar) = 0.$$

Se aggiungiamo la richiesta del calcolo del valor medio di L_x^2 sul medesimo stato $|\psi, t\rangle$, abbiamo allora

$$\langle L_x^2\rangle(t) = \langle\psi, t|L_x^2|\psi, t\rangle = \langle\psi, t|L_x\, L_x|\psi, t\rangle = \Big|\; L_x|\psi, t\rangle\;\Big|^2 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{16}\left|\left(e^{-2igt} - 1\right)|2,1\rangle + \left(e^{2igt} - 1\right)|2,-1\rangle + \frac{i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\left(e^{igt} + e^{-igt}\right)|1,0\rangle\right|^2 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{16}\left(\left|e^{-2igt} - 1\right|^2 + \left|e^{2igt} - 1\right|^2 + 10\cos^2 gt\right) = \frac{\hbar^2}{8}\left(2 - 2\cos 2gt + 5\cos^2 gt\right),$$

che non è sorprendente che dipenda da t perché è il valor medio di L_x^2, ovvero di un operatore che non commuta con l'hamiltoniana, multiplo di L_z.

SI LASCIA COME ESERCIZIO DI RISPONDERE ALLE MEDESIME DOMANDE c,d NEL CASO IN CUI L'HAMILTONIANA SIA $H = \alpha\boldsymbol{L}^2 + gL_z$.

3) Esercizio 2 dell'11/6/1973, pag. 14 del file 1

Riscriviamo l'hamiltoniana (che nel file si legge "male")

$$H = \frac{\boldsymbol{L}^2}{2I} + gBL_z\,.$$

Poiché in $t = 0$ il rotatore si trova in un autostato di $\boldsymbol{L}^2$ con autovalore $2\hbar^2$, deduciamo che il sistema si trova nel sottospazio generato dalla base $\mathcal{B} = \{\,|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\,\}$, in cui l'operatore $\boldsymbol{L}^2$ agisce come identità[1]. Poiché dunque qualsiasi vettore del sottospazio di base $\mathcal{B}$ risulta essere autovettore di $\boldsymbol{L}^2$, segue che in tale sottospazio l'autovettore, ovvero lo stato iniziale $|\psi, 0\rangle$, viene determinato univocamente dalla richiesta che esso sia autostato anche del secondo operatore $A = (L_x + L_z)/\sqrt{2}$ relativo all'autovalore $\lambda = \hbar$.

La matrice associata all'operatore A relativamente alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che possiede in effetti l'autovalore $\lambda = \hbar$ a cui corrisponde l'autovettore normalizzato

$$|\psi, 0\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)|1,-1\rangle,$$

coincidente quindi con lo stato iniziale. Tale stato iniziale non è autostato dell'hamiltoniana, ma solo combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana relativi agli autovalori rispettivamente $\mathcal{E}_+ = \hbar^2/I + gB\hbar$, $\mathcal{E}_0 = \hbar^2/I$, $\mathcal{E}_- = \hbar^2/I - gB\hbar$ perché valgono le equazioni secolari

$$H|1,1\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right)|1,1\rangle, \quad H|1,0\rangle = \frac{\hbar^2}{I}|1,0\rangle, \quad H|1,-1\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right)|1,-1\rangle.$$

Segue pertanto lo stato al tempo $t > 0$

$$|\psi, t\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{-i\omega t}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{i\omega t}|1,-1\rangle,$$

dove è stato trascurato un fattore di fase scritto a fattor comune e si è posto $\omega = gB$.

Il valor medio dell'energia (coincidente, come sappiamo, con quello calcolato in $t = 0$) è pertanto $\langle H\rangle = \sum \mathcal{E}_i \mathbb{P}(\mathcal{E}_i)$ dato da

$$\langle H\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{I} + gB\hbar\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{4I} + \left(\frac{\hbar^2}{I} - gB\hbar\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{gB\hbar}{\sqrt{2}}\,.$$

[1] Il contenuto di questa nota non ha la pretesa di essere comprensibile e forse apparirà alquanto sibillino. Il motivo per cui nel sottospazio generato dalla base $\mathcal{B}$ l'operatore $\boldsymbol{L}^2$ agisce come identità si comprende nell'ambito della teoria dei gruppi, ancora non meglio illustrata. Poiché $\boldsymbol{L}^2$ commuta con le tre componenti L_i, che appunto nella teoria dei gruppi sono i generatori del gruppo delle rotazioni, o, per meglio dire, sono i generatori della rappresentazione del gruppo delle rotazioni, segue allora, in virtù di quello che viene chiamato *lemma di Schur*, che $\boldsymbol{L}^2$ è multiplo dell'identità

Per calcolare il valor medio di L_x sullo stato $|\psi, t\rangle$, calcoliamo

$$L_x|\psi,t\rangle = L_x\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{-i\omega t}|1,1\rangle + \frac{1}{2}\,|1,0\rangle + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{i\omega t}|1,-1\rangle\right] =$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[|1,1\rangle + (2\cos\omega t - i\sqrt{2}\sin\omega t)|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right],$$

da cui segue in conclusione il valor medio di L_x sullo stato $|\psi, t\rangle$

$$\langle L_x\rangle = \langle\psi,t|L_x|\psi,t\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\cos\omega t.$$

4) Esercizio 2 del 05/4/1978, pag. 33 del file 1

Se nello stato iniziale sostituiamo la coordinata polare sferica $z = r\cos\theta$ e inoltre

$$e^{-r/a_0} = \frac{a_0^{3/2}}{2}\,R_{10}\,, \qquad \frac{r}{a_0}\,e^{-r/(2a_0)} = 2a_0^{3/2}\,\sqrt{6}\,R_{21}\,, \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1,0}\,,$$

lo stato iniziale assume la forma normalizzata

$$|\Psi,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\psi_{100}\rangle + i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\psi_{210}\rangle\,,$$

da cui segue che una misura di $\boldsymbol{L}^2$ può dare solo i valori $l = 0$ con probabilità 1/3 e $l = 1$ con probabilità 2/3. Una misura di L_z può dare solo il valore $m = 0$ con probabilità 1, dove i numeri quantici l, m si ricavano dall'autofunzione ψ_{nlm} dell'atomo d'idrogeno.

Poiché $E_{100} = -me^4/(2\hbar^2)$ e $E_{210} = -me^4/(8\hbar^2)$, lo stato al generico tempo $t > 0$ è

$$|\Psi,t\rangle = \frac{e^{3i\omega t}}{\sqrt{3}}\,|\psi_{100}\rangle + i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\psi_{210}\rangle\,,$$

dove si è posto $\omega = me^4/(8\hbar^3)$ ed è stato trascurato un irrilevante fattore di fase globale.

Il valor medio di $\hat{z}$ al generico tempo $t > 0$ è dunque (tenendo presente che le autofunzioni ψ_{100} e ψ_{210} dell'atomo d'idrogeno sono reali e scrivendo a invece di a_0)

$$\langle\hat{z}\rangle = \langle\Psi,t|\hat{z}|\Psi,t\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{e^{-3i\omega t}}{\sqrt{3}}\,\psi_{100} - i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_{210}\right) z \left(\frac{e^{3i\omega t}}{\sqrt{3}}\,\psi_{100} + i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_{210}\right) d\boldsymbol{r} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{z\,e^{-2r/a}}{3\pi a^3} + \frac{z\,r^2\,e^{-r/a}\cos^2\theta}{48\pi a^5} + \frac{z\,r\,\sin 3\omega t\,\cos\theta\,e^{-3r/(2a)}}{6\pi a^4}\right] d\boldsymbol{r} = \frac{512}{729}\,a\,\sin 3\omega t,$$

dove sono state utilizzate le identità

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,u^n\,du = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \qquad \text{e} \qquad \int_0^\pi (\cos\theta)^{2k+1}\,\sin\theta\,d\theta = 0.$$

5) Esercizio 1 dell'08/6/1994, pag. 54 del file 2

Scriviamo l'hamiltoniana nella forma strutturalmente equivalente

$$H = \frac{\alpha}{2\hbar^2}\,\boldsymbol{L}^2 + \frac{g}{2\hbar}(L_x + 2S_x)$$

e lo stato iniziale nella forma normalizzata

$$|\psi,0\rangle = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \quad\longrightarrow\quad |\psi,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos\theta\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\cos\theta\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

che in termini di armoniche sferiche diventa

$$|\psi,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Per scrivere lo stato al tempo $t > 0$, dobbiamo esprimere lo stato iniziale come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana.

Nella base $\mathcal{B}_L = \{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$, gli autovalori dell'operatore

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

sono $\lambda = \hbar, 0, -\hbar$, a cui corrispondono gli autovettori normalizzati rispettivamente

$$|L_x^+\rangle = \begin{pmatrix}1/2\\ 1/\sqrt{2}\\ 1/2\end{pmatrix}, \qquad |L_x^0\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad |L_x^-\rangle = \begin{pmatrix}1/2\\ -1/\sqrt{2}\\ 1/2\end{pmatrix}.$$

Segue dunque

$$|1,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/2\\ 1/\sqrt{2}\\ 1/2\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/2\\ -1/\sqrt{2}\\ 1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^-\rangle.$$

Analogamente, nella base

$$\mathcal{B}_S = \left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right\},$$

gli autovalori dell'operatore

$$2S_x = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

sono $\lambda = \hbar, -\hbar$, a cui corrispondono gli autovettori normalizzati rispettivamente

$$|S_x^+\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad |S_x^-\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x^+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x^-\rangle$$

e

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x^-\rangle,$$

da cui, se sostituiamo nello stato iniziale, segue

$$|\psi,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\left[\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right],$$

ovvero

$$|\psi,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle.$$

Dalle equazioni secolari

$$H|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle = (\alpha+g)|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle \qquad \text{e} \qquad H|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle = \alpha|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle$$

segue lo stato al tempo $t>0$ (con $\omega = g/\hbar$ e la semplificazione di un fattore di fase globale)

$$|\psi,t\rangle = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\,|L_x^+\rangle|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|L_x^-\rangle|S_x^+\rangle.$$

Con la sostituzione di

$$|L_x^+\rangle = \frac{1}{2}\,|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle + \frac{1}{2}\,|1,-1\rangle \qquad \text{e} \qquad |L_x^-\rangle = \frac{1}{2}\,|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle + \frac{1}{2}\,|1,-1\rangle$$

e

$$|S_x^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

si ottiene lo stato al tempo t in termini di autostati di L_z, S_z

$$\begin{aligned}|\psi,t\rangle = &\left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+\left(\frac{e^{-i\omega t}+1}{2\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t}+1}{2\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+\left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)|1,-1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.\end{aligned}$$

A questo punto, una misura di L_z può dare i risultati

$$\begin{aligned} l_z = \hbar \quad &\text{con probabilità} \quad \mathbb{P}(\hbar) = 2\left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{4}\,,\\ l_z = 0 \quad &\text{con probabilità} \quad \mathbb{P}(0) = 2\left|\frac{e^{-i\omega t}+1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1+\cos\omega t}{2}\,,\\ l_z = -\hbar \quad &\text{con probabilità} \quad \mathbb{P}(\hbar) = 2\left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{4}\,.\end{aligned}$$

Per determinare i valori di una misura di J_z, esprimiamo lo stato $|\psi,t\rangle$ nella base degli autostati simultanei $|l,s;j,j_z\rangle$ degli operatori $\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{S}^2, \boldsymbol{J}^2, J_z$.

Utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan, otteniamo

$$\begin{aligned}|\psi,t\rangle = &\left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)\left|1,\frac{1}{2};\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle + \left(\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right)\left|1,\frac{1}{2};\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1,\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \\ &+\left(\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right)\left|1,\frac{1}{2};\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \left(\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right)\left|1,\frac{1}{2};\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\left|1,\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\end{aligned}$$

da cui si deducono i valori e le probabilità di una misura di J_z

$$J_z = \frac{3}{2}\,\hbar \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(\frac{3}{2}\,\hbar\right) = \left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{8}\,,$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2} \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right|^2 + \frac{1}{6} = \frac{3+\cos\omega t}{8}\,,$$

$$J_z = -\,\frac{\hbar}{2} \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(-\,\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\frac{3e^{-i\omega t}+1}{4\sqrt{3}}\right|^2 + \frac{1}{6} = \frac{3+\cos\omega t}{8}\,,$$

$$J_z = -\,\frac{3}{2}\,\hbar \quad \text{con probabilità} \quad \mathbb{P}\left(-\,\frac{3}{2}\,\hbar\right) = \left|\frac{e^{-i\omega t}-1}{4}\right|^2 = \frac{1-\cos\omega t}{8}\,.$$

ESAME DI MECCANICA QUANTISTICA del giorno 10/11/2014

Esercizio 6. La funzione d'onda di un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω è data da:

$$\psi(x) = N\left(1 + e^{i\phi} - \frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}},$$

dove N è una costante di normalizzazione.

1. Determinare lo stato $|\psi\rangle$ normalizzato corrispondente alla funzione d'onda data e determinare quali sono i valori possibili che si possono ottenere in una misura dell'energia e le relative probabilità.
2. Calcolare il commutatore dell'operatore $\mathcal{O} = (xp + px)/2$ con l'hamiltoniana.
3. Determinare il valore dell'angolo ϕ in modo che risulti massimo il valore di aspettazione dell'operatore $\mathcal{O}$ sullo stato $|\psi\rangle$.

Esercizio 7. Si consideri un sistema composto da due elettroni indistinguibili A e B di spin 1/2, massa m e carica elettrica q che si muovono nello spazio soggetti alla seguente Hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_A} - \frac{Ze^2}{r_B} - \frac{\alpha}{\hbar}(S_z^A + S_z^B)\ ;$$

con $Z = 2$, $e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$, $\alpha = E_I/10$ essendo $E_I = Z^2 me^4/2\hbar^2$. Le distanze r_A e r_B sono riferite all'origine delle cooordinate. Il sistema si trova al tempo $t = 0^-$ in uno stato per il quale una misura dell'energia darebbe con certezza il valore $E_{in} = -(5/4)E_I - \alpha$.

1. Determinare i possibili stati $|\phi_i\rangle$ che soddisfano la condizione data ed indicarne il numero.

Al tempo $t = 0$ è istantaneamente modificata l' hamiltoniana che diventa:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_A} - \frac{Ze^2}{r_B} - \frac{\alpha}{\hbar}(S_x^A + S_x^B).$$

2. Calcolate la probabilità che una misura dell'energia dia per $t = 0+$ lo stesso valore E_{in}.
3. Calcolare per $t > 0$ il valore di aspettazione dell'energia del sistema sullo stato $|\phi_i(t)\rangle$.
4. Scrivere esplicitamente la matrice $S_x^A + S_x^B$ nella base $|s, s_z\rangle_A |s, s_z\rangle_B$.

Soluzione dell'esercizio 6

1) Poiché lo stato $\psi(x)$ è il prodotto dell'esponenziale standard per un polinomio di secondo grado che non contiene il termine lineare, si riconosce immediatamente che tale stato è combinazione lineare dello stato fondamentale $\psi_0(x)$ e del secondo stato eccitato $\psi_2(x)$ dell'oscillatore armonico

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \qquad \text{e} \qquad \psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\left(\frac{4m\omega x^2}{\hbar} - 2\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}.$$

A questo punto allora, moltiplicando e dividendo, sommando e sottraendo termini opportuni, otteniamo

$$\psi(x) = N\left(1 + e^{i\phi} - \frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} =$$

$$= N\left(1 + e^{i\phi}\right)\sqrt[4]{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}\,\psi_0(x) - \frac{2Nm\omega x^2}{\hbar}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} =$$

$$= N\left(1 + e^{i\phi}\right)\sqrt[4]{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}\,\psi_0(x) - \frac{N}{2}\left(\frac{4m\omega x^2}{\hbar} - 2\right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} - N\sqrt[4]{\frac{\hbar\pi}{m\omega}}\,\psi_0(x) =$$

$$= N\left[e^{i\phi}\,\psi_0(x) - \sqrt{2}\,\psi_2(x)\right],$$

da cui segue che lo stato normalizato è

$$\psi(x) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}}\,\psi_0(x) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\psi_2(x),$$

riscrivibile nella forma

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}}\,\langle x|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\langle x|2\rangle$$

che permette di porre lo stato nella forma di ket

$$|\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\rangle.$$

In tale stato una misura di energia può fornire i due soli risultati $E_0 = \hbar\omega/2$ con probabilità $P(E_0) = 1/3$ e $E_2 = 5\hbar\omega/2$ con probabilità $P(E_2) = 2/3$.

2) Dalle espressioni degli operatori x, p

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a^\dagger + a) \qquad \text{e} \qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a^\dagger - a) \tag{1}$$

e dai commutatori canonici $xp - px = [x, p] = i\hbar$ e $\left[a, a^\dagger\right] = 1$ ricaviamo

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2}(xp + px) = \frac{1}{2}(px + [x,p] + px) = \frac{1}{2}(i\hbar + 2px) = \frac{i\hbar}{2} + px =$$

$$= \frac{i\hbar}{2} + \frac{i\hbar}{2}\left[a^\dagger a^\dagger - \left(aa^\dagger - a^\dagger a\right) - aa\right] =$$

$$= \frac{i\hbar}{2} + \frac{i\hbar}{2}\left(a^\dagger a^\dagger - \left[a, a^\dagger\right] - aa\right) = \frac{i\hbar}{2}\left(a^\dagger a^\dagger - aa\right).$$

Il commutatore dell'hamiltoniana con l'operatore $\mathcal{O}$ può essere calcolato in due modi equivalenti che ovviamente forniranno il medesimo risultato

$$[H,\mathcal{O}] = \frac{i\hbar^2\omega}{2}\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}, a^\dagger a^\dagger - aa\right] \qquad \text{e} \qquad [H,\mathcal{O}] = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \frac{px+xp}{2}\right].$$

Con il primo metodo otteniamo

$$[H,\mathcal{O}] = \frac{i\hbar^2\omega}{2}\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}, a^\dagger a^\dagger - aa\right] = \frac{i\hbar^2\omega}{2}\left(\left[a^\dagger a, a^\dagger a^\dagger\right] - \left[a^\dagger a, aa\right]\right) =$$

$$= \frac{i\hbar^2\omega}{2}\left(a^\dagger\left[a, a^\dagger a^\dagger\right] - \left[a^\dagger, aa\right]a\right) =$$

$$= \frac{i\hbar^2\omega}{2}\left(a^\dagger a^\dagger\left[a, a^\dagger\right] + a^\dagger\left[a, a^\dagger\right]a^\dagger - a\left[a^\dagger, a\right]a - \left[a^\dagger, a\right]aa\right) = i\hbar^2\omega\,(a^\dagger a^\dagger + aa).$$

Con il secondo metodo otteniamo

$$[H,\mathcal{O}] = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \frac{px+xp}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4m}\Big([p^2, xp] + [p^2, px]\Big) + \frac{m\omega^2}{4}\Big([x^2, xp] + [x^2, px]\Big) =$$

$$= \frac{1}{4m}\Big(p[p,x]p + [p,x]pp + pp[p,x] + p[p,x]p\Big) +$$

$$+ \frac{m\omega^2}{4}\Big(xx[x,p] + x[x,p]x + x[x,p]x + [x,p]xx\Big) = i\hbar\left(m\omega^2 x^2 - \frac{p^2}{m}\right)$$

che, con la sostituzione delle espressioni (1), fornisce il medesimo risultato ricavato con il primo metodo

$$[H,\mathcal{O}] = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \frac{px+xp}{2}\right] = i\hbar\left(m\omega^2 x^2 - \frac{p^2}{m}\right) = i\hbar^2\omega\,(a^\dagger a^\dagger + aa).$$

3) Utilizzando le azioni operatoriali

$$a^\dagger a^\dagger|0\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle \qquad \text{e} \qquad aa|2\rangle = \sqrt{2}\,|0\rangle,$$

otteniamo il valor medio dell'operatore $\mathcal{O}$

$$\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle = \frac{i\hbar}{2}\left(\langle 0|\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{3}} - \langle 2|\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(a^\dagger a^\dagger - aa\right)\left(\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{3}}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\rangle\right) = \frac{2\hbar}{3}\sin\phi.$$

Il valor medio dell'operatore $\mathcal{O}$ sullo stato $|\psi\rangle$ è massimo quando $\sin\phi = 1$, ovvero per $\phi = \pi/2$ in corrispondenza del quale lo stato $|\psi\rangle$ è

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}\,|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\rangle.$$

Soluzione dell'esercizio 7

1) Riscriviamo l'hamiltoniana $\mathcal{H}_1$ nella forma (con ovvio significato dei simboli)

$$\mathcal{H}_1 = \left(\frac{\mathbf{p}_A^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_A}\right) + \left(\frac{\mathbf{p}_B^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_B}\right) - \frac{\alpha}{\hbar} S_z = h_A + h_B - \frac{\alpha}{\hbar} S_z,$$

dove si ponga $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^A + \boldsymbol{S}^B$, da cui segue che il numero quantico s assume i due possibili valori $s = 0, 1$ e $S_z = S_z^A + S_z^B$. Riconosciamo che h_A, h_B sono due hamiltoniane di atomo di idrogeno di singola particella per ciascuno dei due elettroni e quindi gli autovalori di $\mathcal{H}_1$ sono

$$E_{n_A,n_B} = -E_I \left(\frac{1}{n_A^2} + \frac{1}{n_B^2}\right) - \alpha s_z\,,$$

mentre le autofunzioni sono date dal prodotto tensoriale di due autofunzioni di atomo d'idrogeno moltiplicate ancora per la parte di spin, opportunamente antisimmetrizzate perché esse debbono essere totalmente antisimmetriche per scambio delle due particelle (che costituiscono un sistema di fermioni di spin 1/2).

Poiché il risultato di una misura dell'energia all'istante di tempo $t = 0^-$ sarebbe l'autovalore $E_{in} = -(5/4)E_I - \alpha$, segue che, in conseguenza della misura, il sistema *collassa* istantaneamente nell'autostato $|\Phi\rangle$ corrispondente ai numeri quantici $s_z = 1$, con $n_A = 1$, $n_B = 2$ oppure con $n_A = 2$, $n_B = 1$.

Poiché $s_z = 1$ implica $s = 1$, concludiamo che la parte di spin dell'autostato in cui *precipita* il sistema a seguito della misura risulta simmetrica nello scambio dei due elettroni e quindi la parte spaziale dell'autostato $|\Phi\rangle$ deve essere antisimmetrica nello scambio dei due elettroni (affinché lo stato $|\Phi\rangle$ risulti complessivamente antisimmetrico nello scambio). Pertanto la misura dell'energia produrrebbe il collasso verso l'autostato $|\Phi\rangle$ di $\mathcal{H}_1$, combinazione lineare degli autostati (degeneri) $|\phi_i\rangle$

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi^A_{1,0,0}(r,\theta,\varphi)\psi^B_{2,l,m}(r,\theta,\varphi) - \psi^A_{2,l,m}(r,\theta,\varphi)\psi^B_{1,0,0}(r,\theta,\varphi)\right]\left|\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,;\,1,1\right\rangle,$$

che sono quattro autostati tutti relativi all'autovalore E_{in}, dei quali uno con $l = 0$ e tre con $l = 1$. Dunque, l'autostato dell'hamiltoniana $\mathcal{H}_1$ in cui *collassa* il sistema in conseguenza della misura appartiene ad un autospazio degenere di dimensione 4.

Pertanto, per determinare univocamente tale autostato, occorrerebbe assegnare il numero quantico (autovalore) di tutti gli operatori che commutano con $\mathcal{H}_1$ (insieme completo di operatori). Per semplicità riscriviamo le parti spaziali ortonormalizzate di tutti gli autostati $|\phi_i\rangle$ nella forma (più sintetica)

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1,0,0\rangle_A\,|2,0,0\rangle_B - |2,0,0\rangle_A\,|1,0,0\rangle_B\Big)\,, \tag{2a}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1,0,0\rangle_A\,|2,1,1\rangle_B - |2,1,1\rangle_A\,|1,0,0\rangle_B\Big)\,, \tag{2b}$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1,0,0\rangle_A\,|2,1,0\rangle_B - |2,1,0\rangle_A\,|1,0,0\rangle_B\Big)\,, \tag{2c}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1,0,0\rangle_A\,|2,1,-1\rangle_B - |2,1,-1\rangle_A\,|1,0,0\rangle_B\Big)\,, \tag{2d}$$

in modo tale che l'autostato $|\Phi\rangle$ nel quale *collassa* il sistema in conseguenza della misura sia scrivibile nella forma (con $\sum |c_i|^2 = 1$)

$$|\Phi\rangle = \left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right) \left|\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,;\,1,1\right\rangle. \tag{3}$$

2) Se il sistema, a seguito di una misura dell'energia effettuata in $t = 0^-$, *collassa* in un certo autostato $|\Phi\rangle$ dall'hamiltoniana $\mathcal{H}_1$ e poi in $t = 0$ l'hamiltoniana diventa istantaneamente $\mathcal{H}_2 = h_A + h_B - \alpha S_x/\hbar$, segue che lo stato $|\Phi\rangle$, dato dalla (3), rappresenta lo stato iniziale del sistema descritto, per $t > 0$, dall'hamiltoniana $\mathcal{H}_2$.

Per determinare la probabilità richiesta, dobbiamo quindi esprimere $|\Phi\rangle$ come combinazione lineare di autostati di $\mathcal{H}_2$. Poiché la parte spaziale di $\mathcal{H}_2$ coincide con la parte spaziale di $\mathcal{H}_1$ (in quanto le due hamiltoniane differiscono solo per la parte di spin), gli autostati di $\mathcal{H}_2$ avranno la parte spaziale coincidente con la parte spaziale degli autostati di $\mathcal{H}_1$ e allora dobbiamo solo esprimere gli autostati di S_x nella base degli autostati di $\boldsymbol{S}^2, S_z$. Se indichiamo lo spinore di tipo $|s^A, s^B; s, s_z\rangle$ contenuto nella (3) solo con gli ultimi due numeri quantici, ovvero solo con $|s, s_z\rangle$, abbiamo che lo stato $|\Phi\rangle$ dato dalla (3) contiene lo spinore $|1, 1\rangle$ e quindi il sottospazio che ci interessa è quello individuato dalla base degli spinori $|1, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$,$|1, -1\rangle$.

Se calcoliamo l'azione dell'operatore $S_x = (S_+ + S_-)/2$ sui vettori di base, otteniamo la nota rappresentazione matriciale di S_x rispetto alla base degli autostati simultanei di $\boldsymbol{S}^2, S_z$

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avente autovalori $\hbar, 0, -\hbar$ a cui corrispondono gli autovettori normalizzati rispettivamente

$$|S_x^+\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad |S_x^0\rangle = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad |S_x^-\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nella base degli spinori $|1, 1\rangle$, $|1, 0\rangle$,$|1, -1\rangle$, lo spinore iniziale $|1, 1\rangle$ si scrive allora nella forma vettoriale $|1, 1\rangle = (1, 0, 0)$ e si esprime mediante la combinazione lineare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

di autostati di S_x, ovvero

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{2}\,|S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x^0\rangle + \frac{1}{2}\,|S_x^-\rangle,$$

da cui segue che lo stato iniziale $|\Phi\rangle$ nella (3) è dato dalla seguente combinazione lineare di autostati di $\mathcal{H}_2$

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right) |1, 1\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right) |S_x^+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right) |S_x^0\rangle + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right) |S_x^-\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Gli stati

$$|\Psi^{(+)}\rangle = \left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right)\left|S_x^+\right\rangle , \qquad |\Psi^{(0)}\rangle = \left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right)\left|S_x^0\right\rangle ,$$

$$|\Psi^{(-)}\rangle = \left(\sum_{i=1}^{4} c_i|\psi_i\rangle\right)\left|S_x^-\right\rangle$$

sono autostati di $\mathcal{H}_2$ relativi agli autovalori rispettivamente

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{5}{4}E_I - \alpha, \qquad \mathcal{E}_2 = -\frac{5}{4}E_I, \qquad \mathcal{E}_3 = -\frac{5}{4}E_I + \alpha \tag{5}$$

e quindi la probabilità $\mathcal{P}$ di ottenere il medesimo valore $E_{in} = -(5/4)E_I - \alpha$ da una misura dell'energia all'istante $t = 0^+$ è data dal modulo quadro del coefficiente dell'autostato $|\Psi^{(+)}\rangle$ nella combinazione lineare (4), ovvero $\mathcal{P}(\mathcal{E}_1) = 1/4$.

3) Se per le parti spaziali di $|\phi_i\rangle$ utilizziamo una delle espressioni (2) ed esprimiamo dunque lo iniziale $|\phi_i\rangle = |\psi_i\rangle|1,1\rangle$ come combinazione lineare di autostati dell'hamiltoniana $\mathcal{H}_2$ (energia per $t > 0$), otteniamo, in virtù della (4), l'espansione

$$|\phi_i\rangle = |\psi_i\rangle|1,1\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_i\rangle\left|S_x^+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_i\rangle\left|S_x^0\right\rangle + \frac{1}{2}\,|\psi_i\rangle|S_x^-\rangle,$$

da cui, tramite gli autovalori (5) dell'hamiltoniana $\mathcal{H}_2$, segue lo stato al tempo $t > 0$

$$|\phi_i, t\rangle = \frac{e^{i\omega t}}{2}\,|\psi_i\rangle\left|S_x^+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\psi_i\rangle\left|S_x^0\right\rangle + \frac{e^{-i\omega t}}{2}\,|\psi_i\rangle|S_x^-\rangle,$$

essendo stato posto $\omega = \alpha/\hbar$ ed essendo stato semplificato un irrilevante fattore di fase scritto a fattor comune. Il valore d'aspettazione dell'energia del sistema sullo stato $|\phi_i, t\rangle$ è infine dato da (ricordando che il valore d'aspettazione dell'energia risulta sempre indipendente dal tempo)

$$\langle\phi_i, t|\mathcal{H}_2|\phi_i, t\rangle = \langle\phi_i|\mathcal{H}_2|\phi_i\rangle = \sum \mathcal{E}_i\,\mathcal{P}(\mathcal{E}_i) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{5}{4}E_I - \alpha\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}E_I\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{5}{4}E_I + \alpha\right) = -\frac{5E_I}{4}\,.$$

4) Dopo aver la scritto la base $\mathcal{B}' = \{|s, s_z\rangle_A |s, s_z\rangle_B\}$ (indicata con $\mathcal{B}'$ per il motivo che apparirà chiaro più avanti) nella forma esplicita contenente quattro elementi perché i due elettroni hanno spin 1/2

$$\mathcal{B}' = \left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B ,\quad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B,\right.$$

$$\left.\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B ,\quad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B\right\},$$

dobbiamo calcolare l'azione dell'operatore dato $S_x^A + S_x^B$ su tali vettori di base e quindi, secondo la prescrizione dell'algebra lineare, incolonnare (prestando attenzione alle giuste sequenze) i coefficienti dei risultati. Ricordando che nella base degli autostati di $\boldsymbol{S}^2, S_z$ con spin 1/2, l'operatore di singola particella S_x agisce come $S_x = (\hbar/2)\sigma^1$ (dove σ^1 denota la prima matrice di Pauli) e che nel prodotto tensoriale gli operatori S_x^A, S_x^B agiscono separatamente solo sul ket con l'indice corrispondente, abbiamo le quattro azioni (in cui si ometta di riportare $\hbar$)

$$\left(S_x^A + S_x^B\right)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B ,$$

$$\left(S_x^A + S_x^B\right)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B ,$$

$$\left(S_x^A + S_x^B\right)\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B ,$$

$$\left(S_x^A + S_x^B\right)\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B ,$$

in virtù delle quali possiamo dunque scrivere in conclusione la matrice richiesta associata all'operatore dato $S_x^A + S_x^B$ rispetto alla base data $\mathcal{B}'$ (riportando anche $\hbar$)

$$S_x^A + S_x^B = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{6}$$

E' istruttivo determinare tale matrice (6) anche con un altro procedimento ed in particolare scrivendo prima la matrice associata all'operatore componente x dello spin totale $S_x = S_x^A + S_x^B$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{|s^A, s^B; s, s_z\rangle\right\}$ composta nell'ordine dai quattro elementi

$$\mathcal{B} = \left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,0,0\right\rangle , \quad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,1\right\rangle , \quad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,0\right\rangle , \quad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,-1\right\rangle\right\}$$

e quindi trasformando, tramite il cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, la matrice ottenuta. Poiché il primo vettore della base $\mathcal{B}$ è autostato di S_x con autovalore nullo e poiché l'operatore S_x (considerato ora dal punto di vista algebrico come operatore di singola particella) agisce nel sottospazio di spin 1 secondo la matrice

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

abbiamo, di conseguenza, le azioni sui vettori della base $\mathcal{B}$ (omettendo di scrivere $\hbar$)

$$S_x\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,0,0\right\rangle = 0, \quad S_x\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,0\right\rangle ,$$

$$S_x\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,-1\right\rangle ,$$

$$S_x\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,-1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,0\right\rangle,$$

in virtù delle quali possiamo scrivere la matrice associata all'operatore $S_x^A+S_x^B=S_x$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sempre incolonnando i coefficienti dei risultati

$$S_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

A questo punto effettuiamo il cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan per esprimere i vettori della base $\mathcal{B}'$ ("nuovi" vettori di base) come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$ ("vecchi" vettori di base). In particolare si hanno le espressioni

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,1\right\rangle,$$

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,0,0\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,0\right\rangle,$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle_B=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,0,0\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,0\right\rangle,$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_A\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle_B=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\,1,-1\right\rangle,$$

da cui, sempre incolonnando i coefficienti dei risultati, si ottengono la matrice $\mathcal{C}$ del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ e la sua inversa $\mathcal{C}^{-1}$ (coincidente con la sua trasposta perché il cambiamento di base effettuato collega due basi ortonormali)

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0\\1&0&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{C}^T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}&0\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

In conclusione quindi, dalla nota formula dell'algebra lineare che collega tra loro due diverse matrici associate ad un medesimo operatore lineare rispetto a due basi ortonormali distinte, otteniamo la matrice richiesta (6) in termini della matrice (7)

$$S_x^A+S_x^B=\mathcal{C}^T S_x\,\mathcal{C}.$$