Continuità

Oltre agli esercizi che seguono, svolgere gli esercizi 5.1.1, 5.2.2, 5.3.1, 5.4.2 dal libro di testo Bertsch-Dall'Aglio-Giacomelli.

Determinare il dominio delle seguenti funzioni e dire, giustificando la risposta, se sono estendibili con continuità nei punti nei quali non sono definite (ossia: se possono essere definite in tali punti in modo che la nuova funzione così ottenuta risulti continua).

1 $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{4}{2-x}$

2 $f(x) = \arctan \dfrac{4}{x-1} \operatorname{sen} \dfrac{3}{x^2-4}$

3 $f(x) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

4 $f(x) = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$

5 $f(x) = \left(2\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}}$

6 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

7 $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

8 $h(x) = \ln(|\operatorname{sen}(x)|) - \ln(|x|)$

9 Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x < 1, \\ ax+b & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Che relazione devono soddisfare i numeri reali a e b affinché f sia continua? Che relazione devono soddisfare a e b affinché f sia invertibile?

10 Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi(x+\ln(x)))}{\ln(x)} & \text{se } x \in (0,1), \\ a & \text{se } x = 0, \\ b & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Determinare a e b affinché f sia continua.

Determinare b in $\mathbb{R}$ in modo che le seguenti funzioni siano continue:

11 $f(x) = \begin{cases} |x-2| & x \leq 2, \\ -b+|x-5| & x > 2. \end{cases}$

12 $g(x) = \begin{cases} b\cos x & x < 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \geq 0, \end{cases}$

13 $h(x) = \begin{cases} 2^x + b & x \leq 2, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(4x-8)}{2b-b\,x} & x > 2, \end{cases}$

14 Sia

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\lambda}{(x-3)^2}\right) & \text{se } x \neq 3, \\ 0 & \text{se } x = 3. \end{cases} \qquad (\exp(x) = e^x)$$

Studiarne la discontinuità al variare di λ in $\mathbb{R}$.

15 (*) Dimostrare che una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ ammette sempre massimo assoluto oppure minimo assoluto.

16 Dire quante soluzioni ha l'equazione $\operatorname{tg} x = 1/x$.

17 Dire quante soluzioni ha l'equazione $\operatorname{arctg} x = e^{-x} + a$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

1 Risposte ad alcuni esercizi

9: f continua $\Leftrightarrow a+b=1$; f invertibile $\Leftrightarrow a>0$ e $a+b \geq 1$, oppure $a<0$ e $a+b \leq 0$; **10:** $a=0$, $b=-2\pi$; **11:** $b=3$; **12:** $b=1$; **13:** $b=-2$; **6:** asintoto verticale; **7:** discontinuità di salto; **8:** discontinuità eliminabile; **14:** discontinuità di seconda specie se $\lambda > 0$; discontinuità eliminabile se $\lambda = 0$; è continua se $\lambda < 0$;