Divisione di polinomi

Siano $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

dove $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

e $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$

dove $b_0, b_1, \dots b_m \in \mathbb{R}$, $\underline{b_m \neq 0}$,

due polinomi di grado risp. n e m, con $m \leq n$.

Vogliamo definire la divisione di P_n (dividendo) per Q_m (divisore). Questo significa trovare due polinomi $S_k(x)$ (quoziente) e $R_h(x)$ (resto) t.c.

$$\boxed{P_n(x) = Q_m(x)\, S_k(x) + R_h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*) \\ \text{con } \boxed{h < m}}$$

OSS. deve essere $k = n - m$ affinché i polinomi siano dello stesso grado

Se $R_h(x) \equiv 0$, diremo che $P_n(x)$ è divisibile per $Q_m(x)$.

TEOREMA Dati $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ con $n \geq m$, esiste un'unica coppia di polinomi $S_k(x)$, $R_h(x)$, con $h < m$ t.c. valga la $(*)$

La dim. "coincide" con l'algoritmo per la divisione.

$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15$, $Q_2(x) = x^2 - 1$.

Il Quoziente $S_k(x)$ è di grado $4 - 2 = 2$.

$\implies S_k(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$

$R_h(x) = d_1 x + d_0$ deve essere $h < 2$.

$$x^4+2x^3-14x^2+2x-15 = (x^2-1)\left(\cancel{c_2}x^2+\overset{2}{\cancel{c_1}}x+\overset{-13}{\cancel{c_0}}\right)+\overset{4}{\cancel{d_1}}x+d_0 \qquad (*)$$

Devono essere uguali i coeff.ti dei 2 polinomi

grado 4: $1 = c_2$

grado 3: $2 = c_1$

grado 2: $-14 = -1 + c_0 \Rightarrow c_0 = -13$

grado 1: $2 = -2 + d_1 \Rightarrow d_1 = 4$

grado 0: $-15 = 13 + d_0 \Rightarrow d_0 = -28$

Questi calcoli sono esattamente quelli che si fanno con il noto algoritmo della divisione

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3-14x^2+2x-15 & x^2-1 \\ \hline
-x^4 \qquad\qquad +x^2 & \boxed{x^2+2x-13} \; S_k(x) \\ \hline
\;/\quad 2x^3-13x^2+2x-15 & \\
\quad -2x^3 \qquad\qquad 2x & \\ \hline
\quad /\quad -13x^2+4x-15 & \\
\qquad +13x^2 \qquad -13 & \\ \hline
\qquad / \qquad \boxed{4x-28} \; R_h(x) &
\end{array}$$

Caso particolare: $Q_m(x) = Q_1(x) = x - a$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-3x^2 \qquad +x-7 & x-4 \\ \hline
-x^4+4x^3 & \boxed{x^3+x^2+4x+17} \; S_3(x) \\ \hline
\;/\quad x^3 \qquad +x-7 & \\
\quad -x^3+4x^2 & \\ \hline
\quad /\quad 4x^2+x-7 & \\
\qquad -4x^2+16x & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{}\ 17x-7 \\ -17x+68 \\ \hline \cancel{}\ \boxed{61} = R_0(x) \end{array}$$

Di solito in questo caso si usa una forma graficamente diversa

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{1\quad -3\quad 0\quad 1\quad -7}}^{\text{coeff.ti di } P_4}} & \\ & 1 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ a \quad 4 & & 4 & 4 & 16 & 68 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 17 & 61 \ R_0 \end{array}$$

coeff.ti di $S_3(x) = x^3 + x^2 + 4x + 17$

Regola di Ruffini per la divisibilità per $(x-a)$

Un polinomio $P_n(x)$ è divisibile per $x-a$ (cioè $R_0=0$)

$\iff \quad P_n(a)=0$

Dim

$\boxed{\Rightarrow}$ $P_n(x)$ è divisibile per $(x-a)$ vuol dire

$$P_n(x) = (x-a)\,S_{n-1}(x)$$

$$P_n(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}\,S_{n-1}(a) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $P_n(a) = 0$

eseguo la divisione di $P_n(x)$ per $x-a$

$$P_n(x) = (x-a)\,S_{n-1}(x) + R_0$$

prendo $x = 0$

$$0 = P_n(a) = \underbrace{(a-a)\,S_{n-1}(a)}_{0} + R_0 \Rightarrow R_0 = 0 \quad \square$$

In generale dall'ultima equazione si ottiene

$$P_n(a) = R_0$$ vero anche se a non è zero di P_n.

Fattorizzazione dei polinomi.

Teorema fondamentale dell'algebra per polinomi reali

Ogni polinomio $P_n(m)$ a coeff^ti reali si può scomporre nel prodotto di polinomi di grado 1 e di polinomi di grado 2 irriducibili nei reali (polinomi di grado 2 con $\Delta < 0$)