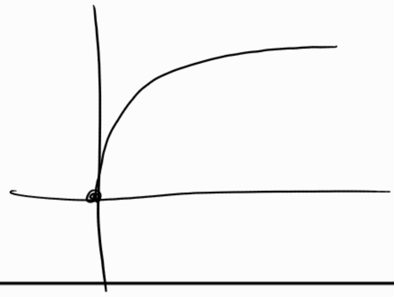
$f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile per $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \quad \text{non derivabile.}$$



$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \boxed{\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

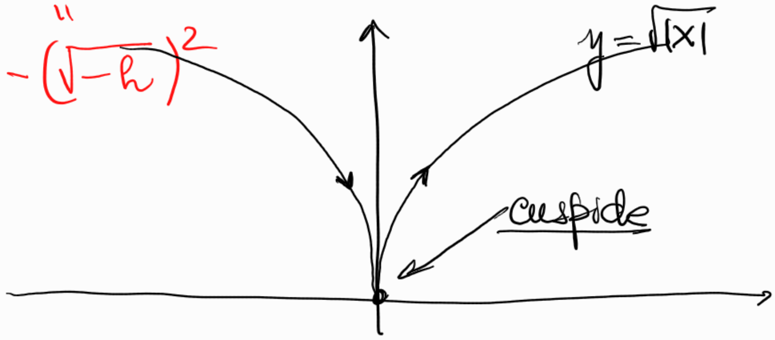
$$f'(x) = \left.\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \operatorname{sign} x \quad \text{se } x \neq 0$$

$x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

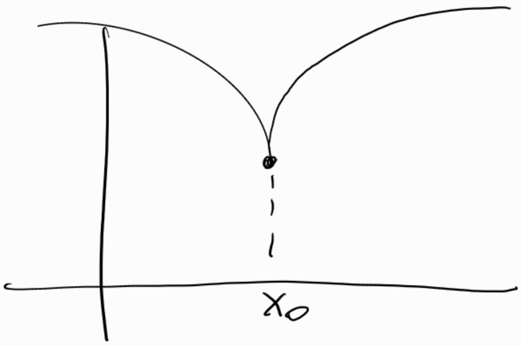
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{\underbrace{h}_{= -(\sqrt{-h})^2}} = \lim_{h \to 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{-h}} \right) = -\infty$$

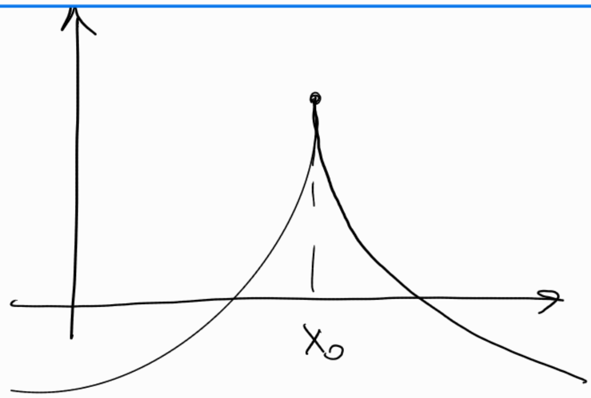


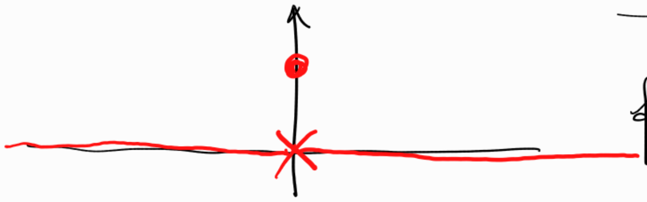
DEF $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto di cuspide** del grafico di f se:

i) f è continua in x_0;

ii) $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$ (oppure viceversa)







$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Attenzione: in questo caso viene $f'_+(0) = -\infty$

$f'_-(0) = +\infty$ (verificarlo)

ma non c'è una cuspide (perché f non è continua in $x=0$)

Abbiamo provato che $\sqrt{|x|}$ ha una cuspide nel pto $(0,0)$

Altro esempio:

$f(x) = x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2}$ definita e continua in $\mathbb{R}$.
perché composiz. di funzioni continue

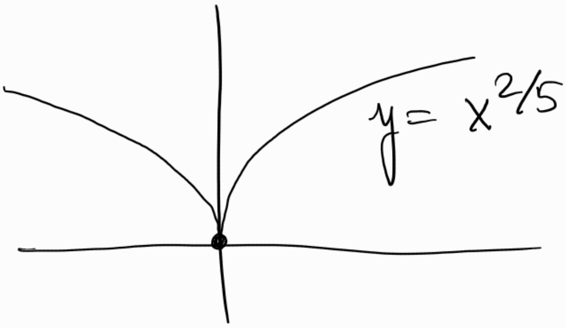
$f'(x) = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5x^{3/5}}$ per $x \neq 0$.

$x=0$? $\quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{3/5}} \not\exists$

$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{3/5}} = +\infty$

$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \quad '' \quad = -\infty$

cuspide



$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Attenzione: $|x|$ non è derivabile in 0.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

? ← non possiamo mettere subito il $\geq$. anche se in questo caso è vero

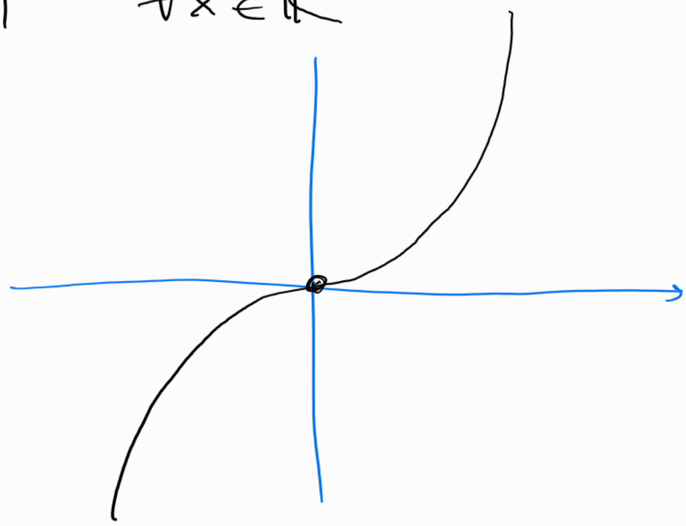
$$f'(x) = 2|x| \quad \text{per } x \neq 0$$

In $x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}|h|}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} |h| = 0$$

Quindi f derivabile anche in $x=0$, e $f'(0) = 0$.

$$\Longrightarrow \quad (|x|x)' = 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

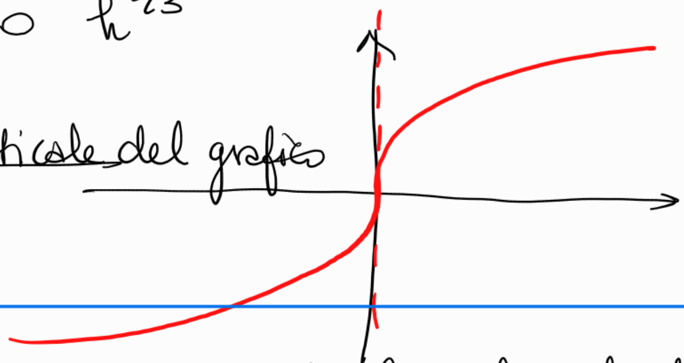


$f(x) = x^{1/3}$ continua in $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \forall x \neq 0.$

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$ non è derivabile

Si tratta di un pto a tg verticale del grafico

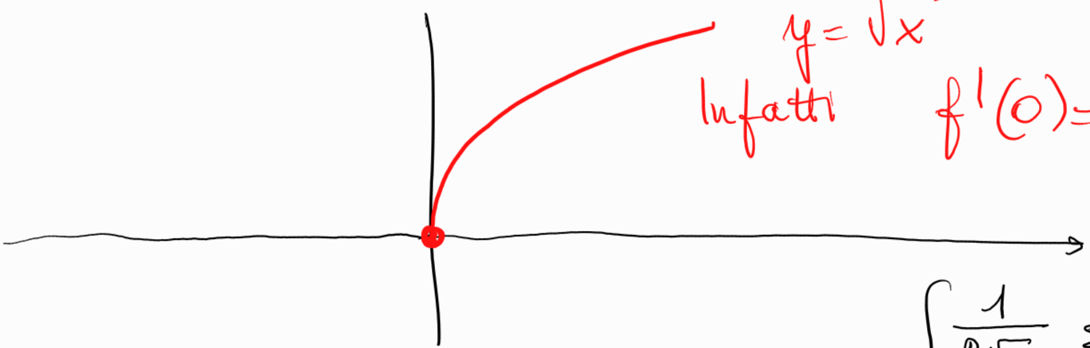


DEF $(x_0, f(x_0))$ si dice pto a tg. verticale del grafico di f se:

i) f è continua in x_0;

ii) $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ oppure $-\infty$.

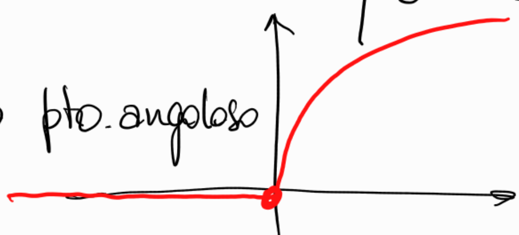
Anche $f(x) = \sqrt{x}$ ha un pto a tang. verticale in $(0,0)$



Infatti $f'(0) = f'_+(0) = +\infty$

Se $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

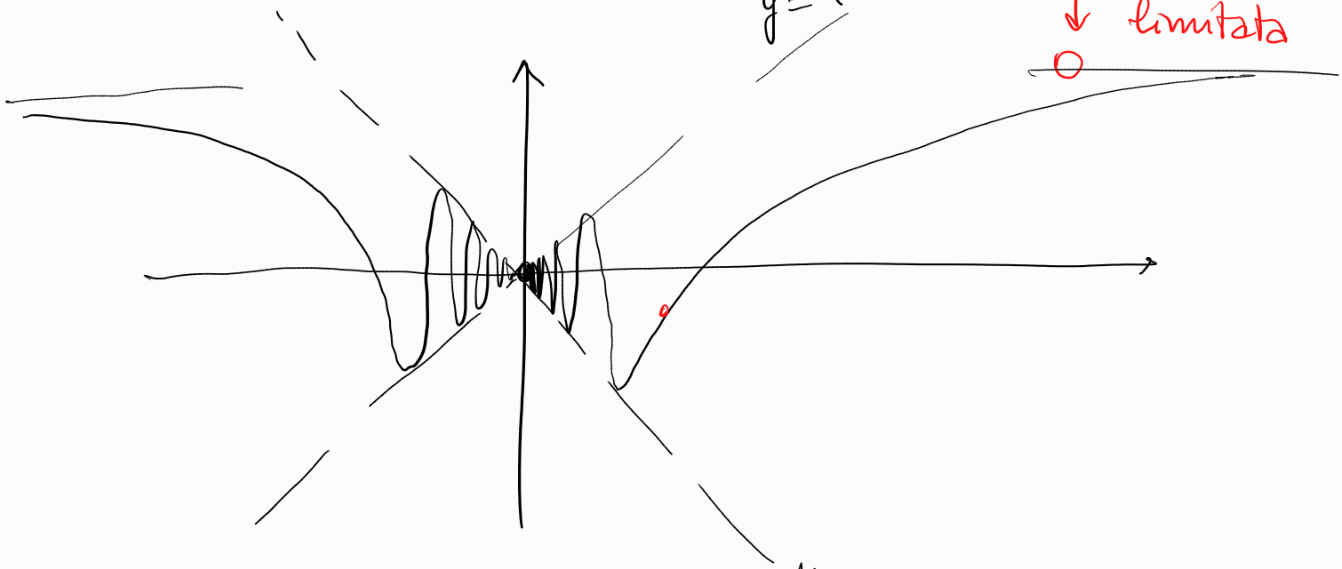
$f'_-(0) = 0, \; f'_+(0) = +\infty \Rightarrow$ pto. angoloso



Abbiamo visto delle classificazioni dei punti in cui una f è continua ma non derivabile (punti angolosi, cuspidi, pti a tg. verticale). Ma questi non esauriscono tutti i casi:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \text{continua in } \mathbb{R}$$

(continua anche in $x=0$, perché $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{limitata}} = 0 = f(0)$)



$$f'(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)' = \sin \frac{1}{x} + x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} \qquad x \neq 0$$

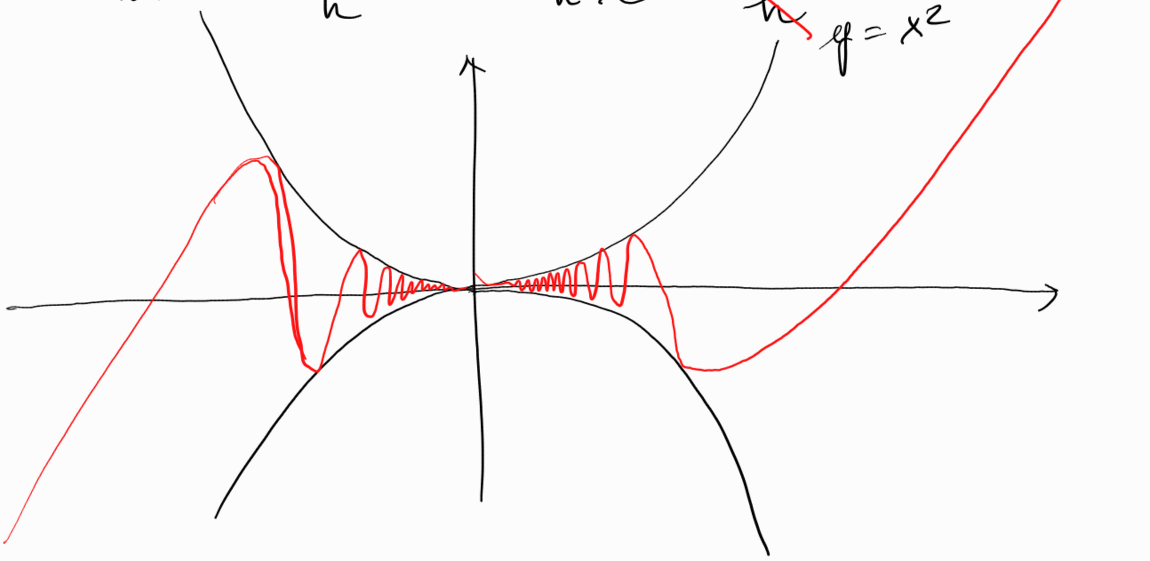
$x=0$? $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h} \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} \quad \nexists$

In questo caso non esistono
$f'_+(0)$, $f'_-(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{continua in } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin\frac{1}{h}}{\cancel{h}} = 0$$

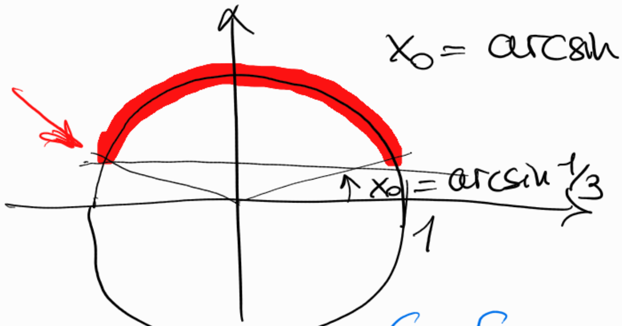


$f(x) = \sqrt{3\sin x - 1}$ periodica di periodo 2π (dipende da $\sin x$)

dominio $f = \{x : 3\sin x \geq 1\} = \{x : x_0 + 2k\pi \leq x \leq \pi - x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$x_0 = \arcsin\frac{1}{3}$.

Continua nel suo dominio (perché composiz. di f. continue)



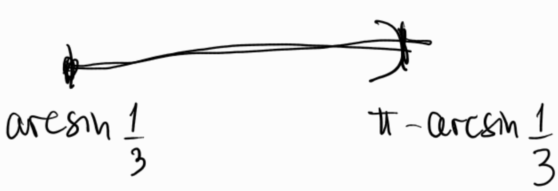
$$f'(x) = \frac{3\cos x}{2\sqrt{3\sin x - 1}} \quad \forall x : \ x_0 + 2k\pi < x < \pi - x_0 + 2k\pi$$

$x_0 = \arcsin\frac{1}{3}$

Per $x = \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi$ e $x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi$

$x_0 = \arcsin\frac{1}{3}$?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - \cancel{f(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{3\sin(\arcsin\frac{1}{3} + h) - 1}}{h} = ?$$



C'è un altro modo per calcolare questa derivata.
modo che verrà giustificato in seguito.

TEOREMA Supponiamo f continua in $[x_0, b)$ — Vale anche per $f'_-(x_0)$: $(a, x_0]$

derivabile in (x_0, b) — (a, x_0)

se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$, $\exists \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

allora $f'_+(x_0) = \ell$. $\qquad f'_-(x_0) = \ell$.

Nel nostro caso f verifica le ipotesi in $x_0 = \arcsin \frac{1}{3}$

$\to \cos x_0 > 0 \qquad \cos x_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{3 \cos x}{2\underbrace{\sqrt{3 \sin x - 1}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

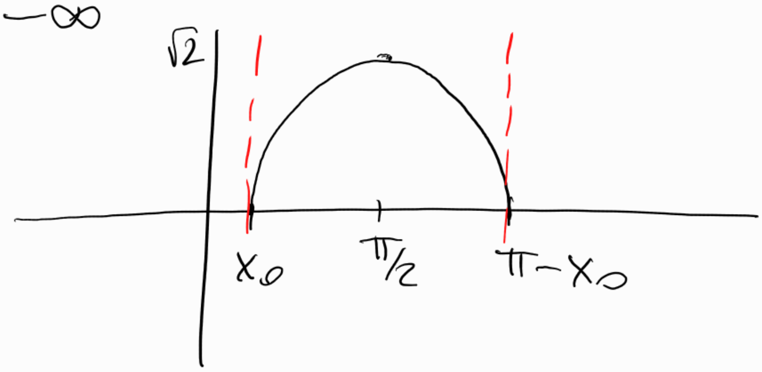
$x_0 = \arcsin \frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = +\infty$$

$\to \cos x_0 > 0 \qquad \cos x_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$$\lim_{x \to (\pi - x_0)^-} f'(x) = \lim_{x \to (\pi - x_0)^-} \frac{3 \cos x}{2\underbrace{\sqrt{3 \sin x - 1}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$$\Rightarrow f'_-(\pi - x_0) = -\infty$$



Avvertenze per applicare il teorema:

- f deve essere continua in x_0
- deve esistere il $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$. Se non esiste, non si può dire nulla

Possiamo applicare questo teorema a casi già visti.

$f(x) = \sqrt{x}$ continua in $[0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ per $x > 0$.

$f'_+(0) = ?$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

$\xRightarrow{\text{Teor.}} f'_+(0) = +\infty$

$f(x) = x|x|$ continua in $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2|x|$ $\forall x \neq 0$.

e in $x = 0$? $f'_\pm(0) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2|x| = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 2|x| = 0 \Rightarrow f'_-(0) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow f'(0) = 0$$

$f(x) = x^{2/5}$ → continua in $\mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{2}{5x^{3/5}}$ $\forall x \neq 0$.

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{2}{5x^{3/5}} = +\infty \Rightarrow f'_+(0) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{2}{5x^{3/5}} = -\infty \Rightarrow f'_-(0) = -\infty$

$\Downarrow$

$(0,0)$ è una cuspide

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

continua in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\nexists \lim.} \right) \nexists$$

Sarebbe errato concludere che $\nexists f'_+(0)$,

Abbiamo verificato prima che $\exists f'_+(0) = 0$.