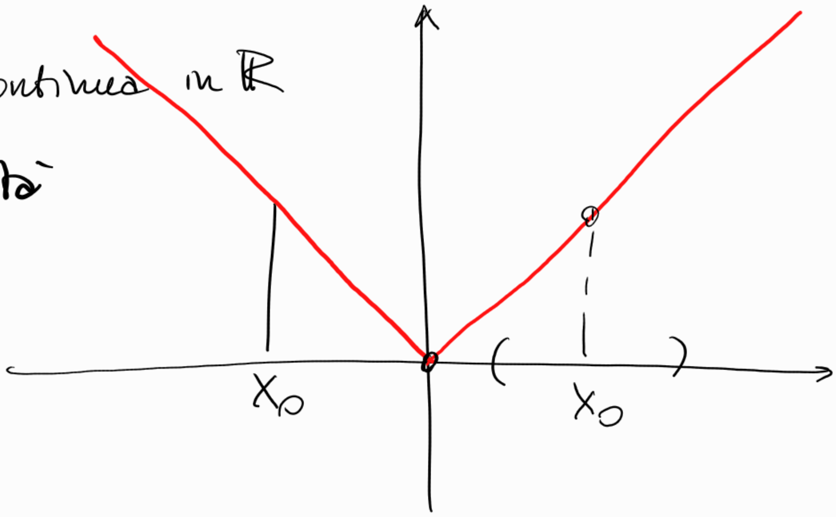
TEOREMA

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.

OSS Il viceversa non è vero: esistono funzioni continue che non sono derivabili.

Per es: $f(x) = |x|$ continua in $\mathbb{R}$



Studiamone la derivabilità

- Se $x_0 > 0 \Rightarrow$ in un intorno di x_0 $|x| = x$

  $\Rightarrow f'(x_0) = 1$;

- Se $x_0 < 0$, in un intorno di x_0 si ha $|x| = -x$

  $\Rightarrow f'(x_0) = -1$.

- $x_0 = 0$ $\quad f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} \nexists$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

DEF Si dice derivata destra di f in x_0

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$h = x - x_0 \to 0^+$

derivata sinistra

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ovviamente, se $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0.

Nel caso del valore assoluto $\left(f(x) = |x| \right)$

$$f'_+(0) = 1 \qquad ; \qquad f'_-(0) \, -1 .$$

DEF $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso** del grafico di f se

1) f continua in x_0;
2) $\exists\ f'_+(x_0), f'_-(x_0)$, di cui almeno una finita, ma sono diverse tra loro.

$(0,0)$ è un punto angoloso del grafico di $|x|$.

$$\boxed{(|x|)' = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sign} x & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists \ (\text{pto angoloso}) & \text{se } x = 0 \end{cases}}$$

$$\left.\begin{aligned}
&D\left(x^{4/3}\right) = \frac{4}{3} x^{1/3} \\
&D\left(x^2\right) = 2x \\
&D\left(x^3\right) = 3x^2 \\
&D(\sin x) = \cos x \\
&D(\cos x) = -\sin x \\
&D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}\right\}$$

osserviamo che, in questi esempi, la derivata di una funzione pari è dispari, la derivata di una funzione dispari è pari.
In effetti questo è vero in generale!

TEOREMA

1) Se f è derivabile e dispari $\Rightarrow$ f' è pari;

2) se f è derivabile e pari $\Rightarrow$ f' è dispari.

DIM 1. f dispari significa $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \operatorname{dom} f$.

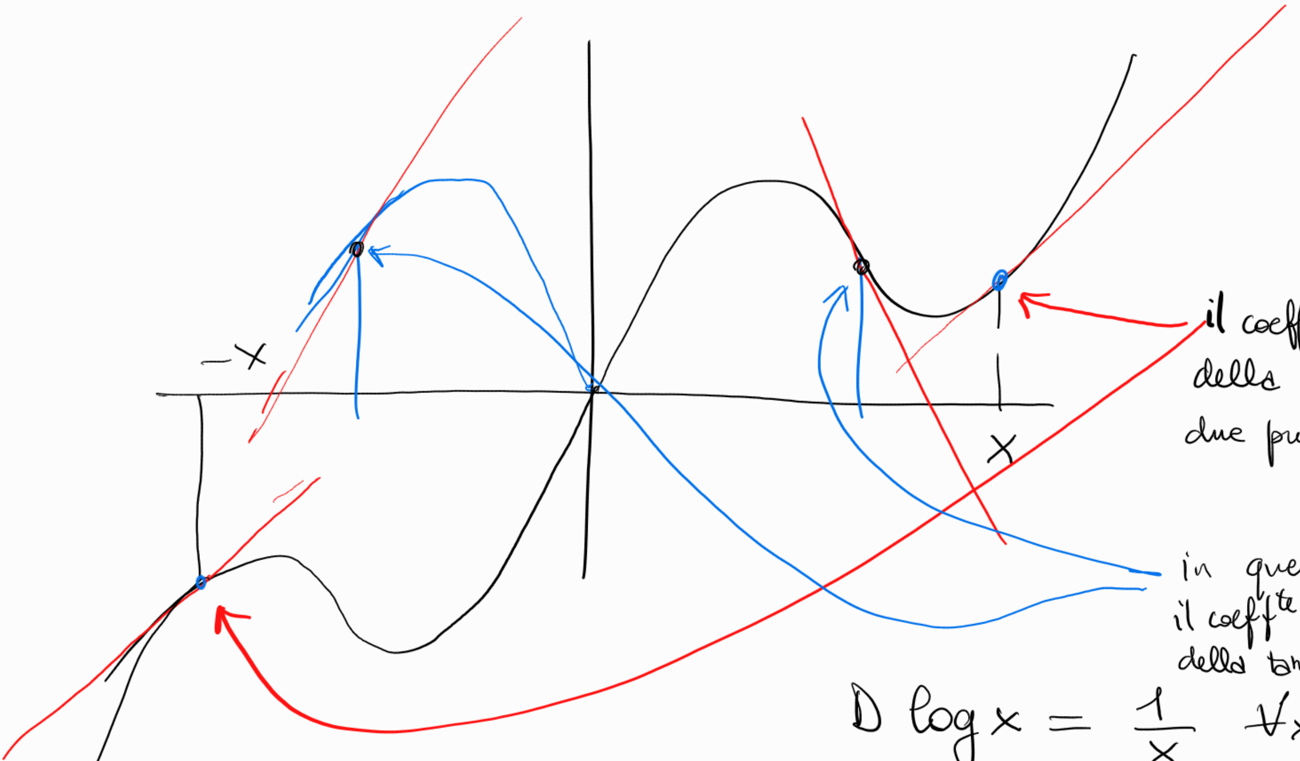
Tesi: f' pari, cioè $f'(-x) = f'(x)$ $\forall x$

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(-x+h)}^{-f(x-h)} - \overbrace{f(-x)}^{-f(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h)+f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{k} = f'(x) \qquad \square$$

$-h = k \to 0$



il coeff^{te} angolare della tg. in questi due punti è lo stesso

in questi due punti il coeff^{te} angolare della tangente è opposto

$$D \log x = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

$$D(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pari}}}{\log|x|}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

Algebra delle derivate.

Siano $f, g: X \to \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in $x_0 \in X$.

Allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0, e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(f(x_0+h)+g(x_0+h)\right) - \left(f(x_0)+g(x_0)\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)} \right] =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0).$$

1') $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0, e

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(Linearità della derivata).

Es. $(5x^6 + 4x^2 - 7\sin x)' = 30x^5 + 8x - 7\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Il prodotto fg è derivabile in x_0, e

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).}$$

Esempio

$$(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left((x^4-3x+1)e^x\right)' = (4x^3-3)e^x + (x^4-3x+1)e^x =$$
$$= e^x\left(x^4+4x^3-3x-2\right)$$

Dim

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0)} + \overbrace{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\underbrace{f(x_0+h)}_{\to f(x_0)}\ \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)} + \underbrace{g(x_0)\ \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\to g(x_0)f'(x_0)}\right] =$$

infatti
f derivabile in x_0
$\Rightarrow f$ continua

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0) \qquad \square$$

3) Se $g(x_0) \neq 0$, allora

$\frac{1}{g(x)}$ è derivabile in x_0, e si ha

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

Esempio: $\left(\frac{1}{x^3-3x}\right)' = -\frac{3x^2-3}{(x^3-3x)^2} = \frac{3(1-x^2)}{(x^3-3x)^2}$

$\forall x \neq 0, \pm\sqrt{3}$

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

DIM

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h \, \boxed{g(x_0+h)} \, g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \qquad \square$$

$-g'(x_0)$ $g(x_0)$ per la continuità

4) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

DIM $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0)$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\right) =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \qquad \square$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\mathrm{cotg})'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1+\mathrm{cotg}^2 x\right)$$
$\forall x \neq k\pi$

$$\left(\frac{5x-2}{x^2-1}\right)' = \frac{5(x^2-1)-(5x-2)\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-5x^2+4x-5}{(x^2-1)^2}$$
$\forall x \neq \pm 1$

TEOREMA derivata di f. composta (chain rule, regola della catena)

Siano $f: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$

(Quindi è definita
$$f \circ g: X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(g(x))\ )$$

Se g è derivabile in $x_0 \in X$, e f è derivabile in $g(x_0)$, allora $f\circ g$ è derivabile in x_0, e si ha

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

__Esempi__

$$(\sin(x^3))' = \cos(x^3)\cdot 3x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$((\sin x)^3)' = 3\sin^2 x \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-1) = -e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\log|x|)' = \begin{cases} (\log x)' = \dfrac{1}{x} & x>0 \\ (\log(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & x<0 \end{cases} = \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

$$(\mathrm{tg}(3x-5))' = \frac{3}{\cos^2(3x-5)} \qquad \forall x \text{ t.c. } 3x-5 \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

OSS $\quad (f(ax+b))' = f'(ax+b)\cdot a \qquad a,b\in\mathbb{R}$

$$(\cos(4x+2))' = -\sin(4x+2)\cdot 4$$

Dim. del teorema Con l'ipotesi aggiuntiva che g sia strett. monotona in un intorno di x_0.

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}} \; \boxed{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}} \to g'(x_0)$$

$\boxed{\text{OSS } g(x_0+h) - g(x_0) \neq 0}$

$$\| \qquad \boxed{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \to f'(g(x_0))$$

$$g(x_0+h) = y \xrightarrow[h\to 0]{} g(x_0) = y_0$$

perché g derivabile $\Rightarrow$ g continua

$$= f'(g(x_0))\, g'(x_0) \qquad \square$$

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)' =$$

$$= x^x\left(\log x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\log x + 1) \qquad \forall x>0$$

Tutte le funzioni ottenute da funzioni derivabili mediante le 4 operazioni e composizioni sono sempre derivabili nel loro dominio, per esempio

$$f(x) = \frac{\log(x^4+3x^2+7)\sin(e^x)}{x^2+\left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)\right)^3}$$

è derivabile nel suo dominio

$f(x) = \sqrt{x} \quad : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

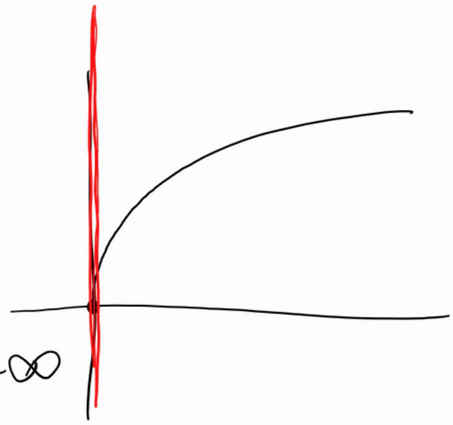
$$f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x>0$$

Cosa succede in $x=0$?

Non è derivabile in $x=0$

perché

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$



non derivabile.