Derivate

1) derivata come velocità (Fisica)

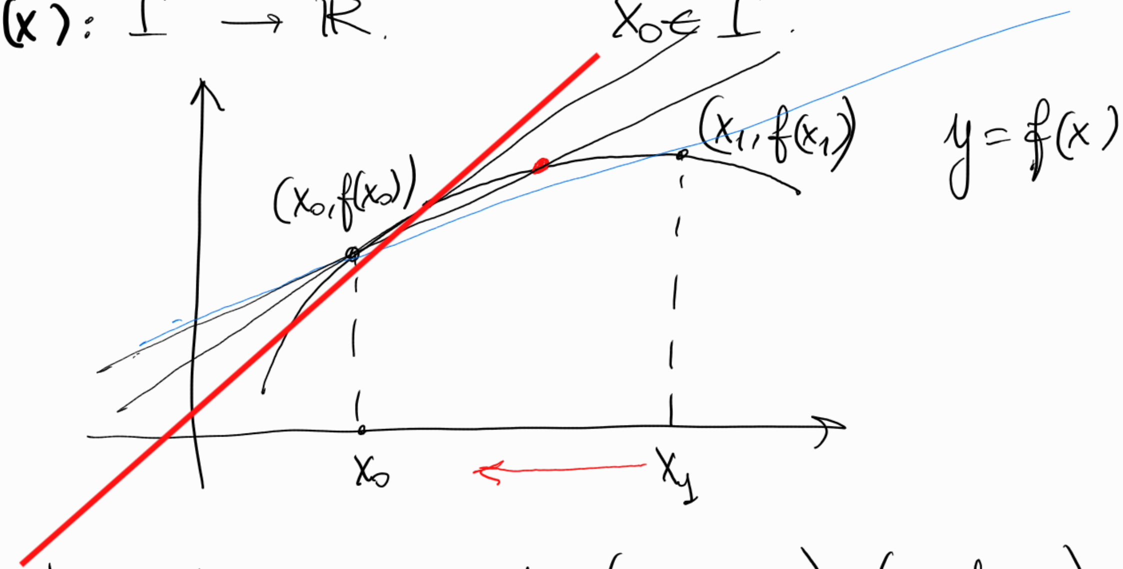
$x(t)$ = posizione all'istante t di un punto materiale che si muove lungo una guida rettilinea

Velocità all'istante t_0 del punto materiale

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$$

2) significato analitico-geometrico

$f(x) : I \to \mathbb{R}$. $\qquad x_0 \in I$.



Retta passante per i punti $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$.

$$\boxed{y = f(x_0) + \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}(x - x_0)}$$

rapporto incrementale di f calcolato tra i p.ti x_0, x_1 è il coeff.te angolare della retta

Quando $x_1 \to x_0$
la retta diventa la "retta tangente" al grafico di f nel p.to $(x_0, f(x_0))$
e il coeff.te angolare diventa $m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

derivata di f in x_0.

DEF Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ pto non isolato di X

f si dice **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$x - x_0 = h \to 0$

$x = x_0 + h$

In tal caso $f'(x_0)$ si dice **derivata** di f in x_0.

La quantità $P(x, x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice **rapporto incrementale** di f relativo ai punti x_0, x.

Se $f(x) = x^2$, calcoliamo $f'(3)$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$

$x - 3 = h \to 0$

$x = 3 + h$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6. \qquad \boxed{f'(3) = 6}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, Calcoliamo $f'(-2)$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{-2+h} + \frac{1}{+2} \right) \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{h}}{(-2+h)\, 2\, \cancel{h}} = -\frac{1}{4}$$

Altre notazioni per la derivata

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = \dot{f}(x_0)$$

Precisiamo il concetto di retta tangente:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$.

Consideriamo le generiche rette, non verticali, passanti per $(x_0, f(x_0))$, che hanno equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

OSS

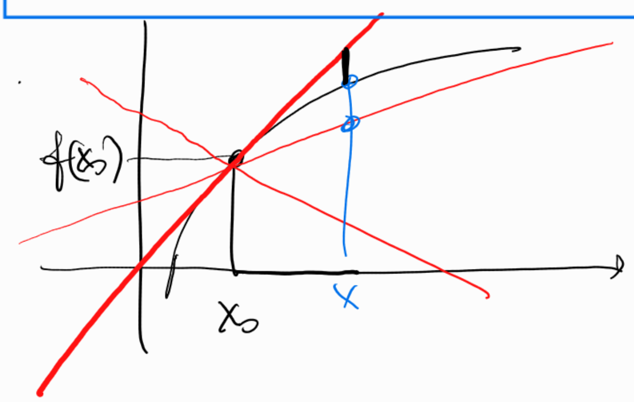
per $x \to x_0$ (se f è continua)

$$f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(1)$$

$$\underset{\downarrow f(x_0)}{f(x)} - f(x_0) - m\underset{\downarrow 0}{(x-x_0)} = o(1)$$

Questa retta $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ si dice retta tangente

se $\boxed{f(x) - [f(x_0) + m(x-x_0)] = o(x-x_0) \text{ per } x \to x_0}$



significa:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x-x_0)]}{x - x_0} = 0.$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right] = 0$$

Cioè $\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} = m.$

Abbiamo dimostrato che

f è derivabile in $x_0 \iff$ esiste la retta tangente a graf f in $(x_0, f(x_0))$

e in tal caso il coeff^{te} della retta tg. vale $m = f'(x_0)$

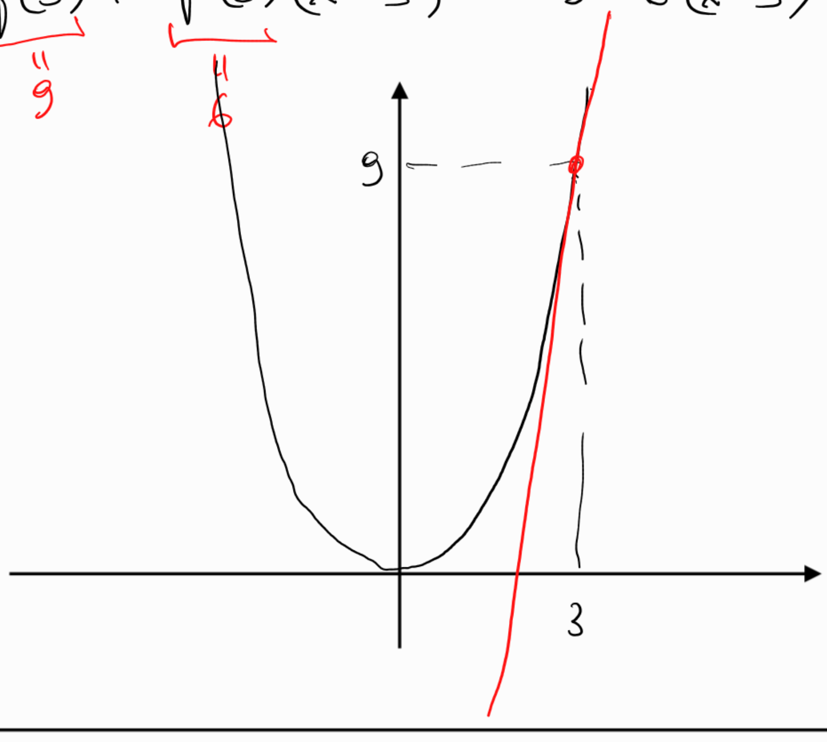
Equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e si ha: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$

Trovare la retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel punto $(3, 9)$:

$$y = \underbrace{f(3)}_{=9} + \underbrace{f'(3)}_{=6}(x-3) = 9 + 6(x-3)$$



Quando una funzione f è derivabile $\forall x_0 \in X = \text{dom}\, f$, diremo che f è derivabile in X, e parleremo di funzione "derivata" di f.

$$f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivate delle funzioni elementari

1) **Derivata di una costante.**

se $f(x) \equiv c$, cioè $f(x)=c \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x+h)}^{=c}-\overbrace{f(x)}^{=c}}{h} = 0.$$

La derivata di una costante è identicamente nulla.

2) se $f(x) = ax+b \quad (a,b\in\mathbb{R})$ $\quad \boxed{(ax+b)'=a}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(\cancel{x}+h)+\cancel{b}-(\cancel{ax}+\cancel{b})}{h} = a$$

3) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Longrightarrow \boxed{(x^2)' = 2x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

4) $\boxed{(x^k)' = k\,x^{k-1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}}$

$$(x^k)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h\to 0} x^k \frac{\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^k - 1\right)}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x} =$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha}$$

$\frac{h}{x} = t \to 0 \quad \frac{(1+t)^k - 1}{t} \to k$

$$= x^k \cdot \frac{k}{x} = k\, x^{k-1}$$

Questo conto va infatti se $x = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^k - 0^k}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases} = k\, 0^{k-1}$$

$$(x^6)' = 6x^5$$

OSS Questo calcolo si può ripetere tale e quale se la potenza non è intera positiva, cioè

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha - 1} \quad (*) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall x > 0$$

OSS se α è razionale, e se entrambi i membri della precedente uguaglianza hanno senso, la formula $(*)$ ha senso anche per $x < 0$ oppure per $x = 0$.

$$(x^{4/3})' = \frac{4}{3} x^{1/3}$$

definita $\forall x \in \mathbb{R}$ definita $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(x^{4/3})' = \frac{4}{3} x^{1/3} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

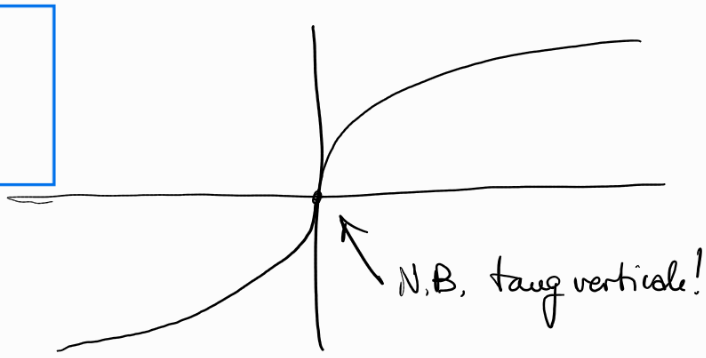
$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\, x^{2/3}}$$

definita $\forall x \in \mathbb{R}$

ok $\forall x \neq 0$

$$\boxed{(x^{1/3})' = \frac{1}{3\, x^{2/3}} \quad \forall x \neq 0}$$

Cosa succede in $x = 0$?



Provo a calcolare la derivata di $f(x) = x^{1/3}$ in $x_0 = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

Quindi $x_0 = 0$ è un punto di non derivabilità di $f(x) = x^{1/3}$

Si chiama punto a tg verticale del grafico

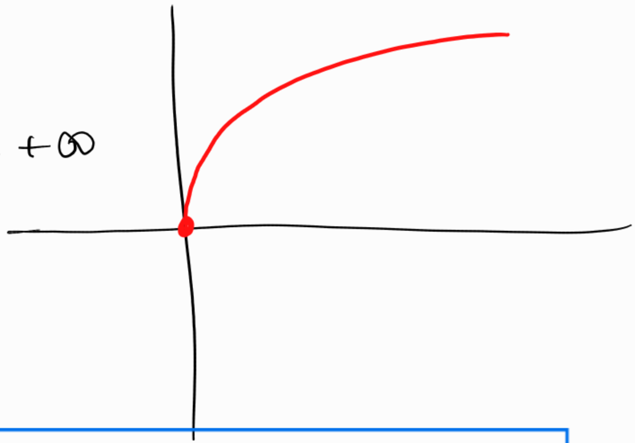
$f(x) = \sqrt{x}$

$$\boxed{(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x > 0}$$

Derivata di $\sqrt{x}$ in $x = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0} = \lim_{h\to 0^+}$$



$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \forall x \neq 0}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5} \qquad \forall x \neq 0}$$

<u>Esercizio</u>: provare con calcoli elementari che $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ usando la def^{ne}.

$$\boxed{(e^x)' = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \underbrace{\frac{(e^h - 1)}{h}}_{\to 1} = e^x$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log a \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall a > 0}$$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \cdot \underbrace{\boxed{\frac{a^h - 1}{h}}}_{\log a} = a^x \log a$$

$$\frac{a^h - 1}{h} = \underbrace{\boxed{\frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a}}}_{1} \log a \xrightarrow[h\to 0]{} \log a$$

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}} \quad \forall x > 0$$

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\log(1+t)}{t} \to 1 \quad \text{con } t = \frac{h}{x} \to 0$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \qquad \forall x > 0 \qquad \forall a > 0,\ a \neq 1}$$

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}}}_{1/x} \frac{1}{\log a} =$$

$$= \frac{1}{x \log a} = \frac{\log_a e}{x}$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

[Formula di prostaferesi: $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$]

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{2}{h} \sin \frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})}{2}} \boxed{\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)} = \cos x$$

$$\frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} \to 1$$

$$\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \to \cos x$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

(Dim. simile).

TEOREMA

f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0.

DIM

f è derivabile in $x_0 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{=o(1)} + \underbrace{o(x-x_0)}_{=o(1)} = o(1)$$

Cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, la tesi

$\square$

OSS! Non vale il viceversa; esistono funzione continue in x_0 ma non derivabili in x_0

Esempio $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$