OSS Una funzione strett. monotòna è sempre iniettiva
Il viceversa non è sempre vero.
Tuttavia:

TEOREMA
Sia f continua in I intervallo. Allora

$$f \text{ iniettiva} \iff f \text{ strett. monotòna}.$$

La novità è data dalla freccia "$\Rightarrow$"

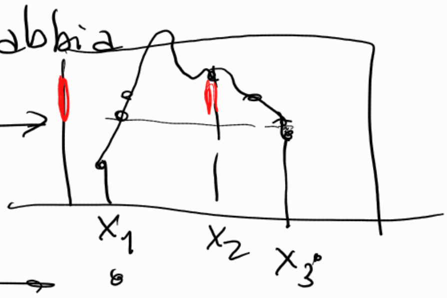
Mostriamo che f iniettiva $\Rightarrow$ f monotòna

perché poi $\left.\begin{array}{l} f \text{ monotòna} \\ f \text{ iniettiva} \end{array}\right| \Rightarrow f$ strett. monotòna.

Per assurdo, supponiamo f non monotòna.
E' facile convincersi che in tal caso devono esistere tre punti
$x_1, x_2, x_3 \in I$ t.c. $x_1 < x_2 < x_3$ e si abbia

$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$$

$$f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$$



Per il teor. dei valori intermedi applicato a $[x_1, x_2]$, f assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

Stessa cosa in $[x_2, x_3] \Rightarrow f$ assume tutti i valori compresi tra $f(x_2)$ e $f(x_3)$

Da questo segue che ci sono dei valori (precisamente quelli compresi tra $\max\{f(x_1), f(x_3)\}$ e $f(x_2)$) che sono assunti due volte nei due intervalli, e quindi non vale l'iniettività.

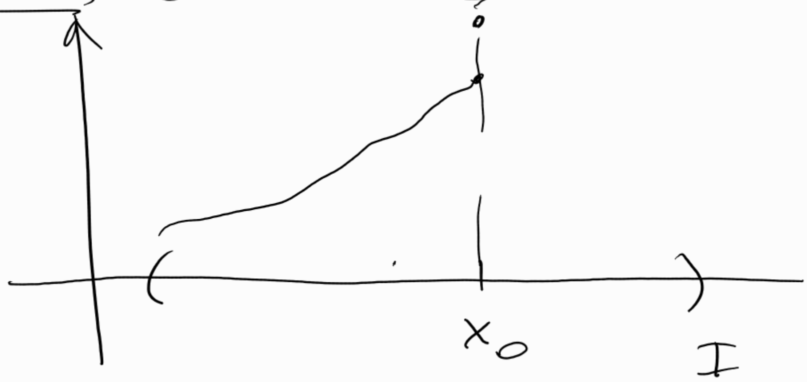
Discontinuità di una f. monotòna

Supponiamo che f sia monotòna in un intervallo I.

Che tipo di discontinuità può avere?

Risposta: solo discontinuità di salto
(oppure eventualmente discontinuità eliminabili agli estremi)

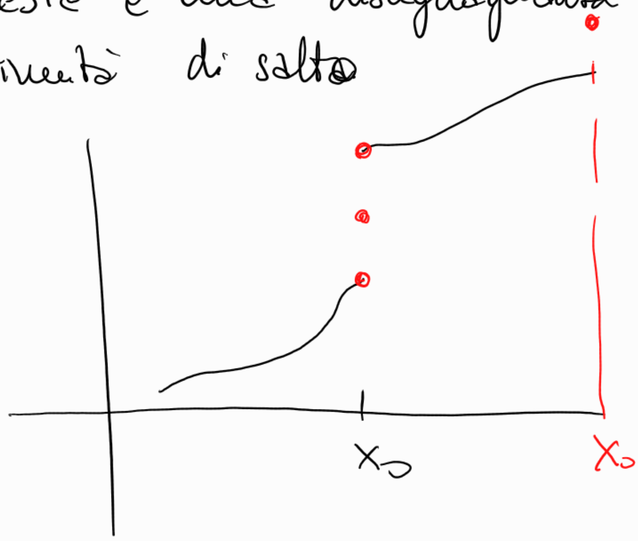
Supponiamo f crescente, x_0 interno a I



$$\underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}_{\in \mathbb{R}} = \sup_{x\in I\cap(-\infty,x_0)} f(x) \le f(x_0) \le \inf_{x\in I\cap(x_0,+\infty)} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{\in \mathbb{R}}$$

Se $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, la f è continua in x_0

Altrimenti, se una di queste è una disuguaglianza stretta, si ha una discontinuità di salto

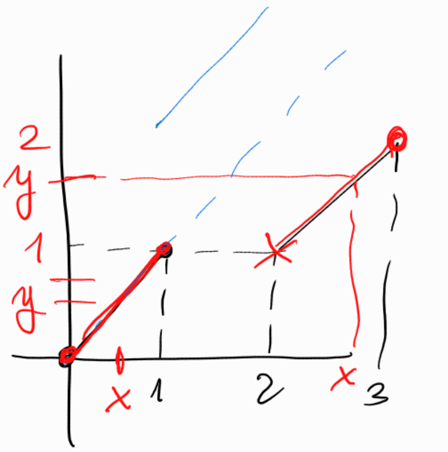


OSS Se f è continua e iniettiva, posso renderla biettiva restringendo il codominio all'immagine
$\Rightarrow$ esiste l'inversa. E' continua?

In generale, no!

$$f : [0,1] \cup (2,3] \to \cancel{\mathbb{R}}\ [0,2]$$

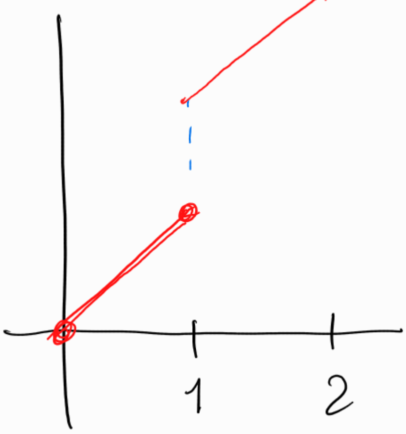
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & x \in (2,3] \end{cases}$$



iniettiva e continua nel suo dominio
diventa biettiva se la prendo a valori in $[0,2]$.

$$f^{-1} : [0,2] \to [0,1] \cup (2,3].$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se} \quad y \in [0,1] \\ y+1 & \phantom{\text{se}} \quad y \in (1,2] \end{cases}$$



$y = f^{-1}(x)$

f^{-1} non è continua (ha un salto in $x_0 = 1$).

Tuttavia:

> **TEOR** Se f è continua e iniettiva in un intervallo I (in particolare è strett. monotòna) allora la sua inversa f^{-1} è continua

($\Rightarrow$ $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ sono continue).

Dim. f è continua in I intervallo $\Rightarrow$ $\mathrm{Im} f = J$ intervallo (per il teor. dei valori intermedi)

$f: I \to J$ biettiva

$f^{-1}: J \to I$ biettiva.

Inoltre f continua e iniettiva in I $\Rightarrow$ f è strett. monotòna

(per es. f strett. crescente) $\Rightarrow$ f^{-1} è strett. crescente.

f^{-1} è strett. crescente in J intervallo.

Se per assurdo f^{-1} fosse discontinua, avrebbe un punto di salto all'interno oppure una discontinuità eliminabile a un estremo.

In tal caso $\mathrm{Im}(f^{-1})$ non sarebbe un intervallo.

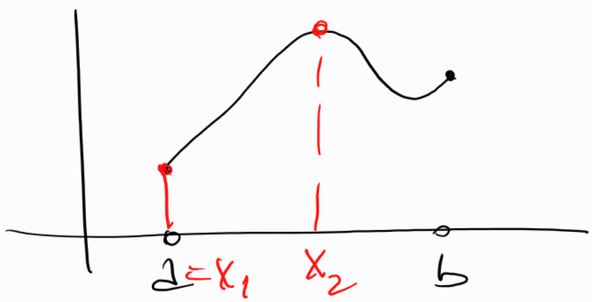
ma sappiamo che $\mathrm{Im}(f^{-1}) = I$ intervallo. (assurdo!)

Teor. di Weierstrass

Una funzione f continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato) ammette massimo e minimo assoluti.

Cioè:

$\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $\quad f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\ \forall x \in [a,b]$



Conseguenze del teorema:

1) Una funzione continua in $[a,b]$ è limitata.

2) f continua in $[a,b] \Rightarrow \operatorname{im} f$ è un intervallo chiuso e limitato

$$\left[\min_{[a,b]} f \,,\, \max_{[a,b]} f\right]$$

Dim. thm. di Weierstrass

Dimostriamo che $\exists$ max. assoluto di f, cioè che
$\exists\, x_0 \in [a,b]$ t.c. $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

1°) costruiamo una succ^{ne} massimizzante, cioè
una succ^{ne} $\{a_n\} \subset [a,b]$ t.c. $f(a_n) \to \sup_{[a,b]} f$

Due casi:

i) $\sup_{[a,b]} f = \sup\{ f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}_+ \; \exists\, a_n \in [a,b]$ t.c. $\underbrace{\sup f - \frac{1}{n}}_{\to \sup f} < f(a_n) \leq \sup f$

per il thm. dei carab., $f(a_n) \to \sup f$.

ii) $\sup_{[a,b]} f = +\infty$ (a posteriori dimostreremo che non è vero, ma al momento non possiamo escluderlo)

In questo caso, $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists\, a_n \in [a,b]$ t.c. $f(a_n) > n$

Teor. dei carab $\Rightarrow f(a_n) \to +\infty = \sup f$.

2°) conclusione

$\{a_n\} \subseteq [a,b] \Rightarrow a_n$ è limitata

Per Bolzano-Weierstrass $\exists$ sottosucc^{ne} a_{k_n} t.c. $a_{k_n} \to x_0$

<u>OSS</u> $x_0 \in [a,b]$ perché se fosse $x_0 > b$, per la permanenza del segno dovrebbe essere def^{te} $a_{k_n} > b$, ma $a_{k_n} \leq b$.
Analogamente si esclude $x_0 < a$.

$a_{k_n} \to x_0 \in [a,b] \Longrightarrow f(a_{k_n}) \to f(x_0)$ per la continuità e il teor. ponte.

ma $\{f(a_{k_n})\}$ è una sottosucc^{ne} di $\{f(a_n)\}$, che tende a sup f.

$$\Rightarrow \quad f(a_{k_n}) \to \sup_{[a,b]} f$$

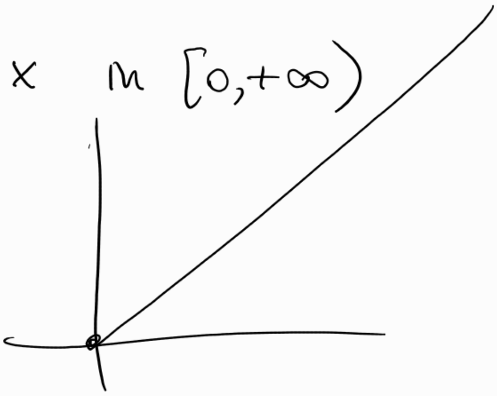
Per l'unicità del limite, $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$

$\Rightarrow f(x_0)$ è il massimo assoluto di f in $[a,b]$. $\square$

<u>OSS</u> Il teorema di Weierstrass ha bisogno di tutte le ipotesi

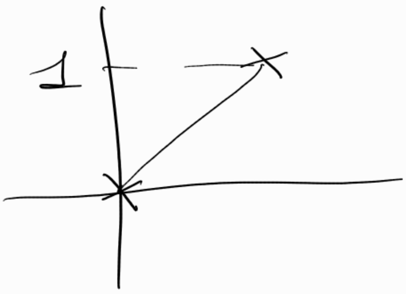
- <u>Intervallo deve essere limitato</u>: $f(x) = x$ in $[0,+\infty)$

  non ammette massimo



- <u>Intervallo deve essere chiuso</u>:

  $f(x) = x$ in $(0,1)$

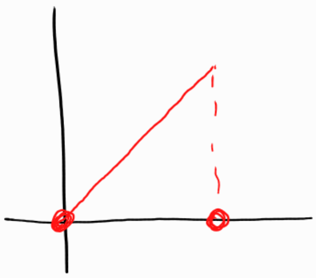


non ammette max. assoluto in $(0,1)$

$\sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1$, ma non è assunto dalla funzione.

- <u>f deve essere continua.</u>

  $f(x) = \{x\}$ parte frazionaria in $[0,1]$.



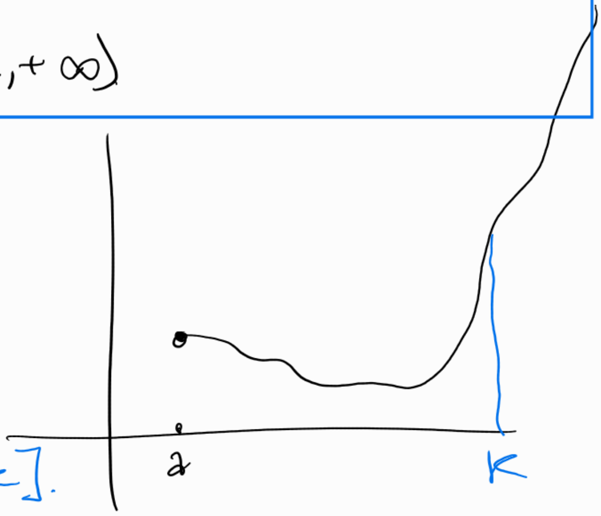
non ammette max.

Si possono fare alcune generalizzazioni del teor. di Weierstrass a intervalli non limitati.

PROP 1 f continua in $[a,+\infty)$, e inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Allora f ammette min. assoluto in $[a,+\infty)$

<u>Dim.</u> Per def^{ne} di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\exists K > a$ t.c. $\forall x > K \quad f(x) > f(a)$

Applico Weierstrass all'intervallo $[a,K]$.

$\Rightarrow \exists\ x_0 \in [a,K]$ t.c. $f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in [a,K]$.

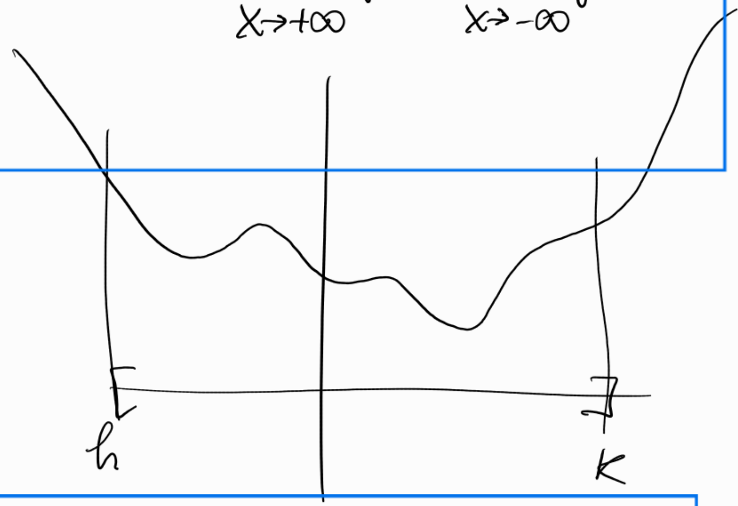
D'altra parte se $x > K \quad f(x) > f(a) \ge f(x_0)$

$\Rightarrow \quad f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \ge a$.

$\Rightarrow x_0$ è il pto di minimo cercato

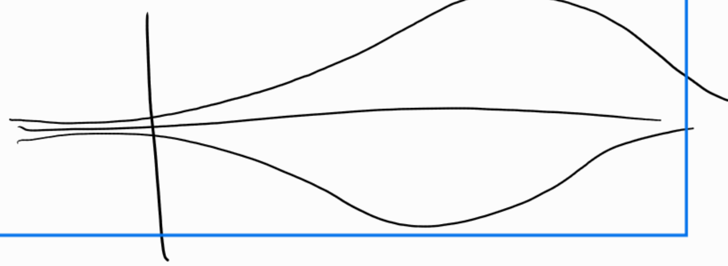
PROP 2 Sia f continua in $\mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Allora f ammette min. assoluto.



PROP 3 Sia f continua in $\mathbb{R}$ t.c.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Allora f ammette almeno uno tra massimo assoluto e min. assoluto.

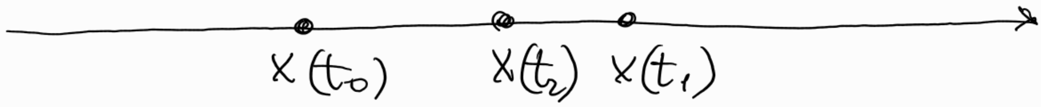


Derivate

- **Concetto "cinematico" di derivata (Fisica)**

Sia $x(t)$ la posizione all'istante t di un punto che si muove lungo una guida rettilinea.

$t_0 < t_1 < t_2$



Fissati $t_0 < t_1$, considero la velocità media del punto materiale nell'intervallo $[t_0, t_1]$.

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

$t_0 = 0$ sec. $\qquad t_1 = 60$ sec.

$x(t_0) = 0 \qquad x(t_1) = 900$ m.

$$\bar{v}(t_0,t_1) = \frac{(900-0)\ m}{(60-0)\ s} = 15\ \frac{m}{s}$$

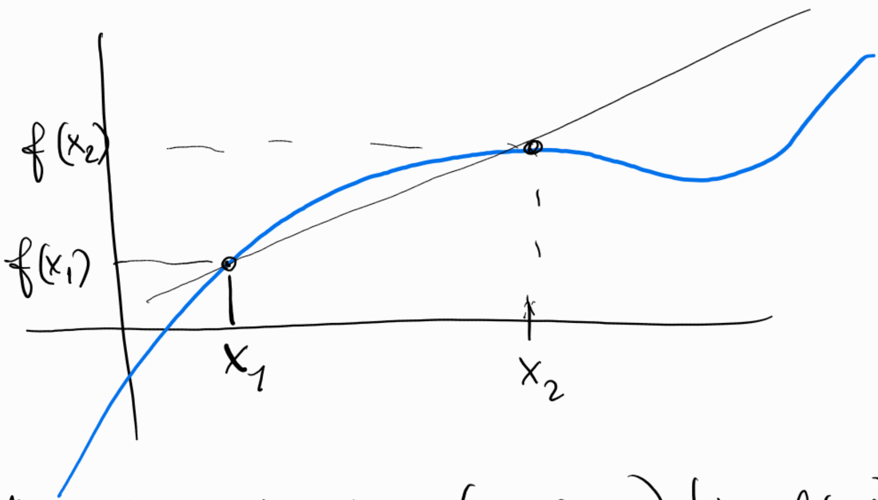
Se voglio avere un' idea della velocità istantanea, devo prendere intervalli sempre più brevi

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

---

2. Concetto "geometrico-analitico" di derivata come coeff^{te} angolare della retta tangente

Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo I.
Siano x_1, x_2 due punti di I t.c. $x_1 \neq x_2$.



Equazione della retta passante per $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$

$$\boxed{y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$