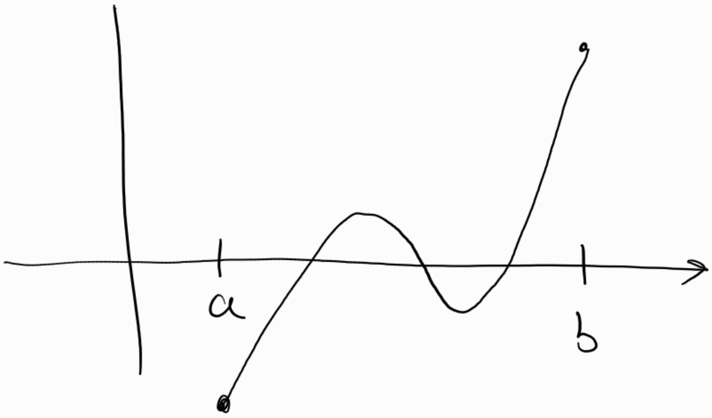
TEOREMA DEGLI ZERI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$.

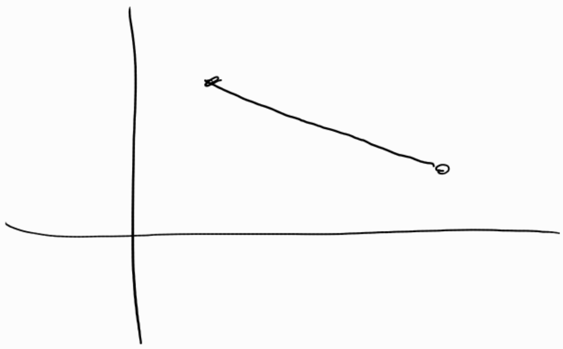
Se $f(a)f(b)<0$ (cioè: $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni discordi),

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c)=0$.

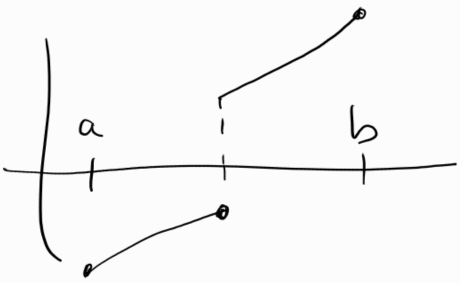


OSS tutte le ipotesi servono:

- $f(a)f(b)<0$ serve



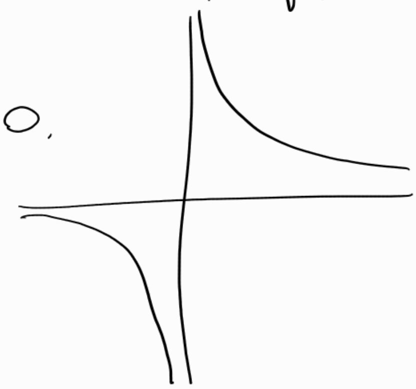
- f continua serve



- serve che l'insieme sia un intervallo

  $f(x)=\frac{1}{x}$ continua $f(-1)=-1<0$, $f(1)=1>0$

  ma non esiste c t.c. $\frac{1}{c}=0$.

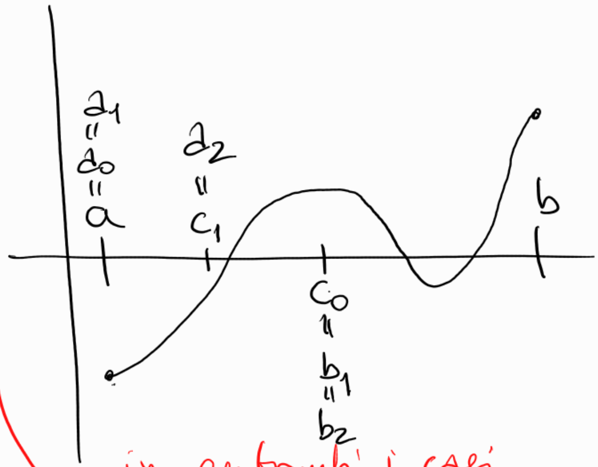


DIM. Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$ per semplicità.

Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$. $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Tre casi:
- $f(c_0) = 0 \Rightarrow$ ho finito.
- $f(c_0) > 0 \Rightarrow$ prendo $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$
- $f(c_0) < 0 \Rightarrow$ prendo $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

in entrambi i casi $f(a_1) < 0 < f(b_1)$



- Se non ho concluso trovando $f(c_0) = 0$, poniamo $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Tre casi:
  - $f(c_1) = 0 \Rightarrow$ ho finito
  - $f(c_1) > 0 \Rightarrow$ prendo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$
  - $f(c_1) < 0 \Rightarrow$ prendo $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$.

$\vdots$

All'n-esimo passaggio, se non finisco prima, avrò $a_n < b_n$ t.c. $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

Prendo $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Tre casi:
- $f(c_n) = 0 \Rightarrow$ ho finito
- $f(c_n) > 0 \Rightarrow$ pongo $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$
- $f(c_n) < 0 \Rightarrow$ " $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.

O questo procedimento ha fine (cioè trovo un c_n t.c. $f(c_n)=0$) oppure il procedimento continua all'infinito.
In questo caso ho costruito due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ t.c.

$a_n, b_n \in [a,b]$

$\{a_n\}$ crescente , $\{b_n\}$ decrescente. $a_n < b_n$

$f(a_n) < 0$ $\qquad$ $f(b_n) > 0$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

- $\{a_n\}$ crescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c' \in [a,b]$

  Infatti $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n \in [a,b]$

- $\{b_n\}$ decrescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c'' \in [a,b]$

- Mostro che $c' = c''$ (e quindi lo chiamo c)

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} b_n}_{c''} - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a_n}_{c'} = \lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

- $a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$ perché f è continua e perché usiamo il teor. ponte.

- $f(a_n) < 0 \Rightarrow \boxed{f(c) \leq 0}$ per la permanenza del segno

- $b_n \to c \Rightarrow f(b_n) \to f(c)$

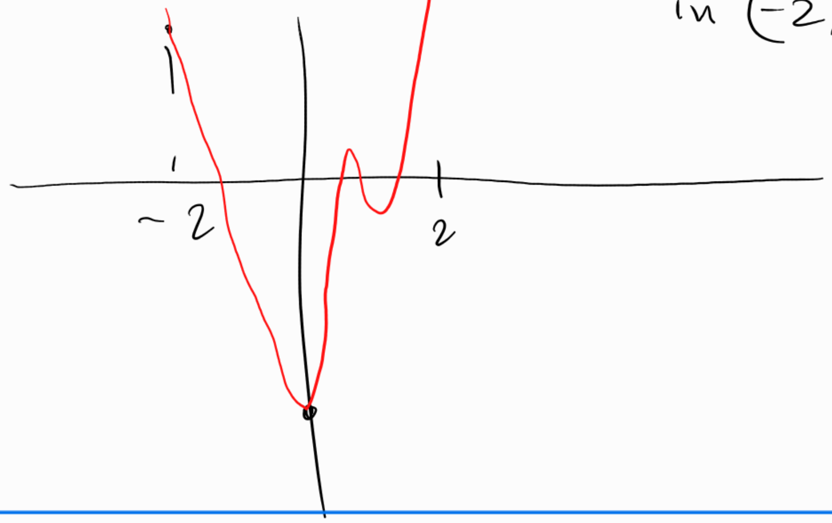
  $f(b_n) > 0 \Rightarrow \boxed{f(c) \geq 0} \Rightarrow f(c) = 0$ $\qquad\square$

OSS Questa dim. suggerisce un procedimento numerico per determinare c con una precisione arbitraria.

Provare che il polinomio $P(x) = x^6 - x^3 + x^2 - 8$ ammette almeno due zeri nell'intervallo $[-2,2]$.

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = -8 < 0 \\ P(2) = 64 - 8 + 4 - 8 > 0 \end{array}\right] \Rightarrow \exists \text{ uno zero di } P \text{ in } (0,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(-2) = 64 + 8 + 4 - 8 = 68 > 0 \\ P(0) < 0 \end{array}\right] \Rightarrow \exists \text{ uno zero di } P \text{ in } (-2,0)$$



COROLLARIO (teorema dei valori intermedi)

Sia f continua in I intervallo qualsiasi (aperto, chiuso, limitato, illimitato)

Allora f assume tutti i valori compresi tra

$$\inf_I f \quad e \quad \sup_I f = \sup\{f(x) : x \in I\}$$

Quindi se f è continua in I intervallo,

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in I \text{ verificante } f(x) = y\}$$

contiene tutti i valori compresi tra il suo inf e il suo sup, cioè im f è un intervallo

Enunciato sintetico del teor. dei valori intermedi

> L' immagine di una funzione continua in un intervallo è un intervallo.

Esempio: $\sin x$ è continua in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\to$ in tale intervallo $\sin x$ assume tutti i valori compresi tra $\inf_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

e $\sup_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$\Rightarrow \sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ è suriettiva.

Dim. teorema dei valori intermedi

Sia f continua in I intervallo. Sia

$$\inf_{x\in I} f(x) < \lambda < \sup_{x \in I} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I\}$$

Devo provare che $\exists\, c \in I$ t.c. $f(c) = \lambda$.

Per le proprietà del sup $\exists\, x_1 \in I$ t.c. $f(x_1) > \lambda$

Altrimenti λ sarebbe un maggiorante di $\{f(x) : x \in I\}$

e quindi $\sup\{f(x) : x \in I\} \leq \lambda$

Per lo stesso motivo $\exists\, x_2 \in I$ t.c. $f(x_2) < \lambda$.

Abbiamo quindi trovato due pti $x_1, x_2 \in I$. t.c

$f(x_2) < \lambda < f(x_1)$

Considero l'intervallo chiuso di estremi x_1, x_2.

(Non so se è $[x_1, x_2]$ oppure $[x_2, x_1]$)

Tale intervallo è contenuto in $I \Rightarrow f$ è continua in questo intervallo.

Considero la funzione $g(x) = f(x) - \lambda$.

Questa è continua perché f lo era.

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda > 0 \qquad g(x_2) = f(x_2) - \lambda < 0$$

$\Rightarrow$ (Teor. degli zeri) $\exists\, c$ compreso tra x_1 e x_2 t.c. $g(c) = 0$

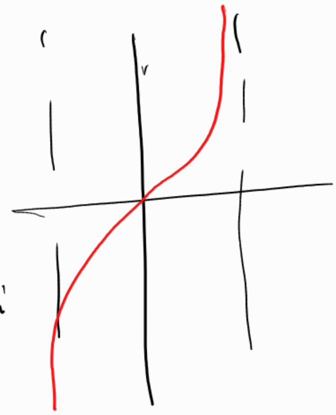
cioè $f(c) - \lambda = 0$

cioè $f(c) = \lambda$. $\square$

Esempio: $f(x) = \operatorname{tg} x$ è continua in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sup \left\{ \operatorname{tg} x : x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} = +\infty$$

$$\inf \{ \quad \} = -\infty$$



$\xrightarrow[\text{val. interm}]{\text{teor.}}$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x$ assume tutti i valori reali

cioè $\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ è suriettiva

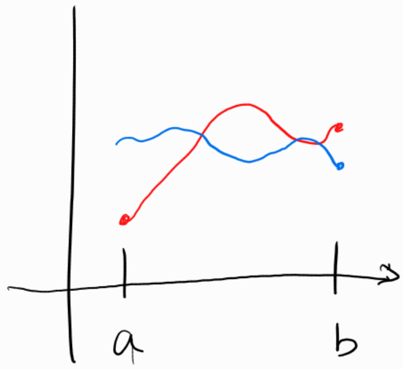
---

COROLLARIO 2 f, g funzioni continue in $[a,b]$, t.c.

$$f(a) < g(a), \qquad f(b) > g(b)$$

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f(c) = g(c)$$



DIM. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$ continua in $[a,b]$ perché differenza di f. continue

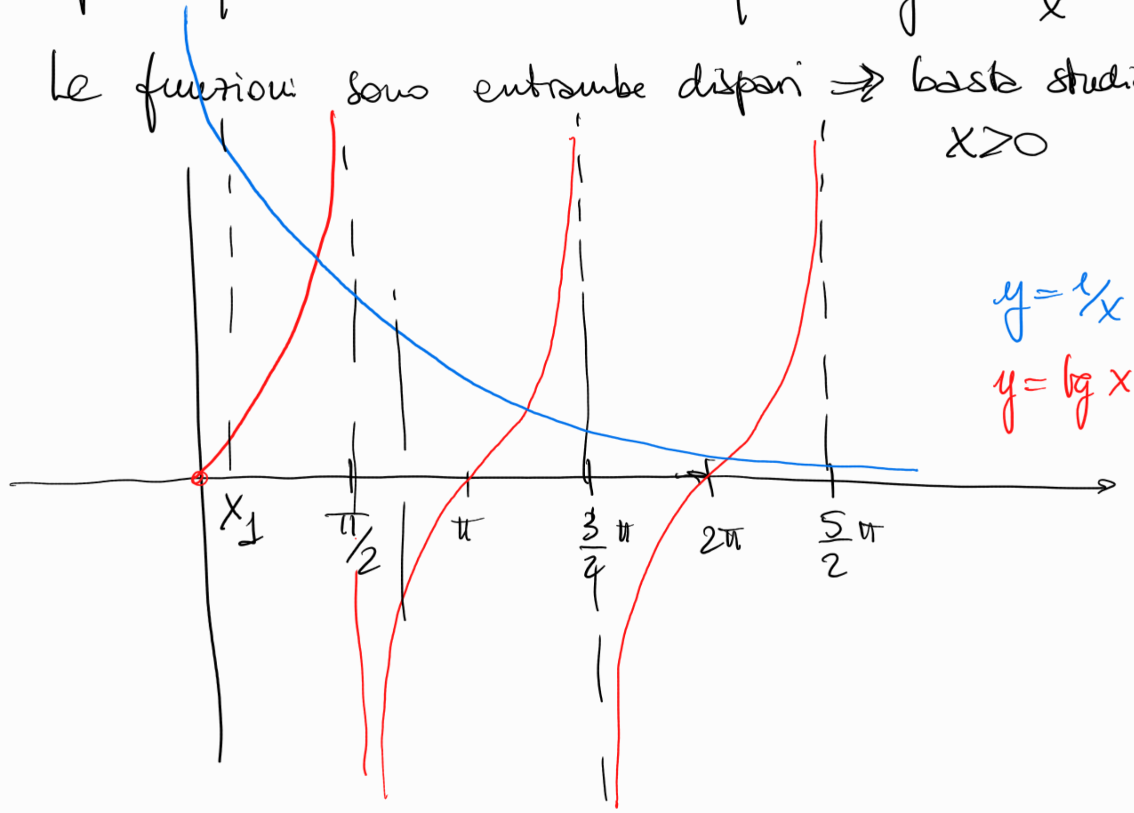
$$h(a) = f(a) - g(a) < 0, \qquad h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $h(c) = 0$, cioè $f(c) = g(c)$ $\square$

Esempio

Voglio sapere quante sol^{ni} ha l'eq^{ne} $\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$

OSS Le funzioni sono entrambe dispari $\Rightarrow$ basta studiare per $x \geq 0$



Considero l'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Se prendo x_1 abbastanza vicino a zero. $(x \to 0^+)$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x \to 0 \\ \frac{1}{x} \to +\infty \end{array}\right| \Rightarrow \exists\, x_1 \text{ t.c. } \frac{1}{x_1} > \operatorname{tg} x_1$$

se prendo x_2 abbastanza vicino a $\frac{\pi}{2}$ $\left(x \to \frac{\pi}{2}^-\right)$

$$\exists\, x_2 \text{ t.c } \frac{1}{x_2} < \operatorname{tg} x_2.$$

$\frac{1}{x}$ e $\operatorname{tg} x$ sono continue in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Corollario $\exists\, c_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ t.c. $\frac{1}{c_1} = \operatorname{tg} c_1$.

Tale punto è unico perché $\frac{1}{x}$ è strett. decresc. in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{tg} x$ " crescente $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ragionando allo stesso modo in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ si trova che in tale intervallo $\exists!\, c_2$ t.c. $\frac{1}{c_2} = \operatorname{tg} c_2$.

$\Rightarrow$ In ogni intervallo $\left(\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right)$

$\exists!$ sol^ne dell'eq^ne

$\Rightarrow$ $\exists$ infinite soluzioni dell'eq^ne.

---

f strett. monotòna (strett. crescente o strett. decrescente)

$\Rightarrow$ f iniettiva.

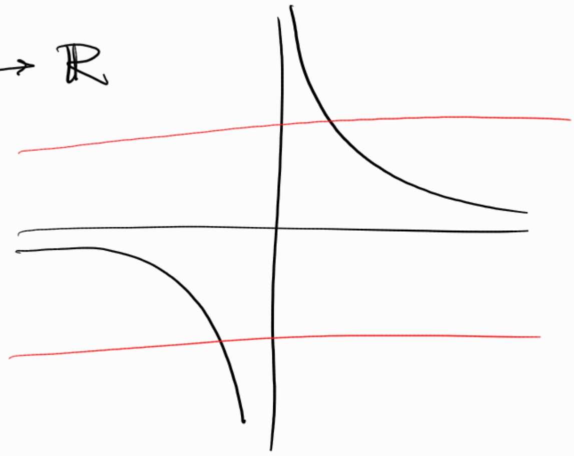
Vale il viceversa?

f iniettiva $\overset{?}{\Rightarrow}$ f strett. monotòna.

<u>NO</u>! per es. $f(x)=\frac{1}{x}: \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

è iniettiva.

Ma f non è monotòna.



<u>$f: I\to\mathbb{R}$</u> I intervallo

f iniettiva $\overset{?}{\Rightarrow}$ f monotòna <u>NO</u>

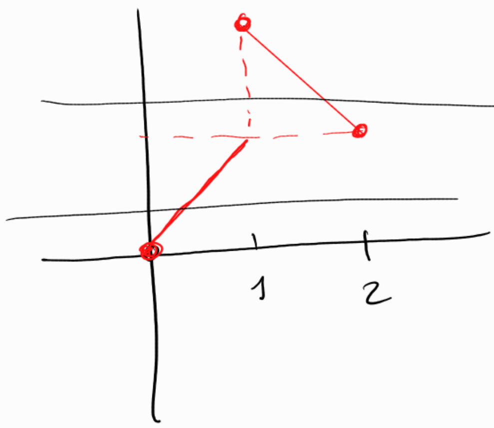
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

è iniettiva ma non monotòna

$f(x): [0,2]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{se } x\in[0,1)\\ 3-x & \text{se } x\in[1,2]\end{cases}$$

è iniettiva ma non monotòna.



$f : I \to \mathbb{R}$ continua in I intervallo. Allora

Allora f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ f è strett. monotòna

TEOREMA

Sia f continua in I intervallo. Allora essa è iniettiva se e solo se è strett. monotòna.

(da dimostrare)