Limiti notevoli riguardanti le funzioni trig. inverse

Le funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\operatorname{arctg} x$ sono funzioni continue, cioè $\forall x_0 \in \operatorname{dom} f$ si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

In particolare $\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

Dim

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1. \qquad \square$$

$\arcsin x = y \to 0$

$x = \sin y$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$$

$\operatorname{arctg} x = y \to 0$

$x = \operatorname{tg} y$

$\arcsin x \sim x$ per $x\to 0$

$\operatorname{arctg} x$

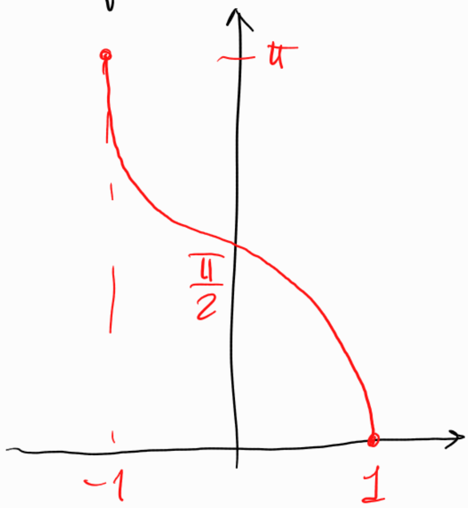
$\arcsin x = x\,(1+o(1))$ ''

''

$\arcsin x = x + o(x)$ ''

''

Esercizio Calcolare l'ordine di infinitesimo di $\arccos x$ per $x \to 1^-$



Voglio trovare $\alpha > 0$ t.c.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \frac{y}{(1-\cos y)^\alpha} =$$

$\arccos x = y \to 0^+$

$x = \cos y$

$$= \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{1-\cos y} \right)^\alpha = \lim_{y \to 0^+} \left(\frac{y^2}{1-\cos y} \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

$\boxed{\alpha = 1/2}$

Ordine di infinitesimo $= 1/2$.

$$\arccos x \sim \sqrt{2(1-x)} \qquad \text{per } x \to 1^-$$

Lavoriamo ancora con confronto/ordine di infinità/esimi.

ordine di infinitesimo di $\sin(5x)$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5 \qquad \text{ordine di inf}^{\text{mo}} = 1.$$

$\sin(5x)$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x per $x \to 0$

cioè: $\dfrac{\sin(5x)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 5$ (costante finita e non nulla)

<u>OSS</u> se $f(x)$ è infinito di ordine superiore risp. a $g(x)$ per $x\to x_0 \in \mathbb{R}^*$

allora

$$f(x)+g(x) \sim f(x) \qquad \text{per } x\to x_0$$

$$f(x)+g(x) = \underbrace{f(x)\Big(1+\underbrace{\boxed{\frac{g(x)}{f(x)}}}_{\to 0}\Big)}_{\to 1} \sim f(x)$$

Se $f(x)$ è un <u>infinitesimo</u> di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x\to x_0\in\mathbb{R}^*$,

cioè $f(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$

allora

$$f(x)+g(x) \sim g(x) \qquad \text{per } x\to x_0$$

$$f(x)+g(x) = g(x)\Big(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0}+1\Big) \sim g(x)$$

Trovare, se esiste, l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti funzioni.

$1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ per $n\to+\infty$

$1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{2n^4}$ infinitesimo di ordine 4.

$\boxed{\text{OSS } 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \text{ per } x\to 0}$

e $\dfrac{1}{n^2}\to 0$.

$$\sqrt{n^4+n^3} - n^2 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

1° modo: moltiplicare e dividere per $\sqrt{n^4+n^3}+n^2$
(provarci)

2° modo: $\sqrt{n^4+n^3} - n^2 = n^2 \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)}_{\sim \frac{1}{2n}} \sim \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$

$\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{1/2} - 1 \sim \frac{x}{2}$ per $x \to 0$

e $\frac{1}{n} \to 0$

La succ^ne è un infinito di ordine 1. per $n \to +\infty$

$$f(x) = \frac{(1+x+3x^2)}{(\log x)^2} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

è un infinito. Di che ordine?

$$f(x) \sim \frac{3x^2}{(\log x)^2} \longrightarrow +\infty \qquad x \to +\infty$$

E' un infinito di ordine inferiore rispetto a x^2

infatti $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{3}{(\log x)^2} \longrightarrow 0.$

ma di ordine superiore rispetto a x^α $\forall \alpha \in (0,2)$

infatti $\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{3\, x^{2-\alpha}}{(\log x)^2} \longrightarrow +\infty$ ($2-\alpha > 0$)

Quindi $f(x)$ non ha un ordine di infinito

$$f(x)=\log\left(5x^2-19\right) \to \log(20-19)=0 \qquad \text{per } x\to 2$$

$$\log\left(5x^2-19\right)=\log\left(1+\underbrace{\left(5x^2-20\right)}_{\to 0}\right)\sim 5x^2-20=$$

$$=5(x-2)\underbrace{(x+2)}_{\sim 4}\sim$$

$$\sim 20\,(x-2)$$

Infinitesimo di ordine 1.

$$f(x)=\underset{\to+\infty}{x}^{\overbrace{1+\frac{1}{\sqrt{\log x}}}^{\to 1}} \to +\infty \qquad \text{per } \underline{x\to+\infty}$$

Infinito di che ordine? L'esponente $\underline{\text{tende a}}$ 1

Confrontiamo con $x^1=x$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^{\cancel{1}+\frac{1}{\sqrt{\log x}}}}{\cancel{x}}=x^{\frac{1}{\sqrt{\log x}}}=e^{\frac{\log x}{\sqrt{\log x}}}=e^{\sqrt{\log x}}\to+\infty$$

$f(x)$ è infinito di ordine superiore rispetto a x per $x\to+\infty$

Confrontiamo con x^α $(\alpha>1)$

$$\frac{f(x)}{x^\alpha}=\frac{x^{1+\frac{1}{\sqrt{\log x}}}}{x^\alpha}=\underset{\to+\infty}{x}^{\overbrace{1-\alpha+\frac{1}{\sqrt{\log x}}}^{\to 1-\alpha<0}}\to 0$$

$\Rightarrow f(x)$ è infinito di ordine inferiore rispetto a x^α $\forall\alpha>1$

$\to$ non ha ordine di infinito.

Limite di funzione composta

Sia $g: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

Resta definita la funzione composta

$$f \circ g : \quad X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

Se esistono i limiti

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}^*}_{\text{Hyp 1}}, \qquad \underbrace{\lim_{y\to \ell} f(y) = K \in \mathbb{R}^*}_{\text{Hyp 2}}$$

e in più

$$g(x) \neq \ell \quad \text{def}^{te} \quad \text{per } x \to x_0. \qquad (*)$$

Allora $\displaystyle \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to\ell} f(y) = K.$

Dim.

Hyp. 2

$\forall$ intorno W di K, $\exists$ V intorno di ℓ t.c.

$$f(y) \in W \qquad \forall y \in V \cap Y \setminus \{\ell\}$$

Hyp 1

$\forall$ V intorno di ℓ $\exists$ U intorno di x_0 t.c.

$$g(x) \in V \cap Y \underbrace{\setminus\{\ell\}}_{\text{viene da } (*)} \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$$

Conclusione: Preso W, trovo V e poi il corrisp. U come nelle 2 ipotesi precedenti.

Sia $x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \underset{\text{Hyp 1}}{\Longrightarrow} g(x) \in V \cap Y \setminus \{\ell\} \underset{\text{Hyp 2}}{\Longrightarrow} f(g(x)) \in W$

Abbiamo dimostrato che:

$\forall W$ intorno di $k \Rightarrow \exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

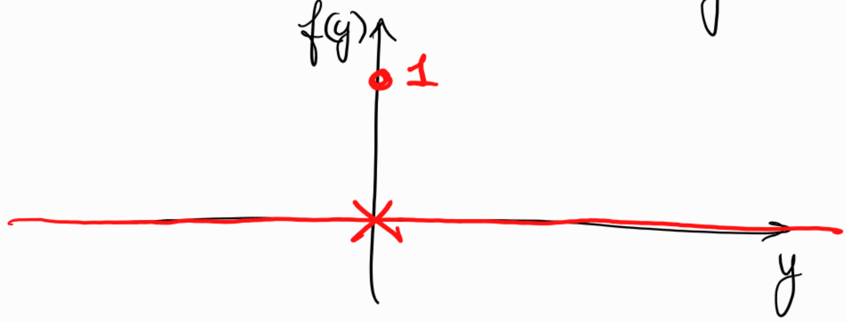
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in W \qquad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

cioè $\quad \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = k$

<u>OSS 1</u> L'hyp. $(*)$ serve, altrimenti il teorema è in generale falso.

$g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto 0$

$f(y): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$y \mapsto \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$



$$\underbrace{\lim_{x \to 0} \underbrace{f(g(x))}_{\substack{= \\ f(0) \\ = \\ 1}}}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} \neq \lim_{y \to 0} f(y) = 0$$

<u>OSS 2</u> L'hyp $(*)$ non serve se

f è definita in ℓ e in più $\underbrace{f(\ell) = \lim_{y \to \ell} f(y)}_{\text{cioè } f \text{ continua in } y = \ell.}$

Funzioni continue

DEF Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in X$

Se x_0 è anche punto di accum. per X, diremo che f è **continua in x_0** se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Se x_0 invece è punto isolato di X, diremo sempre che f è continua in x_0)

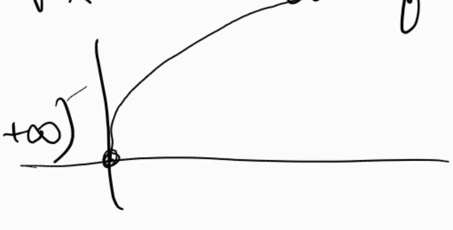
Diremo che f è continua in X se è continua in ogni punto $x_0 \in X$. In tal caso scriveremo $f \in C(X)$

Esempi di funzioni continue nel loro dominio:

$f(x) = x^3$ è continua in $\mathbb{R}$

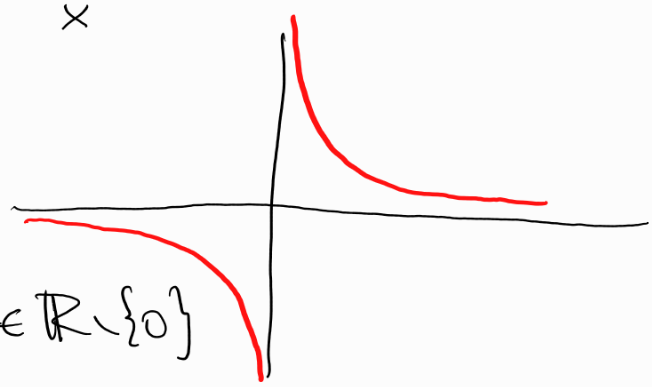
Tutte le potenze $f(x) = x^\alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ sono continue nel loro dominio.

$\alpha = 1/2 \implies f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathrm{dom} f = [0, +\infty)$



$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 \in [0, +\infty)$$

$\alpha = -1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ è continua nel suo dominio. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Altre funzioni continue nel loro dom: esponenziali $f(x) = b^x$

$b > 0$

logaritmi: $f(x) = \log_b x \quad \forall\, b > 0, b \neq 1.$

$$\lim_{x \to x_0} \log_b x = \log_b x_0 \quad \forall\, x_0 > 0.$$