$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin x = x + o(x) \qquad x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

$$\sin x - \operatorname{tg} x = \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + o(x) = o(x)$$

non si conclude!

$$\sin x - \operatorname{tg} x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\overset{\sim x}{\sin x}}{\underset{\sim 1}{\cos x}}}\ \underbrace{(\cos x - 1)}_{\sim -\frac{x^2}{2}} \sim -\frac{x^3}{2}$$

$$\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} \sim \frac{-x^3/2}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

questo limite non si riesce a calcolare con i limiti notevoli. Bisognerà aspettare De L'Hôpital oppure il polinomio di Taylor.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x)^{\operatorname{tg} x} - 1}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x \to 0}$$

$$(\cos x)^{\operatorname{tg} x} - 1 = \boxed{\frac{e^{\operatorname{tg} x \log(\cos x)} - 1}{\operatorname{tg} x \log(\cos x)}}\ \operatorname{tg} x \log(\cos x) \sim$$

$$\boxed{\text{oss. } \operatorname{tg} x \log(\cos x) \longrightarrow 0}$$

$$\frac{e^t - 1}{t} \to 1 \quad \text{dove } t = \operatorname{tg} x \log(\cos x) \to 0$$

$$\sim \underbrace{\operatorname{tg} x}_{\sim x} \log(\cos x) \sim x \log(\underbrace{\cos x}_{\to 1}) = x \log(1+(\cos x - 1)) \sim$$

$$\boxed{\text{OSS: } \cos x - 1 \to 0}$$

$$\sim x \,(\underbrace{\cos x - 1}_{\sim -\frac{x^2}{2}}) \sim -\frac{x^3}{2}$$

$$\boxed{\log(1+t) \sim t \quad \text{per } t \to 0}$$

$$\frac{(\cos x)^{\operatorname{tg} x} - 1}{x^3} \sim \frac{-x^3/2}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

$x \to 0$

In alternativa: $\log(\cos x) = \log(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{\to 0}) \sim$

$$\sim -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{\uparrow}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Confronto di infiniti / infinitesimi:

"Ordinare" i seguenti infiniti per $x \to -\infty$:

$f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $\qquad g(x) = |x|^{\pi} \underset{(x<0)}{=} (-x)^{\pi}$

$h(x) = 2^{\sqrt{-x}}$, $\qquad K(x) = x^2 \log_2(x^2) = |x|^2 \cdot 2 \log_2 |x|$

Confronto a due a due le funzioni:
Ricordo che $f_1(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $f_2(x)$ per $x \to -\infty$ se $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0$

ossia se $f_2(x) = o(f_1(x))$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{|x|^\pi} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \overbrace{\sqrt{1+1/x^4}}^{\sim 1}}{|x|^\pi} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^2}{|x|^\pi} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|^{\pi-2}} = 0.$$

N.B. $\sqrt{1+x^6} = |x|^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$ attenzione perché $x\to-\infty$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $g(x)$ per $x\to-\infty$ $\qquad f(x) < g(x)$

Confronto tra g e h:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|^\pi}{2^{\sqrt{|x|}}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\pi}{2^{\sqrt{t}}} =$$

$t = |x| \to +\infty$ $\qquad s = \sqrt{t} \to +\infty$

$$= \lim_{s\to+\infty} \frac{s^{2\pi}}{2^s} = 0$$ (esponenziale contro potenza)

$$f < g < h$$

OSS $k(x) = 2|x|^2 \log_2|x|$ per $x\to-\infty$

è infinito di ordine superiore rispetto a x^2

ma di ordine inferiore rispetto a $|x|^\alpha$ $\forall \alpha > 2$.

$$\frac{k(x)}{|x|^\alpha} = \frac{2|x|^2 \log_2|x|}{|x|^\alpha} = \frac{2\log_2|x|}{|x|^{\alpha-2}} \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$$

Quindi $\underset{x^2}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} < k(x) < \underset{|x|^\pi}{\underset{\shortparallel}{g(x)}}$

Conclusione: $f < k < g < h$ per $x \to -\infty$

<u>Confronto di infinitesimi</u>: Ricordiamo che:

Siano $f(x), g(x)$ due infinitesimi per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$

Diciamo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore risp. a $g(x)$ per $x \to x_0$ se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Es. x^2 è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a x^3 per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = 0$$

$\frac{1}{x^3}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right) \Big/ \left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$$

<u>Esercizio</u> ordinare in ordine crescente i seguenti infinitesimi per $x \to 0^+$

$$f(x) = x \log_2 x, \qquad g(x) = -\frac{x^{1/3}}{\log_3 x}$$

$$h(x) = x^{-10} 2^{-1/x}, \qquad k(x) = \sin x \sim x$$

$$f(x) = \underbrace{x}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\log_2 x}_{\downarrow\, -\infty} \longrightarrow 0 \quad (\text{già visto in passato})$$

$f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore risp. a x (per $x \to 0^+$)

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\cancel{x} \log_2 x}{\cancel{x}} \to -\infty$$

ma di ordine superiore rispetto a x^α $\forall \alpha < 1$.

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{x \log_2 x}{x^\alpha} = x^{\overbrace{1-\alpha}^{>0}} \log_2 x \to 0$$

$f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore risp. a $k(x)$

$g(x)$ è infinitesimo di ordine superiore risp. a $x^{1/3}$
ma " di ordine inferiore " " x^α $\forall \alpha > 1/3$

$$\frac{g(x)}{x^\alpha} = -\frac{x^{1/3}}{(\log_3 x)\, x^\alpha} = -\frac{1}{\underbrace{(\log_3 x)\, x^{\overbrace{\alpha - 1/3}^{>0}}}_{\to 0^-}} \to +\infty \qquad \alpha > 1/3$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore risp. a $f(x)$
basta confrontare entrambe con $x^{1/2}$

$$h(x) = x^{-10}\, 2^{-1/x} = \frac{1}{x^{10}\, 2^{1/x}} = \frac{t^{10}}{2^t} \to 0 \qquad t = \frac{1}{x} \to +\infty$$

Confrontiamolo con $k(x) = \sin x \sim x$

$$\frac{h(x)}{k(x)} = \frac{1}{x^{10} \cdot 2^{1/x} \cdot \sin x} \sim \frac{1}{x^{11}\, 2^{1/x}} \to 0$$

$h(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $k(x)$
anzi è di ordine superiore risp. a x^α $\forall \alpha \geq 0$.

Risposta: in ordine crescente di infinitesimo:

$$g(x),\ f(x),\ k(x),\ h(x)$$

Ordine di infiniti e infinitesimi

Scelta di infiniti/infinitesimi "campione"

$\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}$

	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
infinito	x	$-x$	$\frac{1}{x-x_0}$	$\frac{1}{x_0-x}$
infinitesimo	$1/x$	$-\frac{1}{x}$	$x-x_0$	x_0-x

DEF Diremo che $f(x)$ è infinito/infinitesimo di ordine $\alpha>0$ per $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$

se $f(x) \sim \ell\,(g(x))^\alpha$ per $x\to+\infty/-\infty/x_0^+/x_0^-$

dove $g(x)$ è l'infinito/infinitesimo corrispondente della tabella

e $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Esempi:

$1-\cos x$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x\to 0^\pm$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow{x\to 0^+} \frac{1}{2}$$

$\sin x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x\to 0^\pm$

$\frac{1}{x^2+5}$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x\to+\infty$

$\sim 1/x^2$

$\underbrace{3x^4 - 2x^3 + 5}_{\sim 3x^4}$ è un infinito di ordine 4 per $x \to +\infty$

$\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+7}} \sim \dfrac{1}{x^{1/4}}$ è un infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{4}$ per $x \to +\infty$

$2x^5 - 3x^2$ è un infinito di ordine 5 per $x \to \pm\infty$

$\underbrace{2x^5 - 3x^2}_{= x^2 (\underbrace{2x^3 - 3}_{\to -3})}$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0^{\pm}$

$\underbrace{x^3 - 2x^2}_{= x^2 (x-2) \sim 4(x-2)}$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 2^{\pm}$

$\log x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \to 1^{\pm}$

$= \log(1 + \underbrace{(x-1)}_{\to 0}) \sim x - 1$

OSS Non tutti gli infiniti/infinitesimi hanno un ordine.

e^x è infinito di ordine superiore risp. a x^α $\forall \alpha > 0$, per $x \to +\infty$

$\log x$ è infinito di ordine inferiore risp. a x^α $\forall \alpha > 0$, "

$x^2 \log x$ è infinito di ordine superiore risp a x^2 ma inferiore risp. a x^α $\forall \alpha > 2$. $\Big\}$ per $x \to +\infty$

e^x è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ $\forall \alpha > 0$ per $x \to -\infty$

$$\frac{e^x}{\left(-\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \frac{e^{-y}}{\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha} = \frac{y^\alpha}{e^y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$$

$y = -x \to +\infty$