TEOREMA "PONTE" (Tra limiti di funzioni e di successioni)

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$, x_0 pto di accum. di X. Allora:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff$ $\forall$ successione $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ significa:

$\boxed{\forall V \text{ intorno di } \ell \ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\} \text{ si ha } f(x) \in V. \quad (*)}$

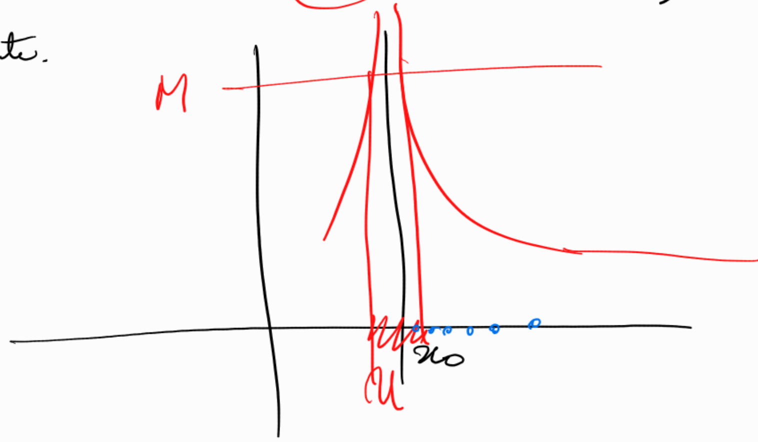
Sia ora $\{a_n\}$ t.c. $a_n \in X \setminus \{x_0\}$, $a_n \to x_0$

Vogliamo provare che $f(a_n) \to \ell$.

Dobbiamo provare che $\forall V$ intorno di ℓ si ha definitivamente (per $n\to+\infty$) $f(a_n) \in V$. Sappiamo per $(*)$ che dato V, $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V$.

Poiché $a_n \to x_0$, definitivamente si ha $a_n \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow$ $f(a_n) \in V$ definitivamente.



Dim $\boxed{\Leftarrow}$

Supponiamo per assurdo che non sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Negare $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ significa: negare

$\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ $f(x) \in V$

cioè

$\exists V$ intorno di ℓ t.c. $\forall U$ intorno di x_0 $\exists x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ verificante $f(x) \notin V$

Voglio costruire, a partire da ciò, una succ$^{\text{ne}}$ $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$ ma $f(a_n) \not\to \ell$.

Per semplicità prendo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Prendo $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 = (x_0 - 1, x_0 + 1) \Rightarrow \exists\, x = a_1 \in \mathcal{U}_1 \cap X \setminus \{x_0\}$ t.c. $f(a_1) \notin V$.

Prendo $\mathcal{U} = \mathcal{U}_2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \exists\, a_2 \in \mathcal{U}_2 \cap X \setminus \{x_0\}$ t.c. $f(a_2) \notin V$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_3 = \left(x_0 - \frac{1}{3}, x_0 + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \exists\, a_3$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_n = \underline{\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)} \Rightarrow \exists\, \underline{a_n \in \mathcal{U}_n} \cap X \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } f(a_n) \notin V$$

In questo modo ho costruito una successione $\{a_n\}$ t.c.

$a_n \in X \setminus \{x_0\}$

$|a_n - x_0| < 1/n \Rightarrow a_n \to x_0$ ma $f(a_n) \notin V$

quindi $f(a_n) \not\to \ell$ $\square$

Resterebbe da provare l'ultima parte nei casi in cui $x_0 = +\infty$ opp. $x_0 = -\infty$.

Se $x_0 = +\infty$, bisogna prendere $\mathcal{U}_n = (n, +\infty)$
" $x_0 = -\infty$, " " $\mathcal{U}_n = (-\infty, -n)$

<u>Applicazioni</u>

- Provare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ usando solo successioni
- Provare che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste:

basta trovare due successioni $\{a_n\}, \{b_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c.

$$a_n \to x_0 \qquad \text{ma} \qquad \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$$
$$b_n \to x_0$$

Aritmetica dei limiti

Siano $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto. di accum. di X

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \ell + \beta m$; (Linearità del limite)

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell m$;

3) se $m \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$.

OSS se $m \neq 0$, il teor. della perman. del segno ci dice che $g(x) \neq 0$ def^{te} per $x \to x_0$

Dim. Si possono dimostrare con gli intorni, ma è più facile usare il teor. ponte.

Dim. 2) Voglio provare che $\forall \{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) g(a_n) \to \ell m$

e poi applicare il teor. ponte $\boxed{\Leftarrow}$

Sappiamo che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, quindi per il teor. ponte $\boxed{\Rightarrow}$ $f(a_n) \to \ell$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, quindi - - - - - - - $g(a_n) \to m$

aritmetica dei limiti per successioni $\Downarrow$

$f(a_n) g(a_n) \to \ell m$

□

Le altre si provano in modo simile

$$\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{x^2+2x}^{\to 15}}{\underbrace{x-x^3+1}_{\to -23}} = -\frac{15}{23}$$

$x\to 3 \implies \begin{array}{l} x^2 = x\cdot x \to 3\cdot 3 = 9 \\ 2x \to 6 \end{array} \Bigg| \implies x^2+2x \to 9+6 = 15$

$\begin{array}{l} x\to 3 \\ -x^3 \to -27 \\ 1 \to 1 \end{array} \Bigg| \; x - x^3 + 1 \implies 3-27+1 = -23$

Ora si può anche estendere l'aritmetica dei limiti a casi del tipo

se, per $x\to x_0$ $\begin{array}{l} f(x)\to +\infty \\ g(x)\to m \end{array} \Bigg| \implies f(x)+g(x) \to +\infty$ se $m\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

cioè "$+\infty + m = +\infty$" $\forall m\in\mathbb{R}$
"$+\infty+\infty = +\infty$"

$+\infty + m = +\infty \quad \forall m\in\mathbb{R}$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty + \ell = -\infty \quad \forall \ell\in\mathbb{R}$.

$-\infty - \infty = -\infty$

Queste "regole" possono essere generalizzate, per es.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,
$g(x)$ limitata inferiorm. def^{te} per $x\to x_0$ $\Bigg| \longrightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = +\infty$

Infatti in un intorno di x_0 $f(x)+g(x) \geq f(x) + c \longrightarrow +\infty$

$$+\infty \cdot m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m>0 \\ -\infty & \text{se } m<0. \end{cases}$$

$$-\infty \cdot m = \begin{cases} -\infty & \text{se } m>0 \\ +\infty & \text{se } m<0 \end{cases}$$

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$
$$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty.$$

Ognuna di queste righe è un teorema.

Per es. la prima:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m \in (0,+\infty) \end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty.$$

Infatti se $g(x) \to m \in (0,+\infty)$

def^{te} $g(x) > \frac{m}{2} \Rightarrow f(x)g(x) > \underbrace{f(x)\frac{m}{2}}_{\downarrow\, +\infty}$ def^{te}

OSS In realtà non serve che g ammetta limite, ma solo che $g(x) \geq c > 0$ def^{te} per $x \to x_0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow\,+\infty} \underbrace{(3+2\sin x)}_{\substack{\text{non ha limite} \\ \text{ma è } \geq 1}} = +\infty$$

$$\frac{\pm\infty}{m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } m>0 \\ \mp\infty & \text{se } m<0 \end{cases}$$

$$\frac{\ell}{\pm\infty} = 0 \qquad \forall \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{\ell}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \ell\in(0,+\infty) \\ -\infty & \text{se} \quad \ell \in(-\infty,0)\end{cases}$$

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty .$$

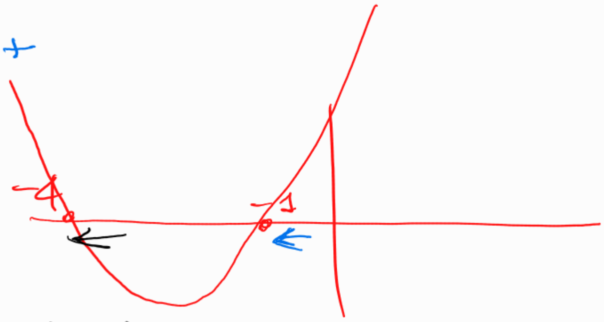
Restano le conosciute forme indeterminate $+\infty-\infty$, $\pm\infty\cdot 0$,

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{1-x^2}^{\to -8}}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}} = \left(\frac{-8}{0^+}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\underbrace{x^2+5x+4}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$y = x^2+5x+4$



$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2+5x+4} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{1}{x^2+5x+4} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \Big(\underbrace{x}_{\to -\infty} - \underbrace{3\cos(x^2)}_{\text{limitata}}\Big) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^5+2x^4+x\right) = (-\infty+\infty) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^5}_{\to -\infty}\underbrace{\Big(3+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}\Big)}_{\to 3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+2x^4+x}{x^5+7x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^5}\,(3+o(1))}{\cancel{x^5}\,(1+o(1))} = 3$$

> **Notazione:** Diremo che $f(x)=o(1)$ per $x\to x_0$
>
> se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+2x^4+x}{x^4+7x^2+1} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{5}}\,(3+o(1))}{\cancel{x^4}\,(1+o(1))} = (-\infty\cdot 3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\overbrace{\sqrt{|x|}}^{=\sqrt{-x}}}{x^3-5x+12} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}^{\,1}\Big(2-\overbrace{\frac{\sqrt{|x|}}{x}}^{=o(1)}\Big)}{x^{\cancel{3}\,2}\,(1+o(1))} = 0$$

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{-x}}{x} = \frac{\sqrt{-x}}{-\underbrace{(-x)}_{=(\sqrt{-x})^2}} = \frac{1}{-\sqrt{-x}} \to 0 \qquad \text{per } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+2x^4+x}{x^4+7x^2+1} \qquad \begin{matrix} \sim 3x^5 \\ \sim x^4 \end{matrix}$$

Lo abbiamo risolto scrivendo

si può anche scrivere così

$$3x^5+2x^4+x = 3x^5(1+o(1)) \sim 3x^5$$

$$x^4+7x^2+1 = x^4(1+o(1)) \sim x^4$$

per $x\to-\infty$

DEF Scriveremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono asintoticamente equivalenti per $x\to x_0$, in simboli $f(x)\sim g(x)$ per $x\to x_0$ se f, g sono def^{te} $\neq 0$ per $x\to x_0$ e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ ossia } f(x) = g(x)(1+o(1))$$

Regola di uso nei limiti è consentito sostituire una funzione con una asintoticamente equivalente:

- al numeratore/denominatore di una frazione
- nel fattore di un prodotto
- in una potenza con esponente fissato.

È VIETATO FARLO:

- in somme o differenze.
- all'interno di funzioni

OSS $3x^5+2x^4+x \sim 3x^5$ per $x\to\pm\infty$

$$\underbrace{3x^5+2x^4+x}_{\displaystyle = x(\underbrace{3x^4+2x^3+1}_{=1+o(1)})} \sim x \quad \text{per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+4^{-x}}{7+3^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$7+3^x = 3^x(1+o(1)) \sim 3^x$$

$$2^x\left(1+\frac{4^{-x}}{2^x}\right) = 2^x(1+o(1)) \sim 2^x$$

Limiti di funzioni elementari (potenze, exp, log).

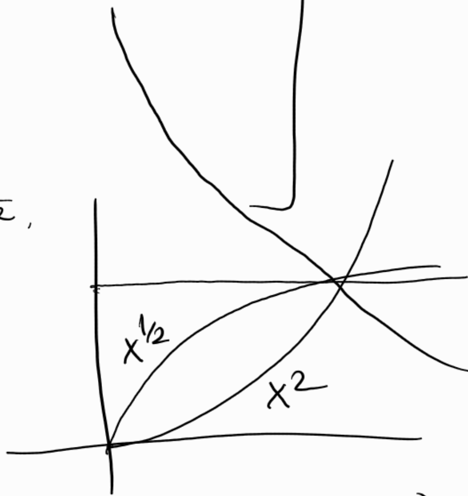
$f(x) = x^\alpha$ $\quad\alpha\in\mathbb{R}$ (quindi $x>0$)

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

lo sappiamo già, perché abbiamo provato che, se $a_n\to+\infty$

$$\Longrightarrow (a_n)^\alpha \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$$

e quindi concludiamo con il teorema ponte.



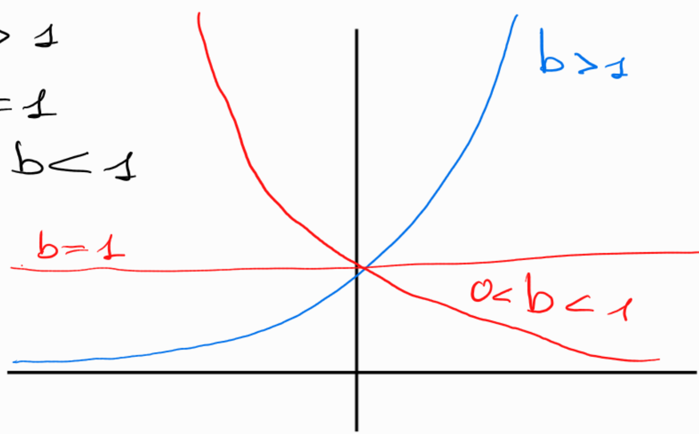
$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \qquad \forall x_0\in(0,+\infty)$$

Limiti di esponenziali

$f(x) = b^x$ $\quad b>0.$ $(x\in\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ 0 & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$$

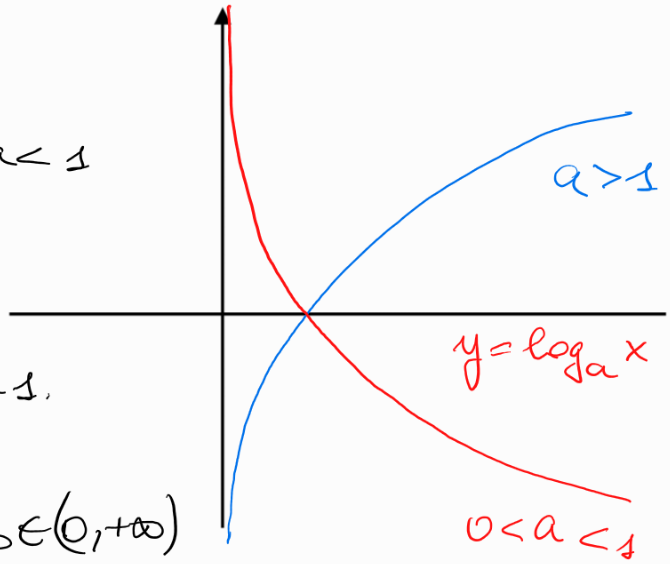


$$\lim_{x\to-\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0\in\mathbb{R}} b^x = b^{x_0}$$

Limiti di logaritmi $\quad f(x) = \log_a x \qquad a>0,\ a\neq 1$
$x>0$.

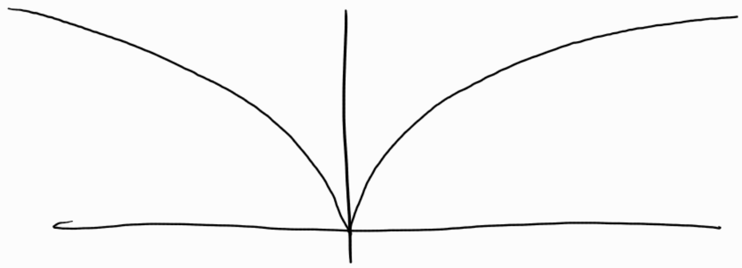
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a>1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \qquad \forall x_0\in(0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^{4/5}}_{\sqrt[5]{x^4}} = +\infty$$



Limiti di funzioni trigonometriche $\quad \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \begin{matrix}\sin x\\ \cos x\end{matrix} \quad \nexists$$

Abbiamo provato che $\lim_{x\to0} \sin x = 0$
(si basa su $|\sin x| \le |x| \quad \forall x\in\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \forall x_0\in\mathbb{R}.$$

Per dimostrarlo, mostriamo che $|\sin x - \sin x_0| \to 0$
per $x\to x_0$

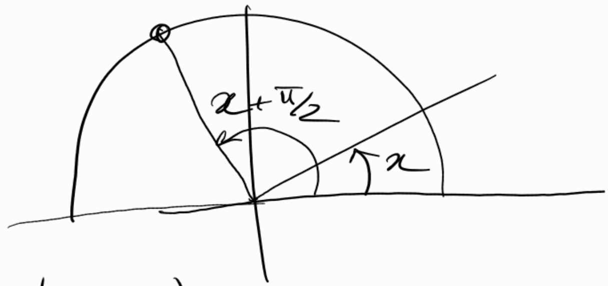
$$0 \le |\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| =$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x - \sin x_0 = 2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2} \\ \text{formula di prostaferesi}\end{array}\right]$$

$$= 2\underbrace{\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|}_{\le \frac{|x-x_0|}{2}}\underbrace{\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|}_{\le 1} \le 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} = \underbrace{|x-x_0|}_{\xrightarrow{x\to x_0} 0}$$

$$\Rightarrow |\sin x - \sin x_0| \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$



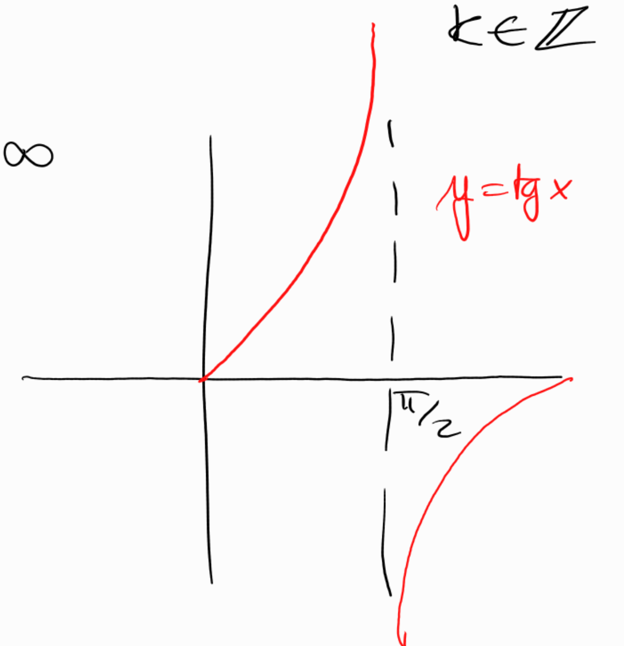
OSS $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \lim_{x\to x_0} \sin\underbrace{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\to x_0+\frac{\pi}{2}} = \sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to \sin x_0}}{\underbrace{\cos x}_{\to \cos x_0}} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0 \quad \text{se } x_0 \ne \frac{\pi}{2}+k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 1}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0^+}} = +\infty$$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Riferimenti sul testo consigliato: §§ 4.1, 4.2, 4.3, 4.5.