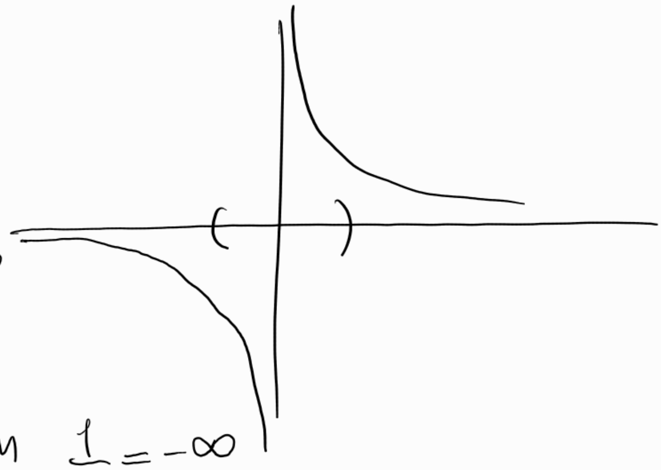
Lunedì 21/10 iniziamo la lezione alle 8:40.
Esercitazione con il tutor alle 14:00 in Aula 9.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$$



Vorrei dare un significato preciso alle espressioni

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+}}_{x\to 0 \text{ da valori superiori a zero}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \underbrace{\lim_{x\to 0^-}}_{x\to 0 \text{ da valori inferiori a } 0.} \frac{1}{x} = -\infty$$

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $E \subseteq X$

definiamo $f|_E (x) = f(x) \quad \forall x \in E.$

E' una funzione con un dominio "ristretto" ad E.

DEF Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Diremo che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ (limite da destra)

se la restrizione $f|_{X\cap(x_0,+\infty)}$ verifica

$$\lim_{x\to x_0} f|_{X\cap(x_0,+\infty)} (x) = \ell,$$ cioè

$\forall\, U$ intorno di ℓ $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X$ verificante

$x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha $f(x) \in U$.

Diremo che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ (limite da sinistra)

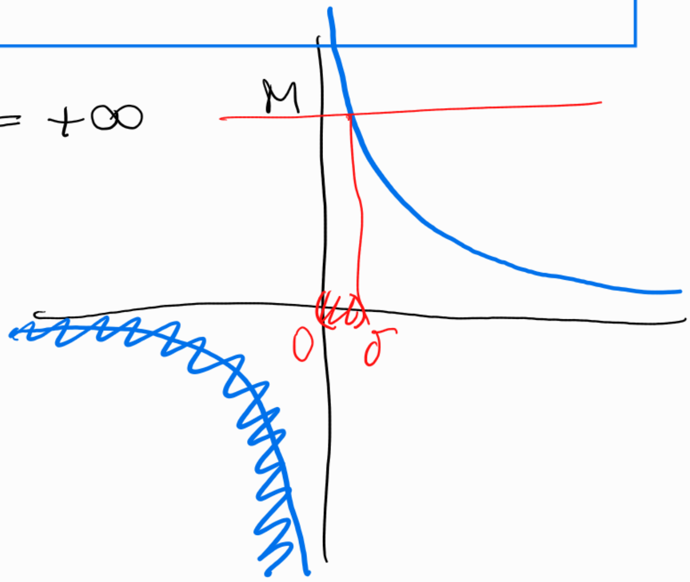
se la restrizione $f|_{X\cap(-\infty,x_0)}$ verifica

$$\lim_{x\to x_0} f|_{X\cap(-\infty,x_0)}(x) = \ell\,,$$ cioè

$\forall V$ intorno di ℓ $\exists\,\delta>0$ t.c. $\forall x\in X$ verificante

$x_0-\delta<x<x_0$ si ha $f(x)\in V$.

Verifichiamo che $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$



$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

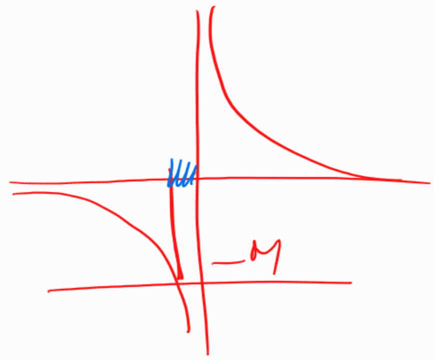
Devo provare che

$\forall M>0$ $\exists\,\delta>0$ t.c. $\forall x$ verificante $0<x<\delta$ si ha $\frac{1}{x}>M$

$-\delta<x<0$ $\qquad \frac{1}{x}<-M$

$$\frac{1}{x}>M \iff 0<x<\frac{1}{M}=:\delta$$

$$\frac{1}{x}<-M \iff -\underbrace{\frac{1}{M}}_{\delta}<x<0$$



Sia $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

OSS Per considerare $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, x_0 deve essere pto di accumulazione di $X \cap (x_0,+\infty)$ (pto di accum. da destra)

cioè, ogni intorno destro di x_0, della forma $(x_0, x_0+\delta)$ $\delta>0$

contiene infiniti pti di X.

OSS 2 Se x_0 è pto di accum. sia da destra che da sinistra di X, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell .$$

DEF limiti per eccesso e per difetto. $\ell\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^{\pm}$ significa $\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ f(x) \gtrless \ell \text{ def}^{te} \text{ per } x\to x_0 \end{cases}$

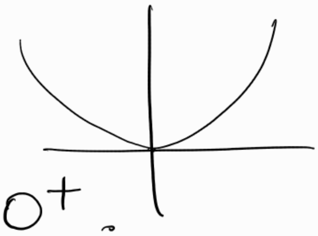
cioè (se per es. $x_0\in\mathbb{R}$)

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ t.c. $\forall x\in X$ verificante $0<|x-x_0|<\delta$

si ha $\ell < f(x) < \ell+\varepsilon$

$\ell-\varepsilon < f(x) < \ell$

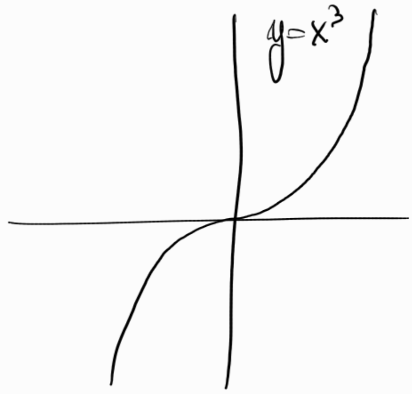
Esempio $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.



In realtà posso essere più preciso: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$.

Si possono mescolare limiti da destra/sinistra e per eccesso/difetto.

$\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

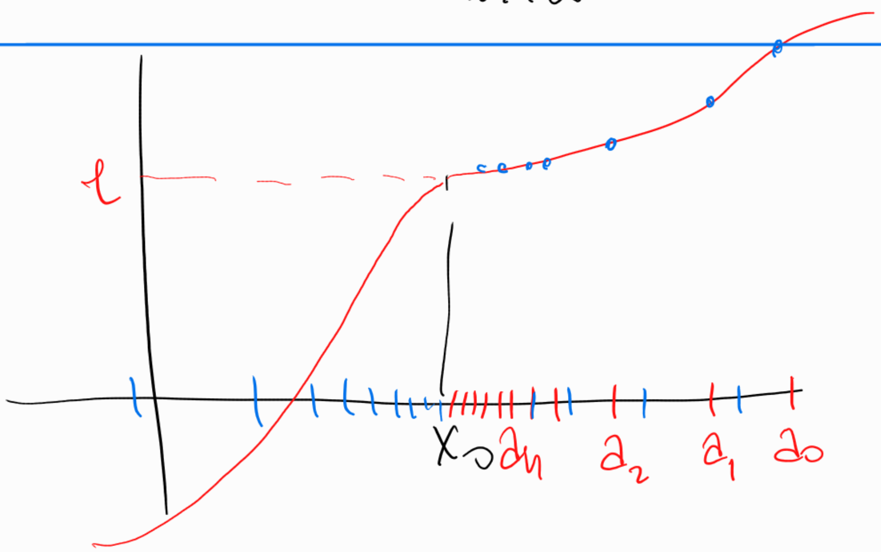


$\lim_{x\to 0^+} x^3 = 0^+$ $\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0^-$

TEOREMA "PONTE" tra funzioni e successioni

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\ell, x_0 \in \mathbb{R}^*$; x_0 pto di accum. di X.
Allora

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff$ $\forall$ succ^{ne} $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$.



Esempi di uso del teorema ponte.

Voglio provare che $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$ con il teorema ponte.

Qui:
$X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $x_0 = 0$, $\ell = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Sia $\{a_n\}$ una generica succ^{ne} di numeri non nulli t.c.

$$a_n \to 0 \Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n^2} \longrightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Poiché questo è vero $\forall \{a_n\}$ fatta così, per il thm. ponte $\boxed{\Leftarrow}$

si ha $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ 0 & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$$

Proviamola nel caso $b>1$.

$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ Voglio provarlo con il teor. ponte.

Sia $\{a_n\}$ t.c. $a_n \to +\infty$. Cosa fa $f(a_n)$?

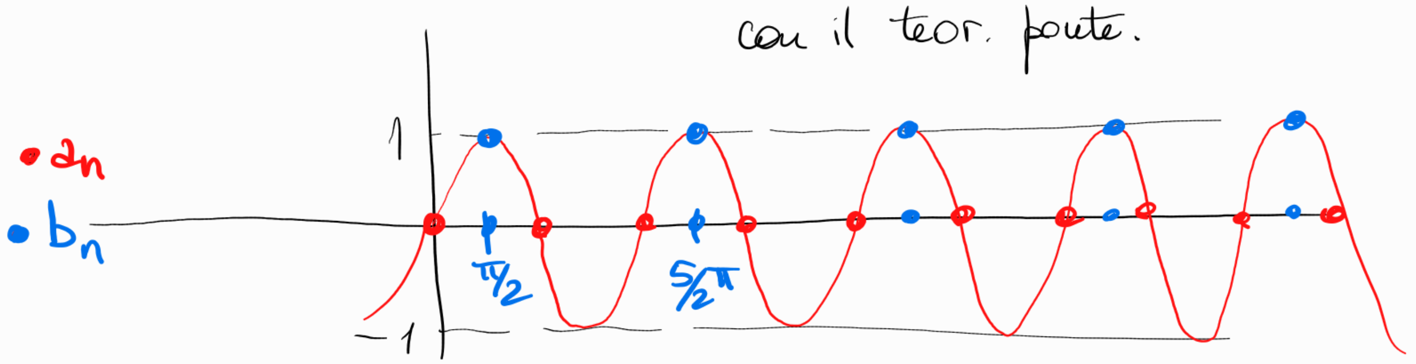
$f(a_n) = b^{a_n} \longrightarrow +\infty$. Ma questo è vero $\forall a_n \to +\infty$

Per il teorema ponte $\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$.

Esempio "in negativo".

Voglio dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \sin x \nexists$.

con il teor. ponte.



Se esistesse $\lim_{x\to+\infty} \sin x = \ell \in \mathbb{R}^*$, dal teorema ponte $\boxed{\Rightarrow}$ seguirebbe

che $\forall$ succ^{ne} $a_n \to +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \ell$.

Voglio trovare due succ^{ni} $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ t.c. $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$

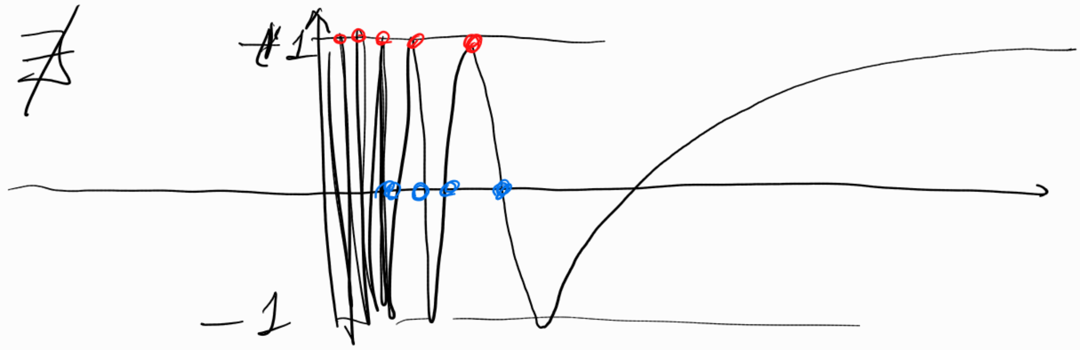
t.c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(a_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(b_n)$

Per es. prendo $a_n = n\pi \longrightarrow +\infty$, $\sin a_n = \sin(n\pi) = 0 \to 0$

$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \longrightarrow +\infty$, $\sin(b_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$

> Per provare che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ non esiste, basta trovare due succ^{ni} $a_n, b_n \to x_0$ $(a_n, b_n \neq x_0)$
> t.c. $f(a_n) \to \ell$, $f(b_n) \to m$ $\ell \neq m$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} \nexists$



Devo trovare due successioni $a_n, b_n \to 0^+$ t.c.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{a_n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{b_n}$

$a_n = \frac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0^+$ $\cos\frac{1}{a_n} = \cos(2n\pi) = 1 \longrightarrow 1$

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \longrightarrow 0^+$ $\cos\frac{1}{b_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0 \longrightarrow 0$

Proprietà dei limiti di funzione

> **TEOREMA** (unicità del limite)
>
> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, se esiste, è unico.

TEOREMA (permanenza del segno)

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in (0, +\infty] \Rightarrow f(x) > 0$ def^{te} per $x \to x_0$

cioè: $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0 t.c.

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$

Dim

Basta prendere un intorno di ℓ fatto di numeri positivi.

Equivalentemente:

$f(x) \le 0$ def^{te} per $x \to x_0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
$\Rightarrow \ell \le 0$

Generalizzazione:

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, e $m < \ell \Rightarrow f(x) > m$ def^{te} per $x \to x_0$

e $M > \ell \Rightarrow f(x) < M$ " "

TEOR dei CARABINIERI

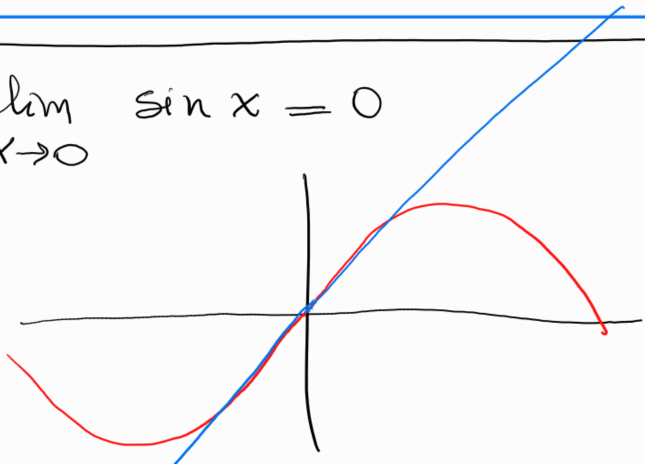
$f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ def^{te} per $x \to x_0$

e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Voglio provare che $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$



Voglio provare che $\boxed{|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$

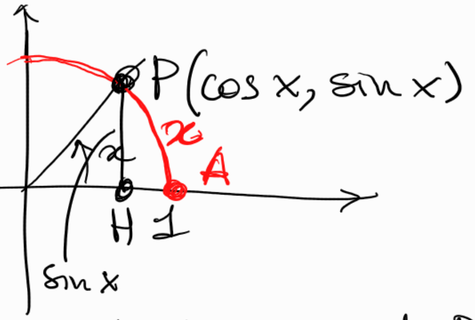
Basta provarla $\forall x \geq 0$. (le due funzioni sono pari)

Basta provare che $|\sin x| \leq x \quad \forall x \in [0, +\infty)$

E' ovvia per $x \geq 1$, basta provare che

$$|\sin x| \leq x \qquad \forall x \in [0, 1]$$

posso togliere il valore assol. perché x è nel 1° quadrante



$\sin x \leq x$. (segue dalla figura: la lunghezza di PH è minore della lunghezza dell'arco PA

Abbiamo provato che

$$|\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \implies |\sin x| \to 0 \quad \text{per } x \to 0$$

$x \to 0$

cioè $\sin x \to 0$