$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \cap \\ \mathbb{R}^*}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

x_0 deve essere p.to di accum di $X = \mathrm{dom}\, f$, cioè ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di X.
$(x \in X)$

Una proprietà $P(x)$ è vera <u>definitivamente per $x \to x_0$</u> (x_0 pto di accum. di X,) se esiste un intorno U di x_0 t.c. $P(x)$ è vera $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

DEF. limite di funzione

$f : X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X

Sia $\ell \in \mathbb{R}^*$.

Diremo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$,

oppure che $f(x) \xrightarrow[\text{tende a}]{} \ell$ per $x \xrightarrow[\text{tendente a}]{} x_0$

se $\forall V$ intorno di ℓ si ha $f(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0$

cioè

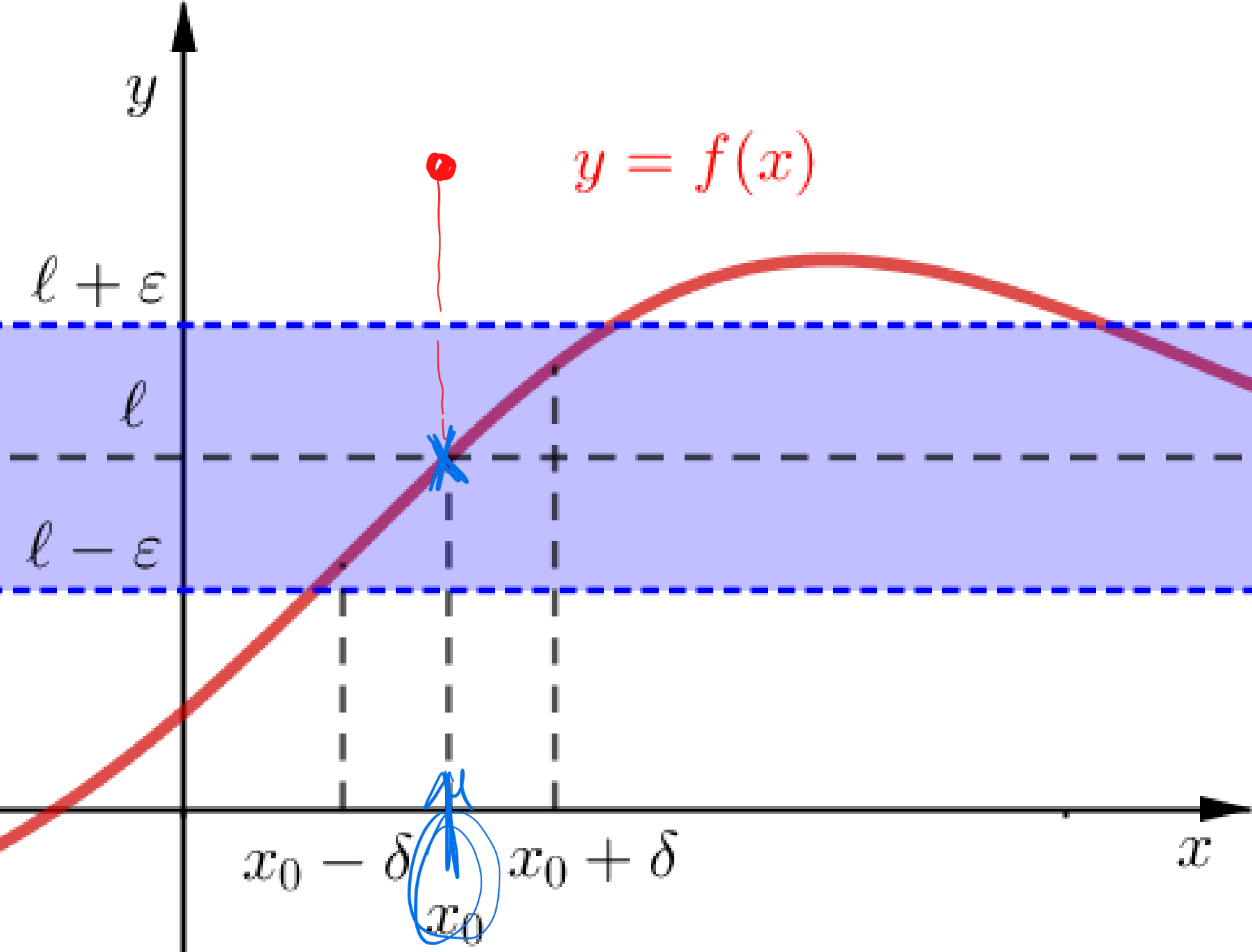
se $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

Questa definizione prende varie forme a seconda che

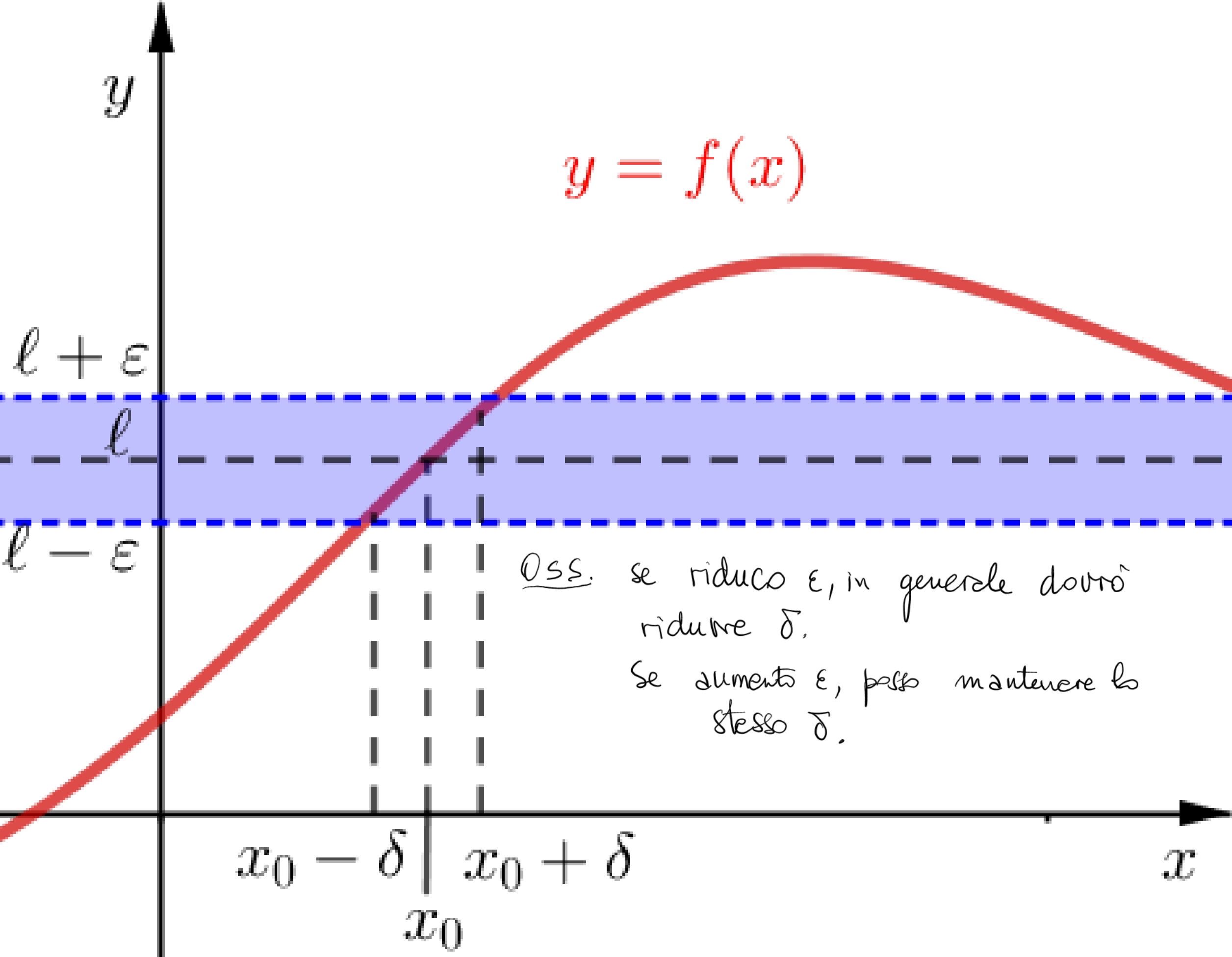
$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$

$\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$.

Quindi 9 casi in totale! (3×3)



y
y = f(x)
ℓ + ε
ℓ
ℓ − ε
x₀ − δ
x₀
x₀ + δ
x



<u>Oss.</u> se riduco ε, in generale dovrò ridurre δ.
Se aumento ε, posso mantenere lo stesso δ.

1° caso: $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

In questo caso gli intorni di ℓ sono del tipo

$$V = B_\varepsilon(\ell) = \{y \in \mathbb{R} : |y-\ell| < \varepsilon\}$$
$$= (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$$

gli intorni di x_0 sono del tipo

$$U = B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < \delta\} = (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

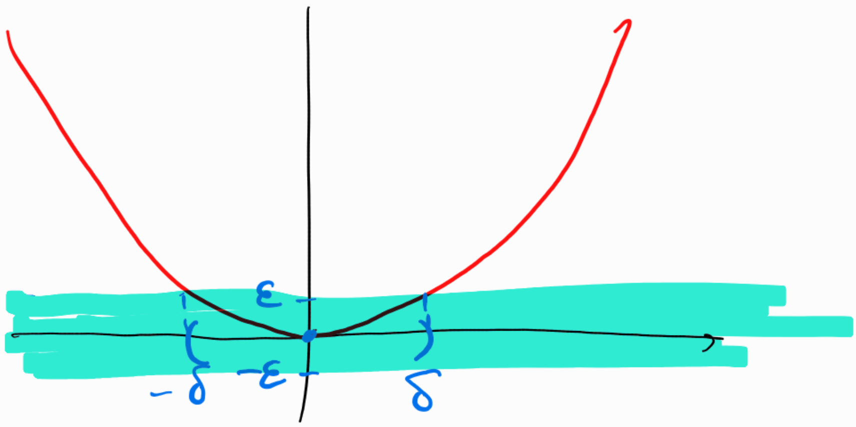
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ significa:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ $\forall x \in X$ verificante
$0 < |x-x_0| < \delta$

$x \neq x_0$

Esempio.

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$



Verifica:

Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Cerco δ t.c. $|x^2 - 0| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathbb{R}$ verificante
$0 < |x - 0| < \delta$

$x^2 < \varepsilon \iff |x| < \sqrt{\varepsilon}$. Quindi basta prendere
$\delta = \sqrt{\varepsilon}$

$\boxed{\Longleftarrow}$

OSS Se avessi posto $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

è sempre vero che $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

OSS Se ho verificato la definizione per un certo $\varepsilon_0 > 0$, la definizione è automaticamente verificata per tutti gli $\varepsilon > \varepsilon_0$. (con la stessa scelta di δ), quindi, se è utile, basta verificare la def^{ne} $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ con $\varepsilon_0 > 0$ scelto come vogliamo. (si vedano le figure precedenti)

2° caso: $x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$.

V sarà della forma $V = B_\varepsilon(\ell) = \{y \in \mathbb{R} : |y - \ell| < \varepsilon\} = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

U sarà della forma $U = (K, +\infty]$

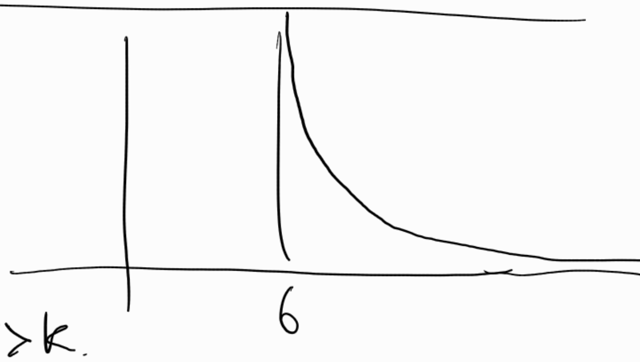
La def^{ne} diventa

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R}$ t.c.

$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ verificante $x > K$.

Se $f(x)$ è definita sui naturali, quindi la chiamiamo a_n anziché $f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-6}} = 0 \qquad X = (6, +\infty)$

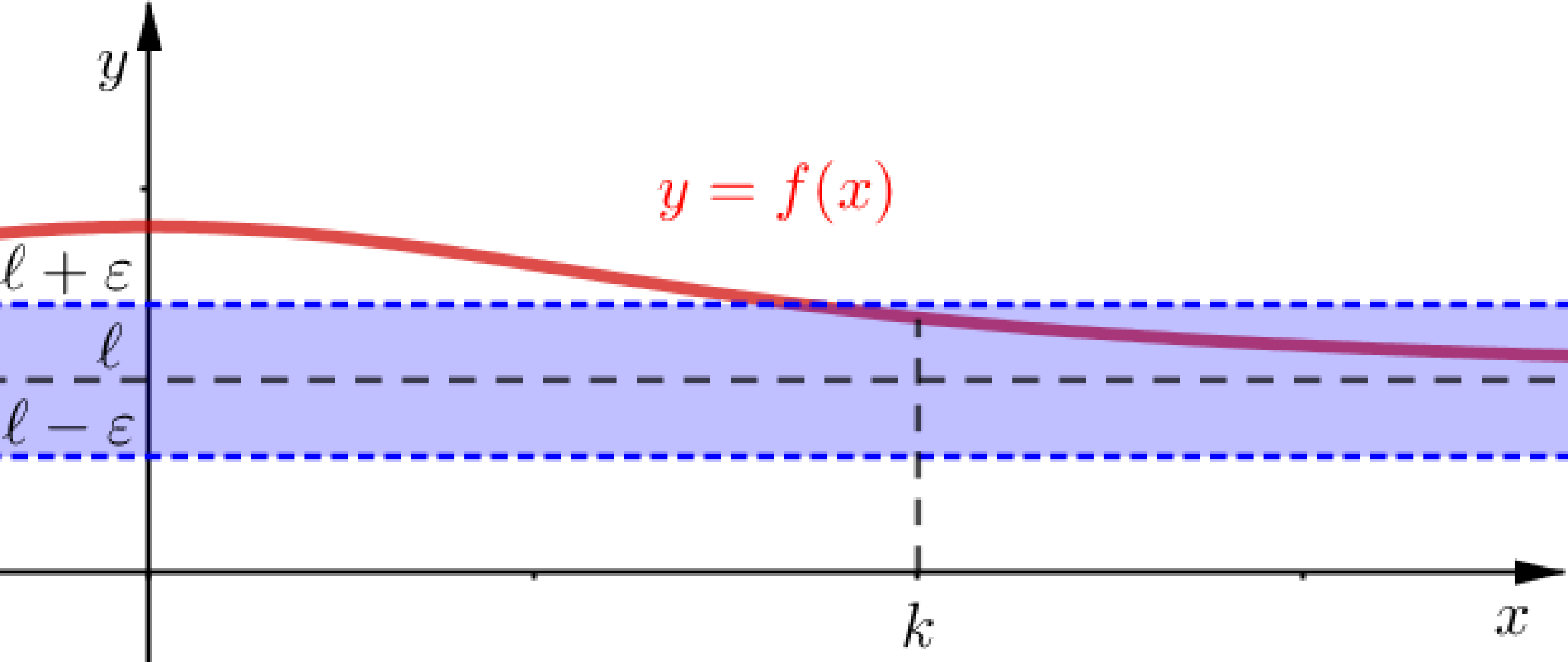


Fissato $\varepsilon > 0$, cerco K t.c.

$\left| \frac{1}{\sqrt{x-6}} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ verificante $x > K$.

$\Updownarrow$

$\frac{1}{\sqrt{x-6}} < \varepsilon \iff \sqrt{x-6} > \frac{1}{\varepsilon} \iff x - 6 > \frac{1}{\varepsilon^2} \iff x > \underbrace{6 + \frac{1}{\varepsilon^2}}_{= K}$



y
$y = f(x)$
$\ell + \varepsilon$
ℓ
$\ell - \varepsilon$
k
x

3° caso $\quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \ell = -\infty$.

Gli intorni di ℓ sono della forma $V = [-\infty, M) \quad (M \in \mathbb{R})$

gli intorni di x_0 " " " $\quad U = \{x : |x - x_0| < \delta\} \quad (\delta > 0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \text{ t.c.}$$
$$f(x) < M \quad \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta$$

OSS Basta verificarlo per tutti gli $M \leq M_0 \leftarrow$ scelto da M,

perché per gli M più grandi di M_0 la def^{ne} è vera con la stessa scelta di δ.

Per esempio, basta prendere $M < 0$, che però chiamo $-M$, con $M > 0$.

La def^{ne} diventa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } f(x) < -M.$$

Verifichiamo che

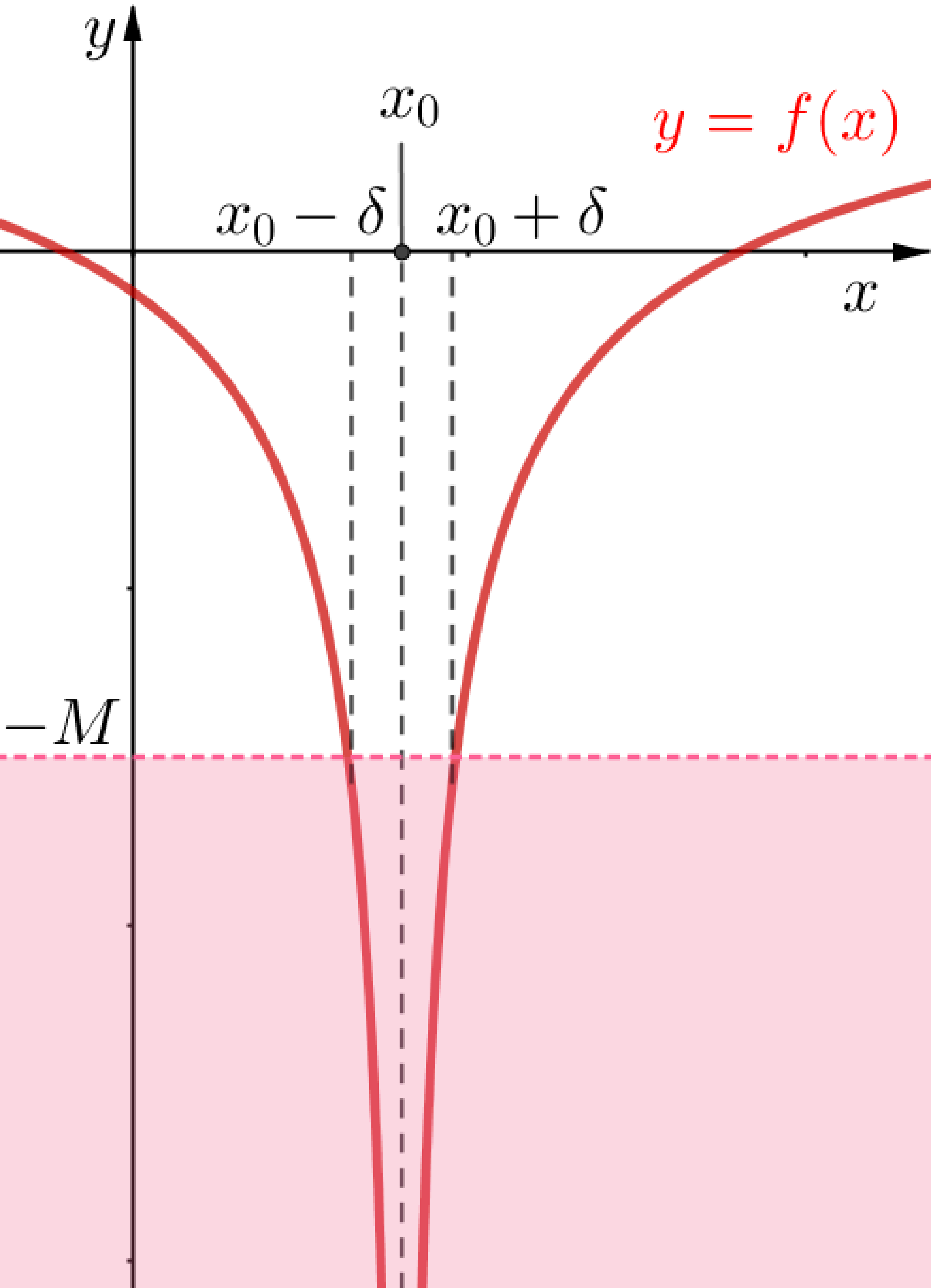
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^4}\right) = -\infty$$

Fisso $M > 0$, cerco $\delta > 0$ t.c. se $0 < |x| < \delta$ si ha

$$-\frac{1}{x^4} < -M$$

$$-\frac{1}{x^4} < -M \iff \frac{1}{x^4} > M \iff x^4 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$$

$x \neq 0 \qquad x \neq 0 \qquad x \neq 0$



y
x_0
$y = f(x)$
$x_0 - \delta$
$x_0 + \delta$
x
$-M$

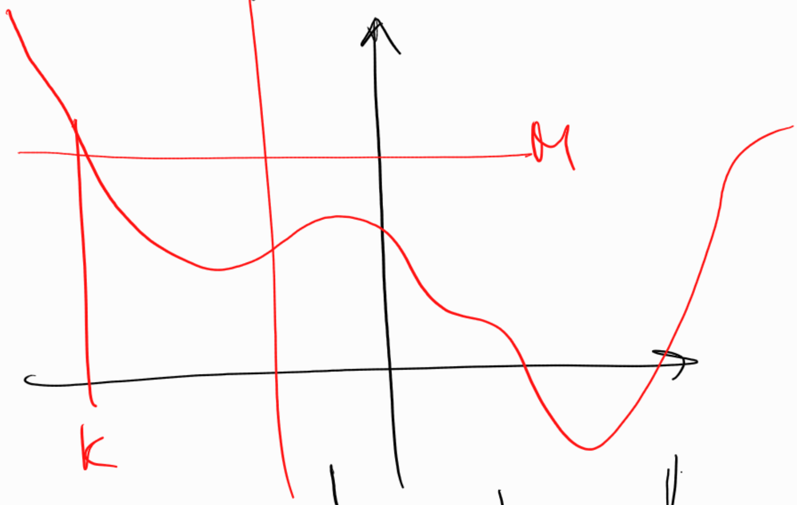
Caso 4 $\quad x_0 = -\infty, \quad \ell = +\infty$

Intorni di ℓ $\quad V = (M, +\infty]$

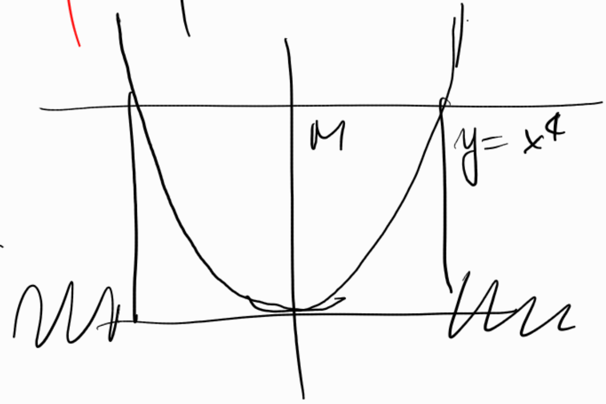
Intorno di x_0 $\quad U = [-\infty, K)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in X$ verificante

$x < K$ si ha $f(x) > M$.



$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$



Fissiamo $M > 0$, cerchiamo $K \in \mathbb{R}$ t.c.

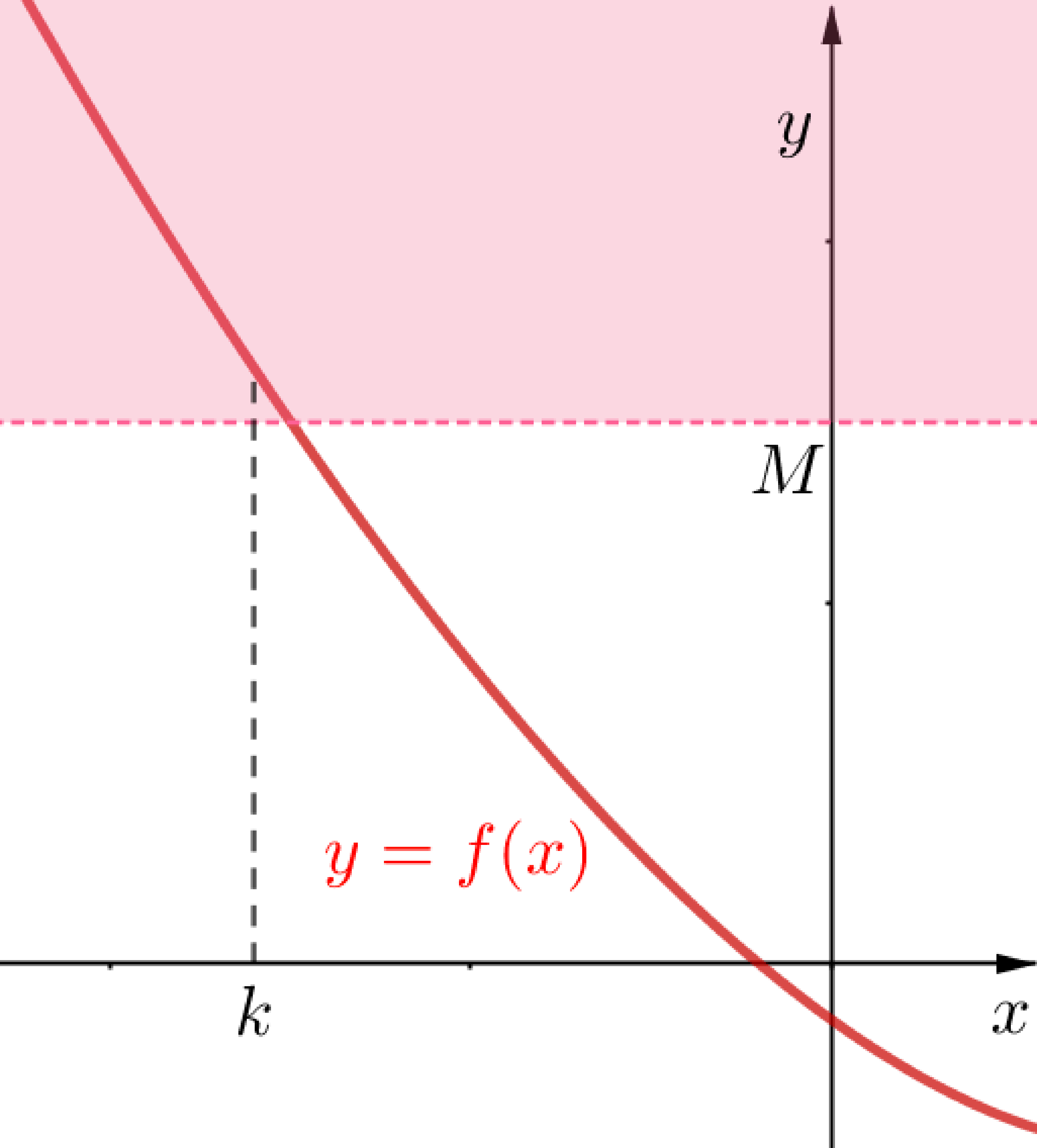
se $x < K$ allora $x^4 > M$.

$$x^4 > M \iff |x| > \sqrt[4]{M} \iff \left(x < -\sqrt[4]{M}\right) \vee \left(x > \sqrt[4]{M}\right)$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{x < -\sqrt[4]{M}} = K.$$

Esercizio importante: scrivere anche gli altri 5 casi di def^{ne} di limite.



y
M
y = f(x)
k
x

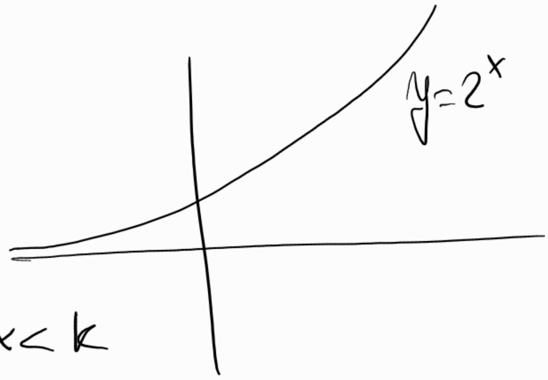
$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty \qquad (1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0 \qquad (2)$$

Verifica di (1)

Fissato $M>0$, cerco $k \in \mathbb{R}$ t.c. se x verifica $x>k$ allora $2^x > M$.

$$2^x > M \iff x > \log_2 M = k.$$



Verifica di (2)

Fissato $\varepsilon>0$, cerco $k \in \mathbb{R}$ t.c. per $x<k$ si ha $|2^x| < \varepsilon$.

$$|2^x| < \varepsilon \iff 2^x < \varepsilon \iff x < \log_2 \varepsilon = k$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{4}$$

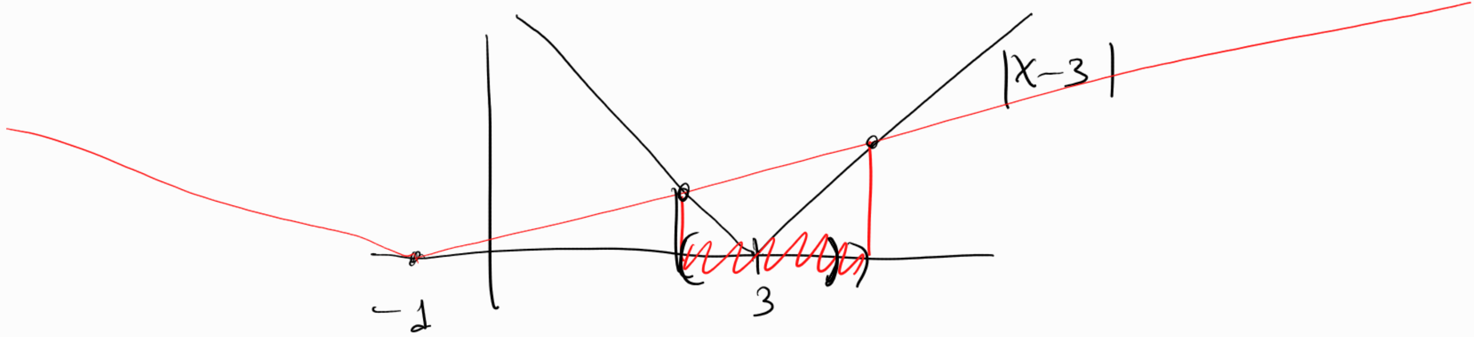
Verifica:

Fissato $\varepsilon>0$, cerco $\delta>0$ t.c. $\forall x \neq -1$ verificante $0 < |x-3| < \delta$ si ha $\left|\frac{x}{x+1} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x}{x+1} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4x-3x-3}{4(x+1)}\right| = \frac{|x-3|}{4\,|x+1|} < \varepsilon$$

1° modo

Trovare le sol^{ni} della diseq^{ne} $|x-3| < \varepsilon \cdot 4|x+1|$ (almeno per ε piccolo) e controllare che contengono un intorno di 3.



2° modo

$$\frac{|x-3|}{4|x+1|} < \varepsilon$$

impongo $|x-3|<1 \iff 2<x<4 \iff 3<x+1<5$

$$\Updownarrow$$

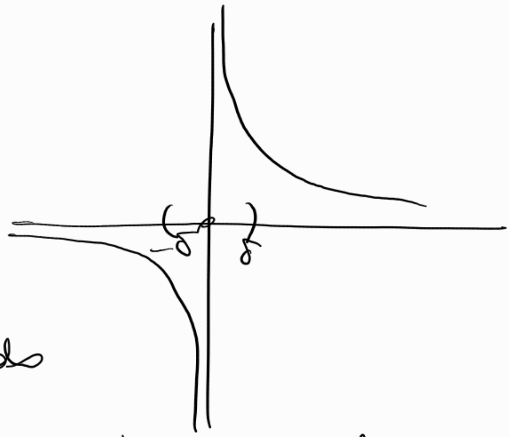
$$3<|x+1|<5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|x-3|}{4|x+1|} \underset{|x-3|<1}{<} \frac{|x-3|}{4\cdot 3} = \frac{|x-3|}{12} \underset{|x-3|<12\varepsilon}{<} \varepsilon$$

Basta prendere $\delta = \min\{1, 12\varepsilon\}$

Oppure posso supporre $\varepsilon < \frac{1}{12}$ e prendere $\delta = 12\varepsilon$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$$



Vorrei definire il comportamento di $\frac{1}{x}$ vicino a zero precisando che se $x \to 0$ da valori positivi, allora il limite vale $+\infty$

" $x\to 0$ " " negativi, " " " " $-\infty$.

Scriveremo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (da chiarire!)

Riferimento sul testo consigliato:

§ 4.1.