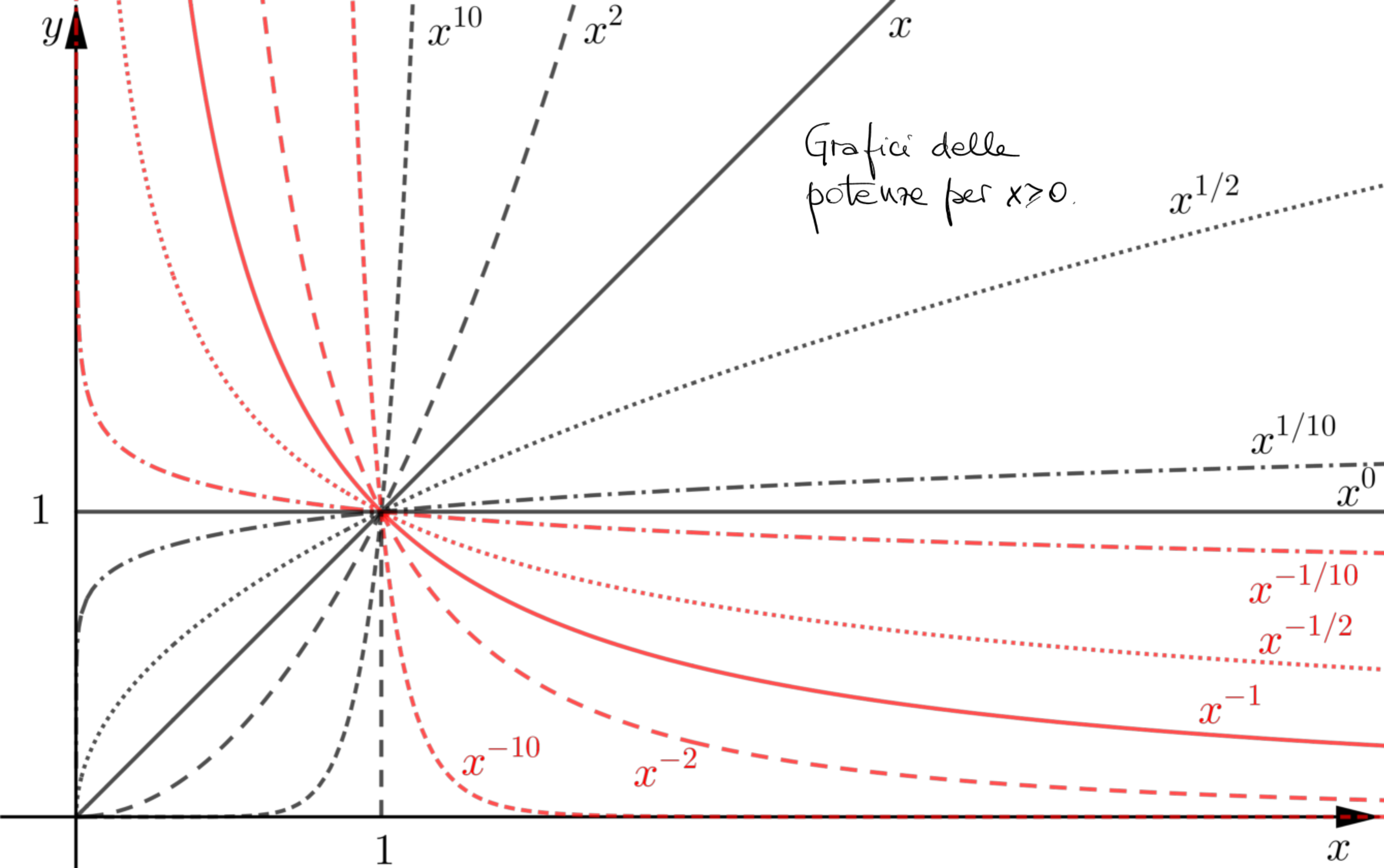

Grafici delle potenze per $x \geq 0$.
y
x^{10}
x^2
x
$x^{1/2}$
$x^{1/10}$
x^0
1
$x^{-1/10}$
$x^{-1/2}$
x^{-1}
x^{-10}
x^{-2}
1
x

Attenzione.

$$\sqrt[3]{x^3} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sqrt[4]{x^4} = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{-1}{(-\cancel{x})}\overset{\to 1}{\sqrt{1+1/x^2}}}{\cancel{x}} = -1$$

Equazioni e disequazioni irrazionali

Se compaiono radici di ordine dispari, è tutto facile.

$$\sqrt[3]{x^3-5} > x-1 \iff x^3-5 > (x-1)^3$$

$$\left[\, a<b \iff a^3<b^3 \quad \text{perchè } f(x)=x^3 \text{ è strett. crescente} \,\right]$$

$$\cancel{x^3}-5 > \cancel{x^3}-3x^2+3x-1$$

$$3x^2-3x-4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+48}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{57}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{6}$$

sol$^{\text{ni}}$

$$\left(x < \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{57}}{6}\right) \vee \left(x > \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{57}}{6}\right)$$

Una diseq$^{\text{ne}}$ di questo tipo potrebbe venire dallo studio di

$$f(x) = \log\left(\sqrt[3]{x^3-5}-x+1\right)$$

Cosa succede se compaiono radici di ordine pari, per es.

$$\sqrt[n]{P(x)} \gtreqless Q(x) \ ?$$

n pari

$P(x), Q(x)$ per es. polinomi.

Ci sono due problemi:

1) $\sqrt[n]{t}$ non è definita per $t<0$.

2) $f(x) = x^n$ non è crescente in $\mathbb{R}$.

è strett. crescente in $[0,+\infty)$

" decrescente in $(-\infty,0]$.

$$\sqrt{x^2+4} = 2x \implies \boxed{x^2+4=4x^2}$$

$(\not\Leftarrow)$ ATTENZIONE, potrei avere aggiunto sol^{ni}.

$\boxed{\text{C.E. } x^2+4 \geq 0 \text{ sempre vera}}$

$$3x^2 = 4 \iff x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

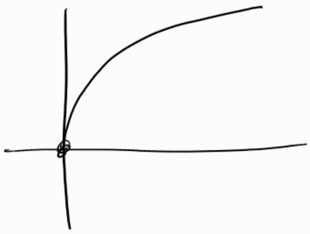
Verifico nell' eq^{ne} di partenza

$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \implies \sqrt{\frac{4}{3}+4} \overset{?}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{\frac{16}{3}} \overset{?}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}$ OK.

$x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad \sqrt{\frac{4}{3}+4} \overset{?}{=} -\frac{4}{\sqrt{3}}$ NO

Oppure



$$\sqrt{x^2+4} = 2x \iff x^2+4 = 4x^2$$

se entrambi i membri sono ≥ 0.

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \cancel{x^2+4 \geq 0} & \text{sempre vera} \\ \cancel{2x \geq 0} & x \geq 0 \\ x^2+4 = 4x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+4 = 4x^2 \end{cases} \iff x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{2x+3} = \sqrt{4x^2-2x-6}$$

1° modo: quadriamo tutto e poi verifichiamo le soluzioni nell'eq^ne di partenza

2° modo: come segue

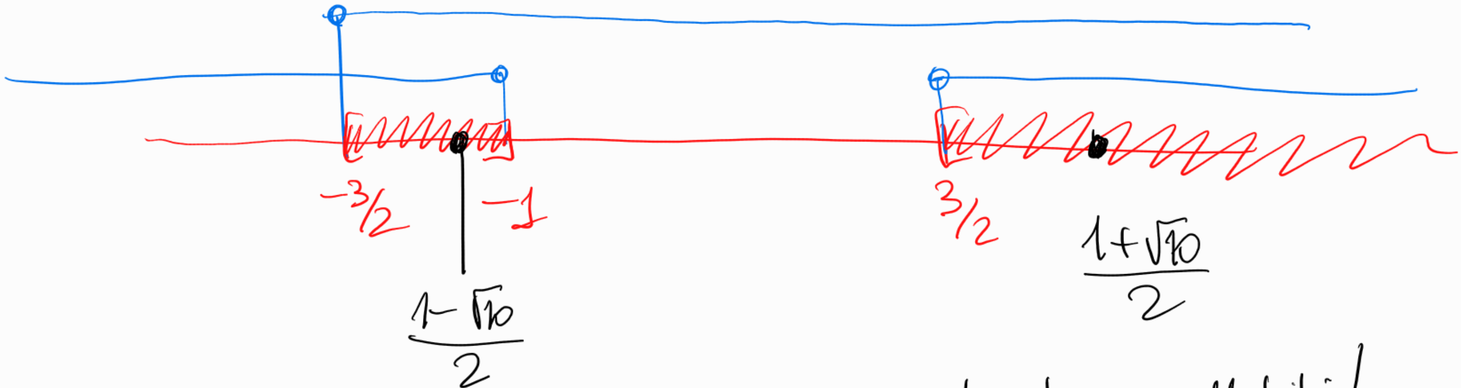
$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2-2x-6 \geq 0 \\ 2x+3 = 4x^2-2x-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3/2 \\ (x \leq -1) \vee (x \geq 3/2) \\ 4x^2-4x-9=0 \end{cases} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$2x^2-x-3 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$4x^2-4x-9=0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$$



entrambe accettabili!

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \qquad n \text{ pari.}$$

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ P(x) < (Q(x))^n \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+3x+9} \leq x+3$$

$$\boxed{\text{se so che } a, b \geq 0, \text{ allora } a \leq b \iff a^2 \leq b^2}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2+3x+9 \geq 0} \quad \text{sempre vera} \\ x+3 \geq 0 \\ x^2+3x+9 \leq (x+3)^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ \cancel{x^2}+3x+\cancel{9} \leq \cancel{x^2}+6x+\cancel{9} \\ 3x \geq 0. \end{cases}$$

$x^2+3x+9 \geq 0$ sempre vera.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{2} \qquad \Delta < 0$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \boxed{x \geq 0}$$