Abbiamo visto che:
Una successione convergente è limitata.
Il viceversa non è vero (Esempio: $(-1)^n$ è limitata ma non ha limite).

Però è vero a meno di sottosucc^{ni}, come si vede nel prossimo Teorema

TEOREMA di Bolzano-Weierstrass.
Ogni successione limitata ammette almeno una sottosucc^{ne} convergente.

$a_n=(-1)^n$ è limitata, non converge ma ammette sotto succ^{ni} convergenti

per $\quad a_{2n}=(-1)^{2n}=1 \to 1$
$\quad\quad a_{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1 \longrightarrow -1$

Esempio più interessante: $\quad a_n = \operatorname{sen} n \quad$ è limitata $\quad |a_n| \le 1 \ \forall n$

Dim. Bolzano-Weierstrass

Si basa sulla seguente prop.

PROP Ogni succ^{ne} di numeri reali ammette una sottosucc^{ne} monotòna

(Per. es. $a_n=(-1)^n$ "contiene" la sottosucc^{ne} $a_{2n}\equiv 1$ (crescente e decrescente))

Conclusione dim. Bolzano-Weierstrass.

Sia $\{a_n\}$ limitata. Da essa, per la prop., estraggo una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ monotòna (crescente o decrescente)
Tale sottosucc^{ne} è limitata perché lo era quella di partenza
Quindi $\{a_{k_n}\}$ è crescente e limitata
oppure decrescente e limitata
In entrambi i casi ammette limite finito.

$\square$

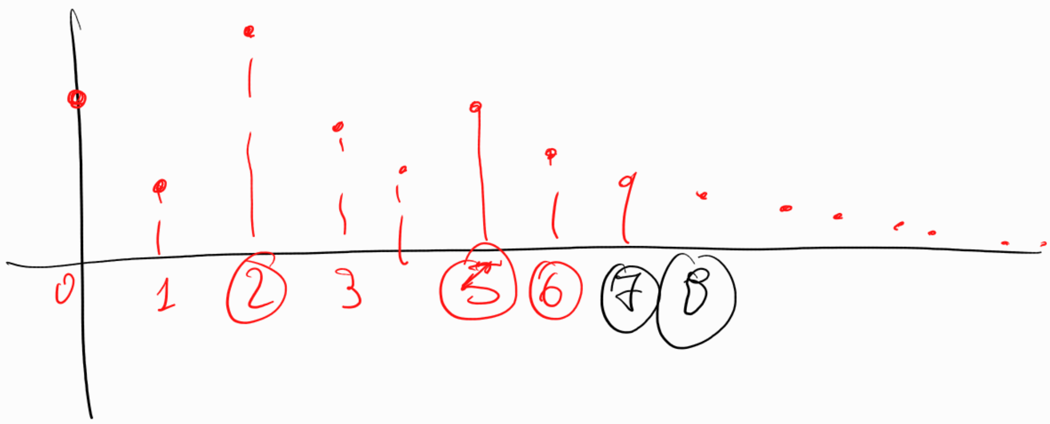
Resta solo da provare la prop.

PROP Ogni succ^{ne} di numeri reali ammette una sottosucc^{ne} monotòna

Dim. Sia $\{a_n\}$ una successione di reali.

Diremo che l'indice n_0 è un "picco" per $\{a_n\}$ se

$$a_{n_0} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0.$$



Due casi possibili:

1) i picchi sono infiniti.

In questo caso sia a_{k_n} la sottosuccessione che contiene solo i k_n picchi. Tale sottosuccessione è decrescente: infatti se

$$a_{k_{n+1}} \overset{?}{\leq} a_{k_n} \quad \text{vero perché } k_n \text{ è un picco e } k_{n+1} > k_n$$

2) i picchi sono in numero finito (o nessuno)

In tal caso sia k_0 un intero strettamente maggiore di ogni picco.

$\Rightarrow k_0$ non è un picco $\Rightarrow \exists\, k_1 > k_0$ t.c. $a_{k_1} > a_{k_0}$

$\Rightarrow k_1$ non è un picco $\Rightarrow \exists\, k_2 > k_1$ t.c. $a_{k_2} > a_{k_1}$

Procedendo in questo modo, costruisco una sottosucc^{ne} $\{a_{k_n}\}$ strettamente crescente.

Resta da dimostrare il criterio del rapporto.

TEOREMA

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} di numeri positivi t.c.

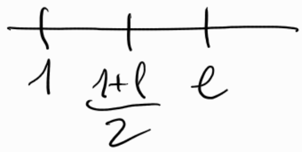
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell. \quad \text{Allora:}$$

1) Se $\ell \in (1,+\infty]$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$;

2) Se $\ell \in [0,1)$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dim 1) $\exists\, m>1$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > m$ def^{te}.

Se $\ell\in(1,+\infty)$ basta prendere $m = \frac{1+\ell}{2}$



se $\ell = +\infty$ basta prendere $m = 5$.

$$\Rightarrow \exists\, n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > m > 1.$$

Sia ora $n > n_0$.

$$\Rightarrow a_n > m \underbrace{a_{n-1}}_{\substack{\vee \\ m\, a_{n-2}}} > m^2 a_{n-2} > m^3 a_{n-3} > \dots > m^{n-n_0} a_{n_0}$$

$$\Rightarrow a_n > m^{n-n_0} a_{n_0} = \underbrace{m^n}_{\substack{n\to+\infty \\ \downarrow \\ +\infty}} \underbrace{\frac{a_{n_0}}{m^{n_0}}}_{\substack{\parallel \\ c}} \longrightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ Teor. carabiniere

$$a_n \longrightarrow +\infty.$$

2° caso $\quad \ell\in[0,1) \Rightarrow$ def^{te} $\frac{a_{n+1}}{a_n} < m < 1$

$\Rightarrow \quad \exists\, n_0 \quad$ t.c. $\quad \forall n \geq n_0 \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < m.$

Sia $\quad n > n_0$

$$0 < a_n < m\, a_{n-1} < \dots < m^{n-n_0} a_{n_0} = m^n \, \underbrace{\frac{a_{n_0}}{m^{n_0}}}_{c} \to 0$$

$m^n \to 0$

Si conclude con il teor. dei carabinieri. $\square$

$\underline{\text{OSS}}$ Il criterio del rapporto, come si vede dalla dim. funziona solo se $a_n \to +\infty$ almeno esponenzialmente ($a_n > c\, m^n$, $m > 1$)

oppure se $a_n \to 0$ almeno esponenzialmente ($a_n < c\, m^n$, $m < 1$)

Se $a_n \sim n^k$ oppure $a_n \sim n^{-k}$, oppure $a_n \sim (\log n)^k$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

$a_n = n^2 + 3.$

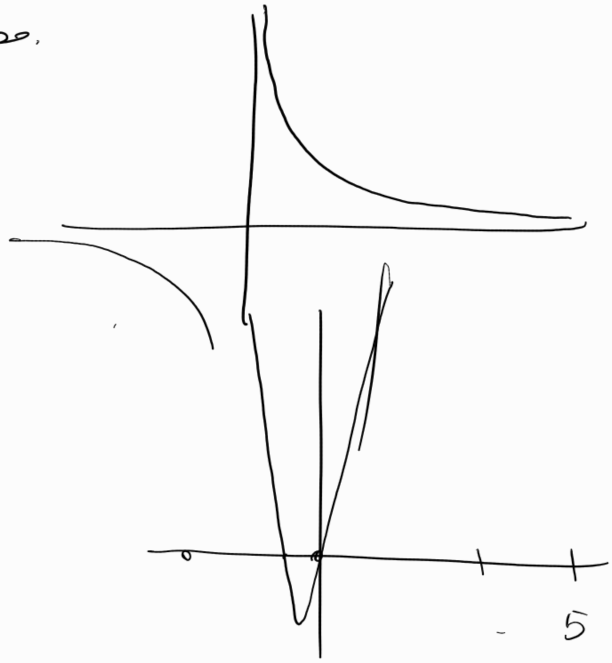
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2+3}{n^2+3} \to 1$$

Limiti di funzioni

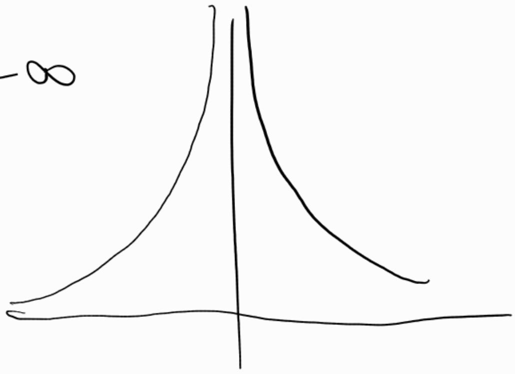
Vogliamo definire espressioni del tipo.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 5} (3x^2+x) = 80$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



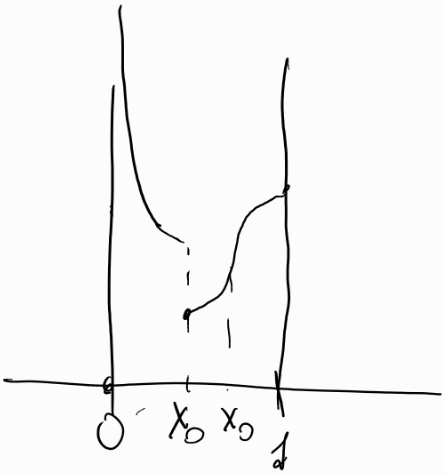
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

La prima cosa da fare per definire $\lim_{x\to x_0} f(x)$ è capire chi può essere x_0. Questo è legato a come è fatto il dominio di f.

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Per esempio, se $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ha senso provare a considerare il limite per $x \to x_0 \in [0,1]$

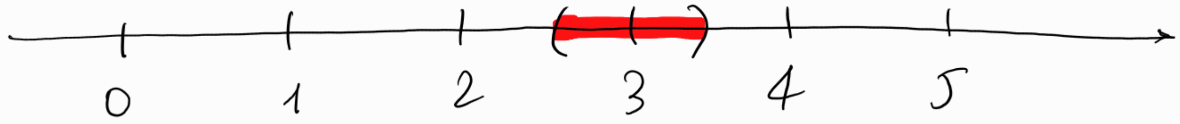
non ha senso considerare il limite per $x \to 2$



Se $f : (-\infty, 2)$, posso considerare il limite per $x \to x_0 \in [-\infty, 2]$

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

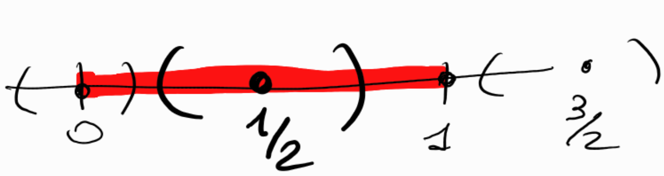
$\cancel{x}\ n \mapsto \cancel{f(n)}\ a_n$



In questo caso l'unico limite che ha senso è per $n \to +\infty$.
Ad ogni altro x_0 non mi posso "avvicinare" da valori di n.

DEF Punti di accumulazione
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice pto di accum. di X se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di X. Se un punto di X non è punto di accumulazione di X si dice pto isolato di X.

Esempi $X = (0,1)$.



$\frac{1}{2}$ è pto di accum. di X? sì
0 " " " " "? sì
1 ? sì
$\frac{3}{2}$ è pto di accum di X? NO
$-\infty$ " " " " "?

{Pti di accum^{ne} di $(0,1)$} $= [0,1]$

Se $X = [0,1]$? I suoi punti di accum. sono gli stessi.

Se $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, i suoi pti di accum^{ne} sono tutti i pti di $\mathbb{R}^*$.

Se $X = \mathbb{N}$, l'unico pto di accum. è $+\infty$, tutti i pti di $\mathbb{N}$ sono pti isolati di $\mathbb{N}$.

Ovviamente, gli insiemi costituiti da un numero finito di punti non hanno punti di accum^{ne}.

$X = \mathbb{Q} \Rightarrow$ I pti di accum. di $\mathbb{Q}$ sono tutti i pti di $\mathbb{R}^*$

Proprietà vere definitivamente.

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{P}(x)$ una proprietà dipendente da $x \in X$.
Diremo che $\mathcal{P}(x)$ è vera definitivamente per $x \to x_0$ se

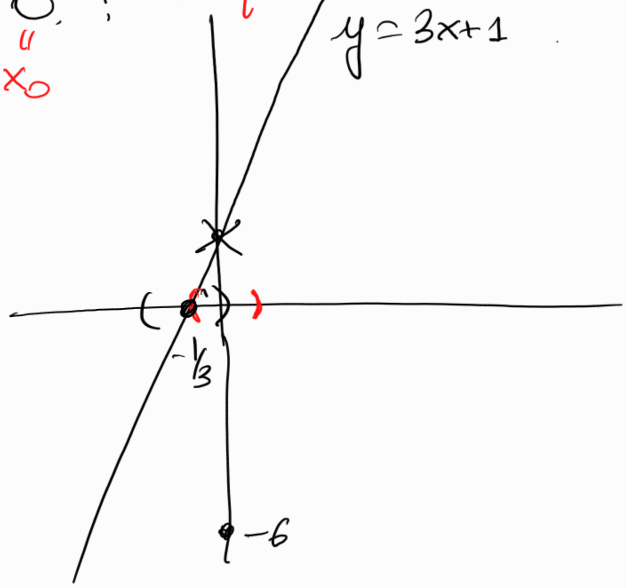
1) $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è pto di accum. di X.

2) $\exists$ intorno $\mathcal{U}$ di x_0 t.c. $\mathcal{P}(x)$ è vera $\forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$

Esempio: (di solito, se non specificato, si prende X l'insieme dove ha senso la $\mathcal{P}(x)$).

1) $3x+1>0$ def^{te} per $x \to \underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{0}}$?

In questo caso $X = \mathbb{R}$



Sì, basta prendere

$$\mathcal{U} = B_{1/3}(0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$3x+1>0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{0\}$$

2) Sia $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ -6 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Posso dire che $f(x) > 0$ def^{te} per $x \to 0$?
Sì, basta prendere come prima $\mathcal{U} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$$

3) $3x+1>0$ def^{te} per $x \to -1/3$?

NO, perché preso qualunque intorno di $-1/3$ la condizione non è verificata nella metà sinistra dell'intorno.

4) $x^2 > 0$ def^{te} per $x \to 0$?

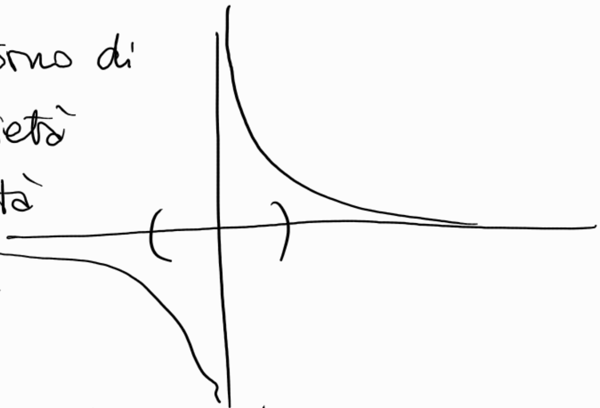
sì. Infatti preso un intorno $(-1,1)$ di 0, si ha
$x^2 > 0 \quad \forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

5) $x^2 > 1000$ def^{te} per $x \to +\infty$?
Basta prendere l'intorno di $+\infty$ $\mathcal{U} = (+\sqrt{1000}, +\infty]$
$x^2 > 1000 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

$x^2 > 1000$ def^{te} per $x \to -\infty$? sì.

6) $\frac{1}{x} > 0$ def^{te} per $x \to 0$? NO

Preso qualunque intorno di $x_0 = 0$, la proprietà è falsa nella metà sinistra dell'intorno.



Se $X = \mathbb{N}$, la def^{ne} di "definitivamente" (per $n \to +\infty$) coincide con quella già vista.

$P(n)$ è vera def^{te} per $n \to +\infty \iff \exists K$ t.c.
$P(n)$ è vera $\forall n > K$

ciò equivale a dire $\iff \exists\, \mathcal{U} = (K, +\infty]$ t.c.
$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathcal{U} \cap \mathbb{N}$