Gerarchie di infiniti.

PROP 1 (confronto tra esponenziali e potenze)
Sia $b>1$, sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b^n}{n^\alpha}=+\infty.$$

Dim ovvia per $\alpha\le 0$
Per dimostrarlo per $\alpha>0$ usiamo la seguente utile proposizione

PROP. (Criterio del rapporto per successioni)
Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} a termini positivi t.c.
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell\ .\ \text{Allora}$$
1) se $\ell\in[0,1)\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=0$
2) se $\ell\in(1,+\infty]\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty.$

(Dim. dopo)

OSS il criterio del rapporto non dice nulla se $\ell=1$.

Usiamo la proposizione con $a_n=\dfrac{b^n}{n^\alpha}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^{\cancel{n+1}}/(n+1)^\alpha}{1\,\cancel{b^n}/n^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}b\,\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=b>1$$
$$\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\to 1$$

La proposizione ci dice che $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$, cioè la tesi. $\square$

Lo stesso risultato (confronto tra potenze ed esponenziali) si ottiene se al posto di n mettiamo una qualunque succ^{ne} $\{a_n\}$ che tende a $+\infty$:

PROP 2 Siano $a_n \to +\infty$, $b>1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{(a_n)^\alpha} = +\infty.$$

Per la dim. basta usare la prop. 1 e $\lfloor a_n \rfloor$ (parte intera) nonché il teorema dei carab.

$$\frac{b^{a_n}}{(a_n)^\alpha} \underset{\alpha>0}{\geq} \frac{b^{\lfloor a_n\rfloor}}{(\lfloor a_n\rfloor+1)^\alpha} = \underbrace{\frac{b^{\lfloor a_n\rfloor}}{(\lfloor a_n\rfloor)^\alpha}}_{\xrightarrow{\text{prop 1}} +\infty} \underbrace{\frac{(\lfloor a_n\rfloor)^\alpha}{(\lfloor a_n\rfloor+1)^\alpha}}_{\to 1}$$

$\to +\infty$

PROP 3 (confronto tra logaritmi e potenze)
Siano $b>1$, $\alpha>0$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$$

DIM

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = \frac{\log_b n}{b^{\alpha \log_b n}} = \frac{\log_b n}{(b^\alpha)^{\log_b n}} \overset{a_n = \log_b n \to +\infty}{=}$$

$$= \frac{a_n}{(b^\alpha)^{a_n}} \xrightarrow{\text{prop.2}} 0 \qquad \square$$

$b^\alpha > 1$ (perché $b>1$, $\alpha>0$)

DEF Siano a_n, b_n due succ^{ni} che tendono a $\pm\infty$.
Diciamo che $\{a_n\}$ è un <u>infinito di ordine superiore</u> risp. a $\{b_n\}$

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, o equivalentemente $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$

$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono infiniti dello stesso ordine se

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ossia se $a_n \sim l\, b_n$

Riassumiamo: abbiamo provato che

- gli esponenziali (con base >1) sono infiniti di ordine sup. rispetto a ogni potenza.
- i logaritmi sono infiniti di ordine inferiore rispetto a ogni potenza.

Questo vale anche se a n sostituisco una qualsiasi succ^{ne} che tende a $+\infty$, cioè

se $a_n \to +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b a_n}{(a_n)^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha>0$
$\forall b>0,\ b\neq 1$

DEF fattoriale.

Sia $n\in\mathbb{N}$. Si definisce

$$n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \qquad \text{se } n>0$$

$$0! = 1$$

$1! = 1$

$2! = 1\cdot 2 = 2$

$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$ 　　OSS $(n+1)! = n!\,(n+1)$

$6! = 720$

$7! = 5040$

$n!$ è un infinito di ordine superiore rispetto agli esponenziali.

PROP. 4 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty \quad \forall b>1$

DIM. Poniamo $a_n = \frac{n!}{b^n}$ e applichiamo il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \frac{b^n}{n!} = \frac{n+1}{b} \longrightarrow +\infty$$

$$\underset{\text{criterio del rapporto}}{\Longrightarrow} \quad a_n \to +\infty$$

n^n "batte" il fattoriale

PROP. 5

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Dim sempre usiamo il criterio del rapporto con $a_n = \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1.$$

$$\underset{\text{rapporto}}{\Longrightarrow} \quad a_n \to +\infty. \qquad \square$$

Esercizio. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n^n}$

Applichiamo il criterio del rapporto ad $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)\cancel{(2n+2)}\,2\, n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}\ \cancel{(2n)!}} =$$

$$= \frac{2(2n+1)\,n^n}{(n+1)^n} = \frac{2\cdot(2n+1)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to +\infty.$$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Formula di Stirling per il fattoriale.}} \\ n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{per } n\to+\infty\end{array}}$

Esercizio: rifare i limiti in cui compare $n!$ con la formula di Stirling.

Oggi alle 14:00 in aula 9: esercitazione con il tutor.

Gerarchie di limiti

$$\log n < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \dots < n^{1000} < \dots < 2^n < e^n < 3^n < \dots < n! < n^n$$

$a_n < b_n$ vuol dire $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$

Questa "gerarchia" potrei estenderla a destra...

$$n^n < n^{n+1} < (2n)^n <$$

... oppure a sinistra..

$$\sqrt{\log(\log n)} < \log(\log n) < (\log(\log n))^2 < \sqrt{\log n} < \log n < (\log n)^2$$

... oppure fare uno "zoom" nella parte centrale

$$n < n\log(\log n) < n\log n < n(\log n)^2 \qquad < n^{1{,}001}$$

Attenzione

$\log n$, $\log_2 n$, $\log(n^2)$, $\log(n^3)$ sono infiniti dello stesso ordine.

$\log(n^2) = 2\log n$, $\quad \log(n^3) = 3\log n$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - 5n^2\log n}{n^2 2^n - n^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n(1+o(1))}{n^2 2^n(1+o(1))} =$$

$$3^n - 5n^2\log n = 3^n\left(1 - \frac{5n^2\log n}{3^n}\right) = 3^n(1+o(1)) \sim 3^n$$

$$\frac{5n^2\log n}{3^n} \downarrow 0$$

$$n^2 2^n - n^5 = n^2 2^n\left(1 - \frac{n^{\cancel{5}\,3}}{\cancel{n^2}\,2^n}\right) = n^2 2^n(1+o(1)) \sim n^2 2^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3/2)^n}{n^2} = +\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^{\log_2 n}}{n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{\log_5 2}}}{n} =$$

$$5^{\log_2 n} = 5^{\frac{\log_5 n}{\log_5 2}} = n^{\frac{1}{\log_5 2}}$$

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

formula di cambiamento di base dei logaritmi

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\left(\frac{1}{\log_5 2} - 1\right)} = +\infty$$

$$\frac{1}{\log_5 2} - 1 > 0$$

$$\log_5 2 \in (0,1)$$

Altro modo:

$$\frac{5^{\log_2 n}}{n} = \frac{5^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_2 n} \longrightarrow +\infty.$$

Sottosuccessioni (successioni estratte).

DEF Data una successione $\{a_n\}$, si dice **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ una successione della forma $b_n = a_{k_n}$, dove $\{k_n\}$ è una successione strettamente crescente di interi naturali.

Esempi

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \qquad n \in \mathbb{N}^+$

$a_{2n} = \frac{1}{2n}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$

$(k_n = 2n)$

$a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ $\qquad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$

$(k_n = 2n-1)$

$a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$ $\qquad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \dots$

$(k_n = n^2)$

$a_{k_n} = \frac{1}{k_n}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$

$k_n =$ succ^{ne} dei numeri primi.

In pratica una sottosucc^{ne} è una successione che si ottiene "cancellando" dei termini di a_n, anche in numero infinito.

Le seguenti due non sono sottosucc^{ni} di $\frac{1}{n}$.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$

$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots$

PROP Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, allora ogni sottosucc^{ne} di $\{a_n\}$ tende ancora a ℓ.

DIM. Hyp. $a_n \to \ell$, cioè

$\forall$ intorno V di ℓ $\exists\ \tilde{n}$ t.c. $\forall n \geq \tilde{n}$ $a_n \in V$.

Sia ora $\{a_{k_n}\}$ una sottosucc^{ne} di $\{a_n\}$, con $\{k_n\}$ succ^{ne} strett. crescente di naturali

Tesi: $\forall$ intorno V di ℓ $\exists\ \bar{\bar{n}}$ t.c. $\forall n \geq \bar{\bar{n}}$ $a_{k_n} \in V$.

Sia $n \geq \bar{n}$ $\qquad k_n \geq n \geq \bar{n}$ perché k_n è strett. crescente

e quindi per l'ipotesi $a_{k_n} \in V$

e la tesi è vera con $\bar{\bar{n}} = \bar{n}$ $\square$

COROLLARIO Se $\{a_n\}$ ammette due sottosucc^{ni} aventi limiti diversi, $\{a_n\}$ non ammette limite

Esempio $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Infatti $\quad a_{2n} = (-1)^{2n} \equiv 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1$

$a_{2n+1}\ (-1)^{2n+1} \equiv -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = -1$

$a_n = (-1)^n n$ non ammette limite, infatti

$$a_{2n} = (-1)^{2n}\, 2n = 2n \longrightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1}(2n+1) = -(2n+1) \longrightarrow -\infty$$

Se troviamo una sottosucc^{ne} $\{a_{k_n}\}$ di $\{a_n\}$ che tende a un limite ℓ, cosa posso dire di $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$?

Solo che, se $\{a_n\}$ ammette limite, esso vale ℓ.

PROP Supponiamo di avere due sottosucc^{ni} di $\{a_n\}$, siano esse $\{a_{k_n}\}$ e $\{a_{h_n}\}$ (k_n e h_n sono succ^{ni} strett. crescenti di interi naturali) t.c. $\{k_n\} \cup \{h_n\} = \mathbb{N}$ (esempio $k_n = 2n$, $h_n = 2n+1$)

Se proviamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{h_n} = \ell \in \mathbb{R}^*$,

allora che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$

Esempio $\quad a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{2n} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow 0 \\[2ex] a_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} \longrightarrow 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$