$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}^+$ pari.

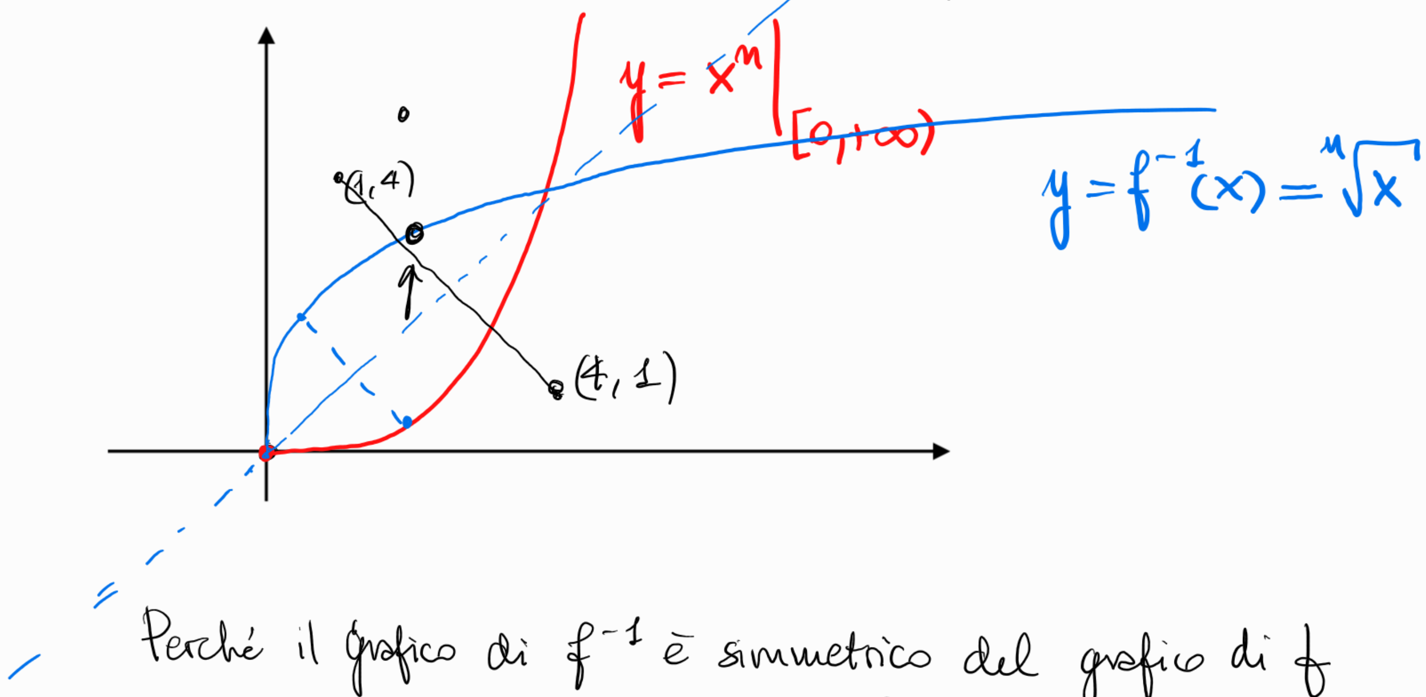
$$f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto x^n = f(x)$$ biettiva.

Cioè: $\forall\, y \in [0,+\infty)\ \exists!\ x \in [0,+\infty)$ t.c. $f(x) = x^n = y$

Resta determinata così una funzione che a y associa x.

$$f^{-1}: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$$ = l'unico $x \in [0,+\infty)$ t.c. $f(x) = y$, cioè $x^n = y$.

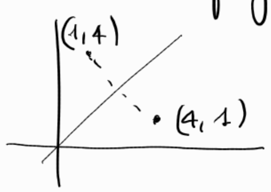
Se f è biettiva $\boxed{x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)}$



Perché il grafico di f^{-1} è simmetrico del grafico di f rispetto alla retta di eq^{ne} $y = x$?

$$(x,y) \in \text{graf } f^{-1} \iff y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) \iff (y,x) \in \text{graf } f.$$

$(1,4) \qquad (4,1)$



$\sqrt[n]{x} : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ $\qquad n \in \mathbb{N}^+$, **n pari**

$\shortparallel$

$x^{1/n}$

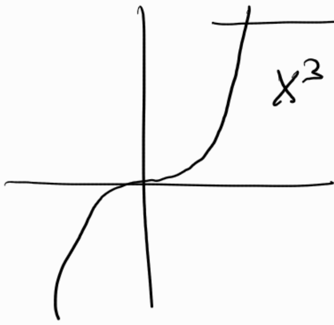
$f(x) = x^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ biettiva. $\qquad n \in \mathbb{N}^+$, n dispari

iniettiva perché strett. crescente

suriettiva perché (teorema di Analisi)

continua in $\mathbb{R} \Rightarrow$ assume tutti i valori

tra $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.



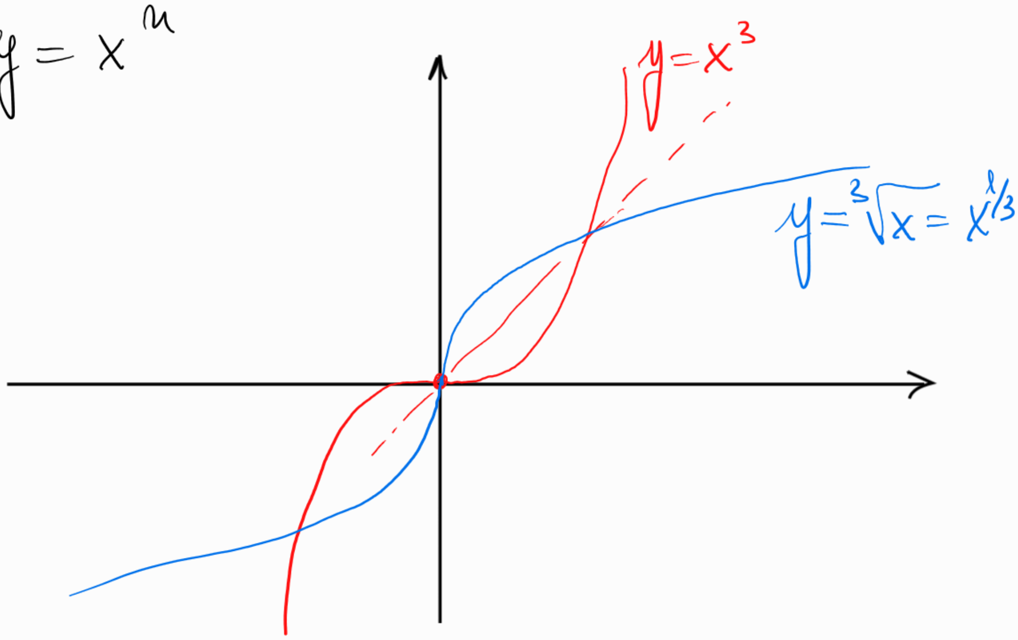
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto$ l'unico $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = x^n = y$

Poniamo $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n} = x$

$x = \sqrt[n]{y} \iff y = x^n$

$y = x^{1/3} \qquad y = x^{1/5}$



Voglio definire $f(x) = x^q$ con $q \in \mathbb{Q}$.

$q = \dfrac{m}{n}$ dove $n \in \mathbb{N}^+$, $m \in \mathbb{Z}$

richiedo che m, n siano primi tra loro.

(ho semplificato la frazione)

Definiamo $x^q = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

Dove sono definite? Dipende da m, n.

Cosa vuol dire una potenza a esponente reale (non razionale)?

2^{π} $2^{\sqrt{2}}$, 3^e

Come si definisce 2^{π}. $\pi = 3{,}1415926\ldots$

$2^3 = 8$

$2^{3{,}1} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}}$

$2^{3{,}14} = 2^{\frac{314}{100}}$

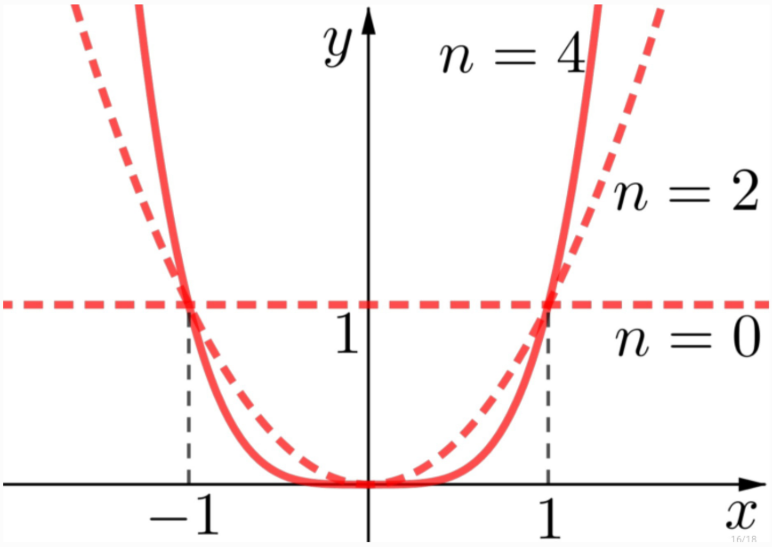
$2^{3{,}141}$

2^{π} si definisce come il limite della sequenza (o il suo sup)

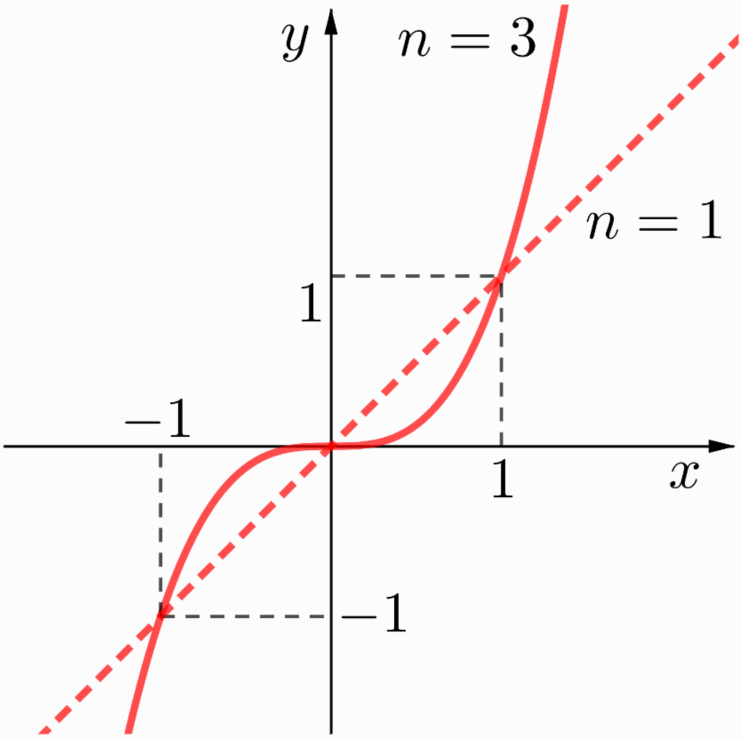
Si definisce a^r con $a>0$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
oppure anche $a=0$ se $r>0$

Seguono alcuni grafici relativi a quanto visto:

Grafici di x^n, con $n \in \mathbb{N}$ pari



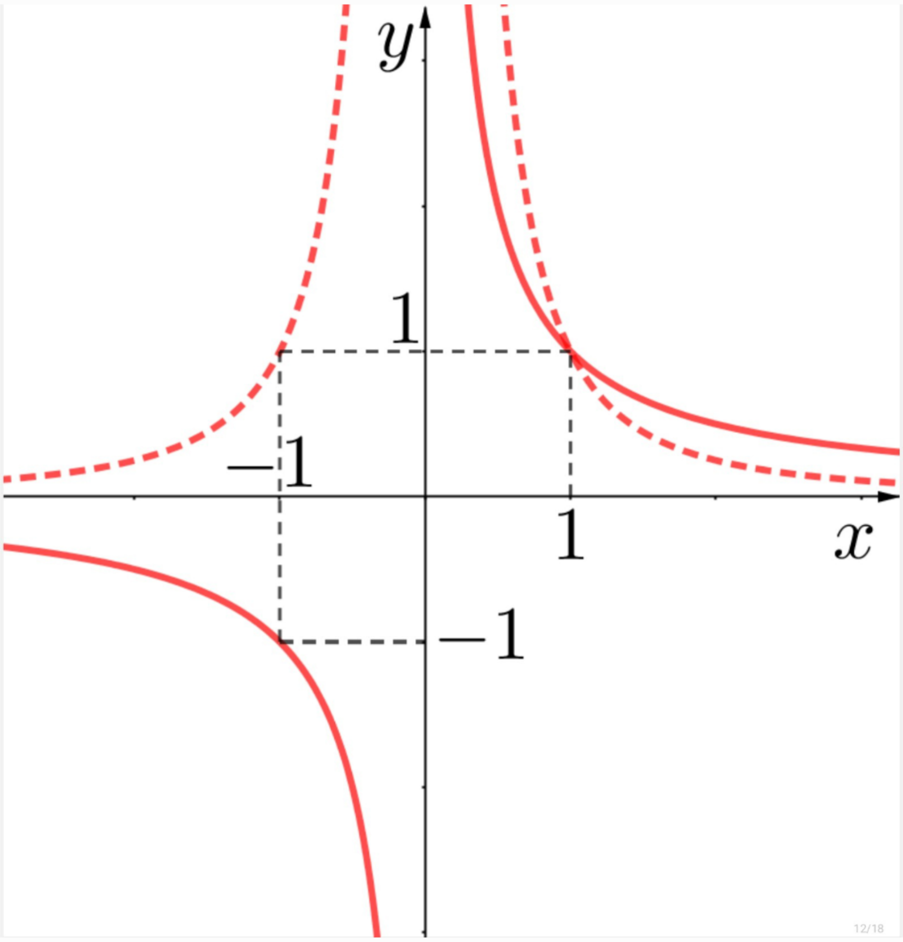
Grafici di x^n, $n \in \mathbb{N}$ dispari.



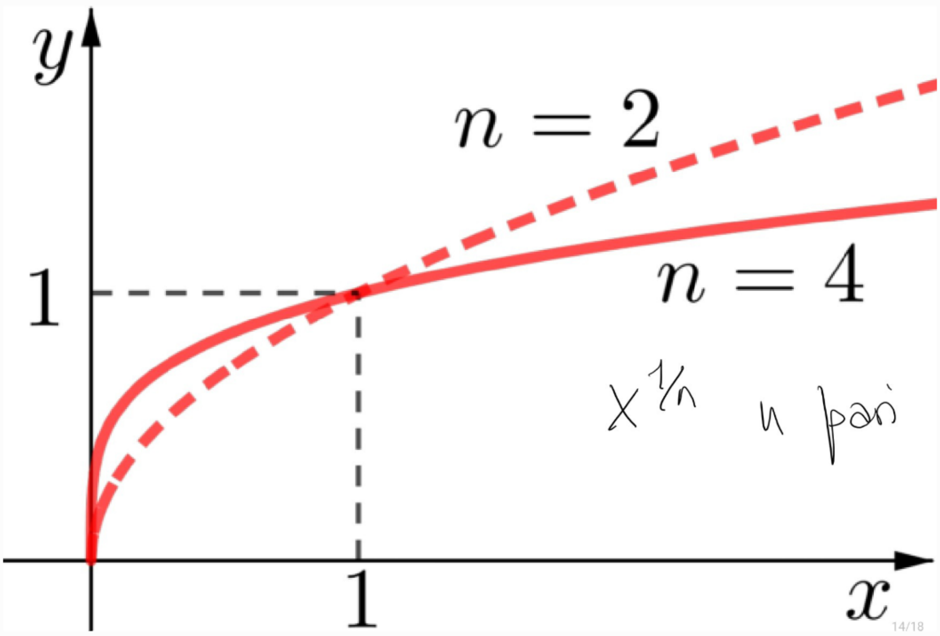
grafici di

x^{-1} (linea continua)

x^{-2} (linea tratteggiata)



Grafici di $x^{-1/n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ pari.



Grafici di $x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ pari.

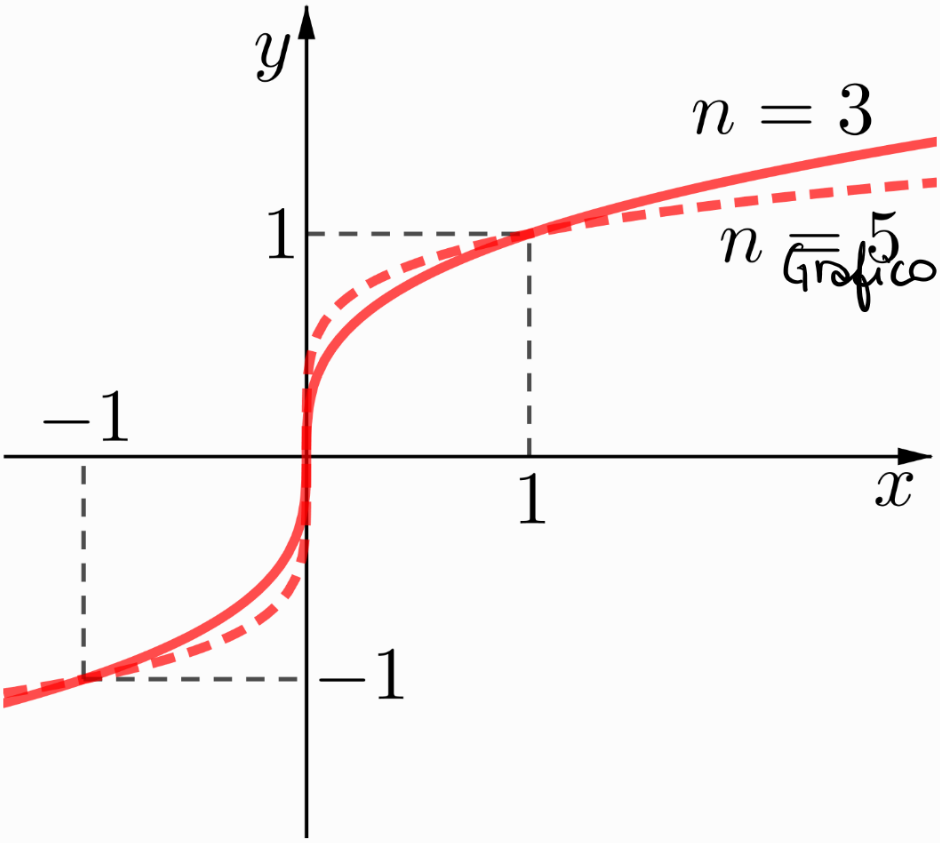


Grafico di $x^{5/3}$

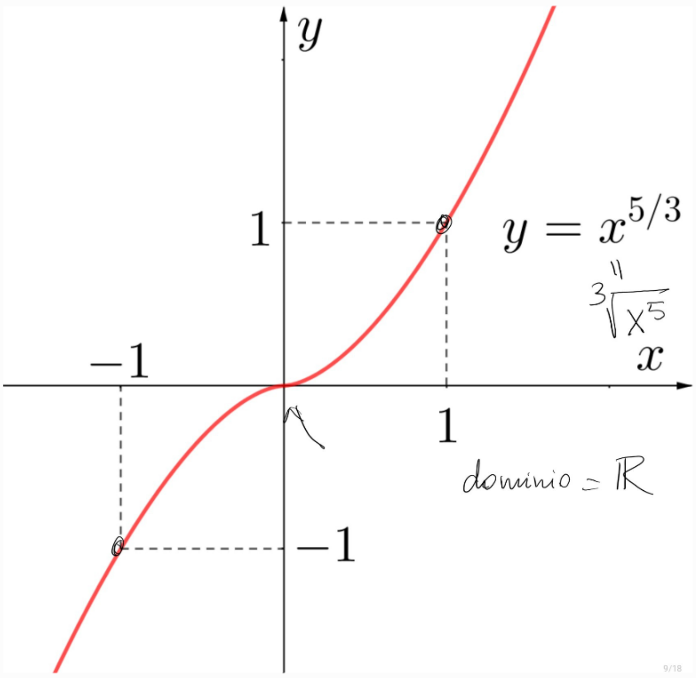


Grafico di $x^{5/2}$

Grafico di $x^{4/3}$

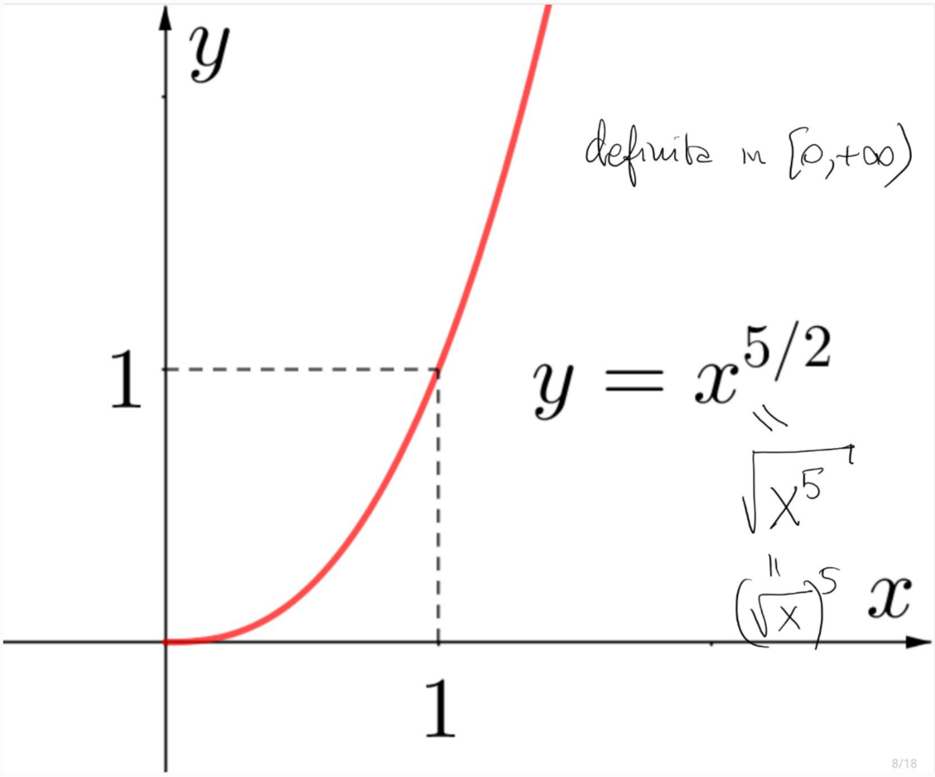


Grafico di $x^{3/4}$

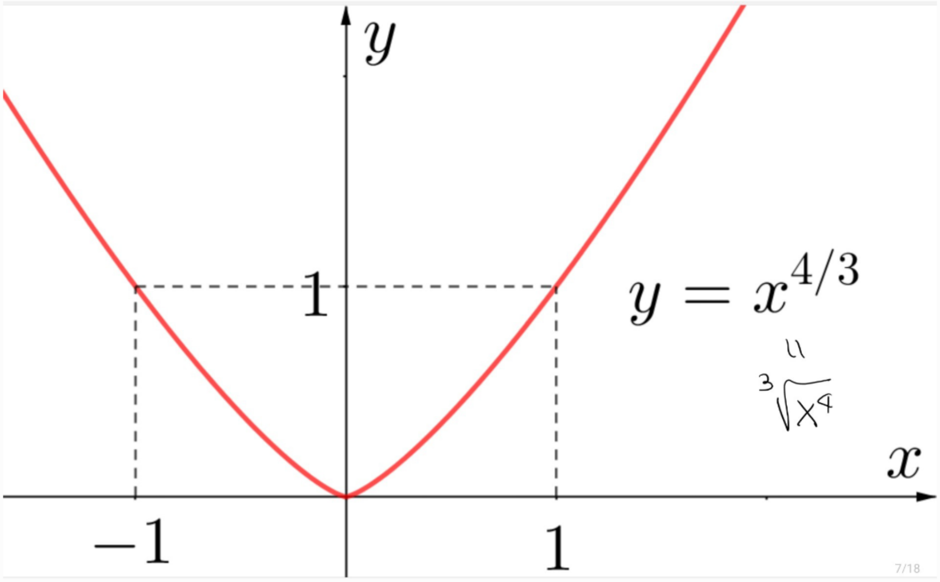
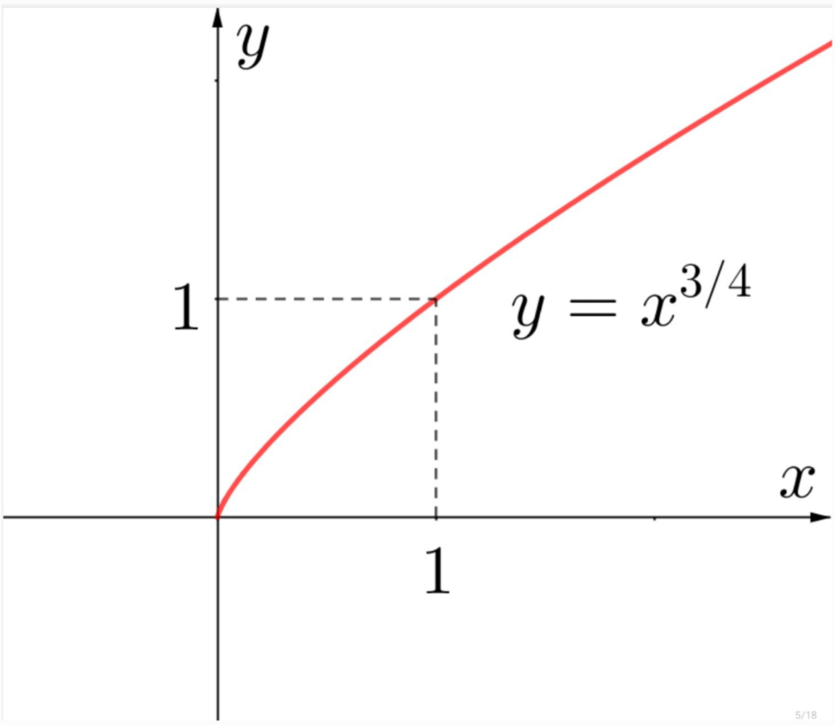


Grafico di $x^{3/5}$



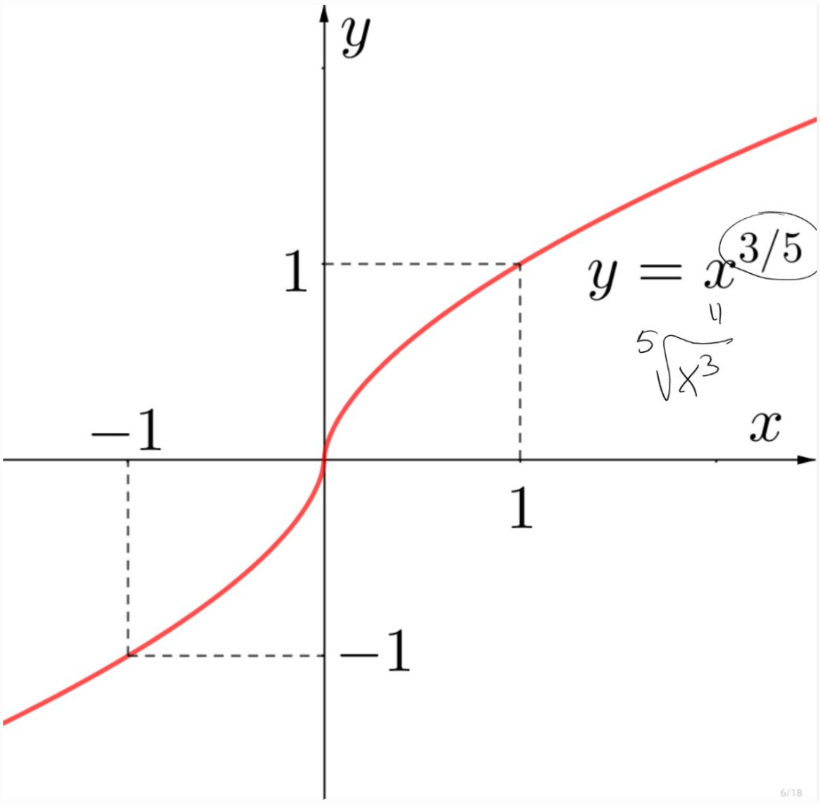


Grafico di $x^{-5/3}$

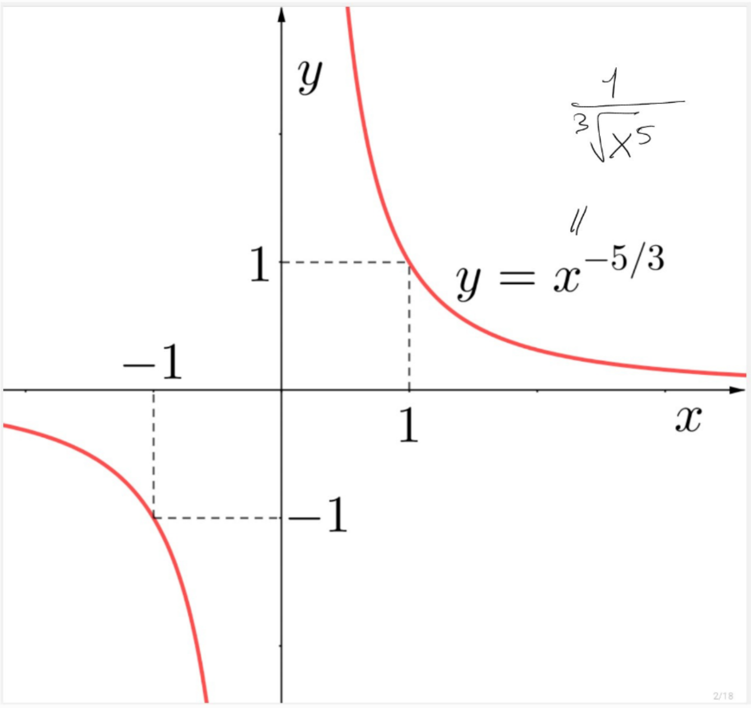
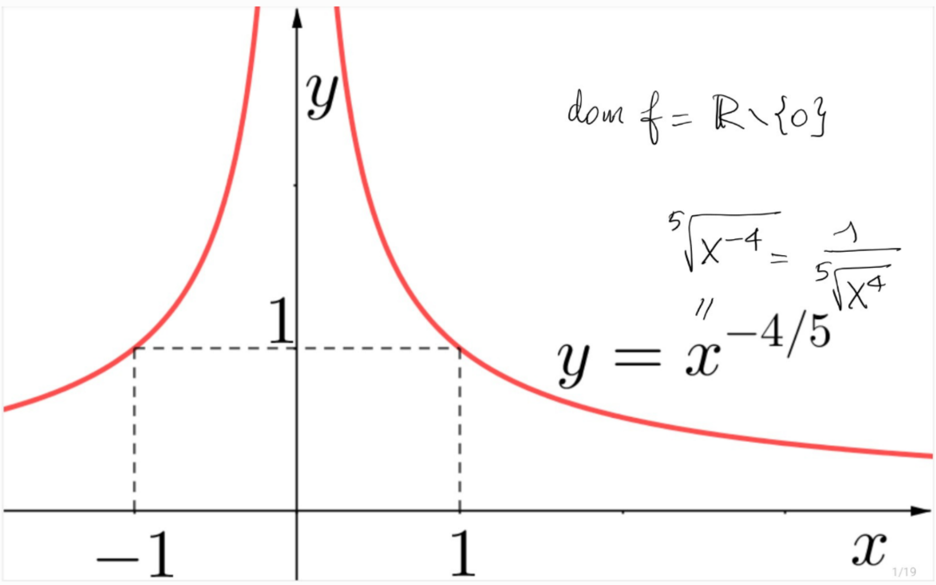
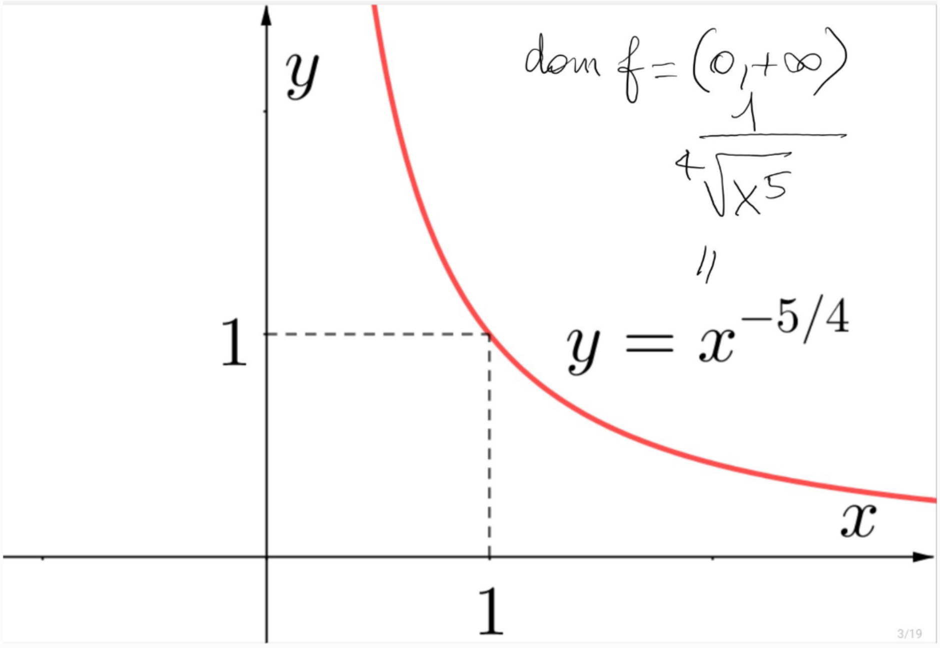


Grafico di $x^{-4/5}$

Grafico di $x^{-5/4}$




dom f = (0, +∞)
1/⁴√x⁵
||
y = x^{−5/4}
y
x
1
1
3/19

Proprietà Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ risulta:

1) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$;

2) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$;

5) $a^r > 0, \quad a^0 = 1, \quad 1^r = 1$;

6) $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a^r < 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a > 1 \text{ e } r < 0; \end{cases}$

Queste proprietà valgono anche per esponenti $r, s \in \mathbb{R}$.

7) $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1; \end{cases}$

8) $0 < a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^r \leq b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r \geq b^r & \text{se } r < 0 \end{cases}$

9) $\forall\, a \neq 1: \quad a^r = a^s \Rightarrow r = s$

(la 9) è una facile conseguenza della 7)).