Per i prossimi lunedì: inizio lezione alle 8:40

Esercitazione con il tutore ore 14:00 → 16:00 (aula 9)

Ricordo che $a_n = o(1)$ significa $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$a_n = 5 + o(1)$ significa $\lim_{n\to+\infty} a_n = 5$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$a_n = 5 +$ succ^{ne} infinitesima $\Leftrightarrow$ $a_n - 5 \to 0$

$$\frac{3+o(1)}{2+o(1)} = \frac{3}{2} + o(1)$$ significa se $a_n \to 3$, $b_n \to 2$.

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{3}{2}$$

$$\frac{5+o(1)}{n^2} = o(1)$$ significa: se $a_n \to 5 \Rightarrow \dfrac{a_n}{n^2} \to 0$

$o(1) + o(1) = o(1) \Leftrightarrow$ la somma di due succ^{ni} infinitesime è infinitesima.

$o(1) \cdot o(1) = o(1) \Leftrightarrow$ il prodotto di due succ^{ni} infinitesime è infinitesima

$$\frac{o(1)}{o(1)} = o(1)$$ falsa! non è vero sempre che il rapporto di due succ^{ni} infinitesime è infinitesimo.

$$\frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1/n^2\right)} = n \to +\infty$$

$$\frac{\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1/n\right)} = \frac{1}{n} \to 0$$

$c \cdot o(1) = o(1) \quad \forall c \in \mathbb{R}$ corretta!

$$\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$$ vera!

$$(n + o(1))^2 = n^2 (1 + o(1))$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(n+a_n)^2}{n^2} \xrightarrow{?} 1 \qquad \text{per } a_n \to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\left(\cancel{n}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)\right)^2}{\cancel{n^2}} \xrightarrow{?} 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\Big(1 + \underbrace{\frac{a_n}{n}}_{\downarrow\, 0}\Big)^2 \xrightarrow{?} 1$$ vera!

$$(n + o(1))^2 = n^2 + o(1) \quad ?$$

$$(n + a_n)^2 - n^2 \xrightarrow{?} 0 \qquad \forall a_n \to 0$$

$$\cancel{n^2} + 2a_n n + \underbrace{a_n^2}_{\downarrow\, 0} - \cancel{n^2} \xrightarrow{?} 0$$ falso se prendo $a_n = \frac{1}{n}$

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succ^{ni} def^{te} diverse da zero. Diremo che a_n e b_n sono asintoticamente equivalenti per $n \to +\infty$ se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, in tal caso scriveremo $a_n \sim b_n$

cioè se $\boxed{a_n = b_n(1 + o(1))}$

A volte useremo espressioni del tipo a_n "va come" b_n.

Es. $\quad 3n^4 - n^5 + 7 \sim -n^5$

cioè $\quad \dfrac{3n^4 - n^5 + 7}{-n^5} \to 1$

<u>OSS.</u> due succ^{ni} asintoticamente equivalenti hanno lo stesso limite.

Il viceversa è in generale falso: $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

ma non sono asintoticamente equivalenti.

Similmente $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$,

ma non sono asintoticamente equivalenti.

Tuttavia se a_n e $b_n \to \ell \notin \{\pm\infty, 0\}$, allora sono asintoticam. equivalenti

se $\left.\begin{array}{l} a_n \to 5 \\ b_n \to 5 \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \to 1$.

<u>**Domanda**</u>: **Quando, nel calcolo di un limite, posso sostituire una succ^{ne} con una succ^{ne} asintoticam. equiv.?**

<u>PROP</u> Siano $\{a_n\}, \{\bar{a}_n\}, \{b_n\}, \{\bar{b}_n\}$ successioni def^{te} non nulle t.c.

$a_n \sim \bar{a}_n$, $b_n \sim \bar{b}_n$. Allora:

1) $\dfrac{a_n}{b_n} \sim \dfrac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}$; in particolare le due frazioni hanno lo stesso limite.

(infatti: $\dfrac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n} = \dfrac{a_n(1+o(1))}{b_n(1+o(1))} = \dfrac{a_n}{b_n}(1+o(1))$)

<u>Applicazione</u>: $2n^5 - n^3 + 7 \sim 2n^5$

$n^5 - n^2 + 3n^3 \sim n^5$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^5 - n^3 + 7}{n^5 - n^2 + 3n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^5}{n^5} = 2$$

$$\frac{2n^5 - n^3 + 7}{n^5 - n^2 + 3n^3} \sim \frac{2n^5}{n^5} = 2$$

$$\boxed{2) \quad \bar{a}_n \bar{b}_n \sim a_n b_n}$$

(Infatti $\bar{a}_n \bar{b}_n = \left(a_n(1+o(1))\right)\left(b_n(1+o(1))\right) = a_n b_n (1+o(1))$)

Appl.: $(2n^5 - n^3 + 7)(n^5 - n^2 + 3n^3) \sim 2n^5 \cdot n^5 = 2n^{10}$

$$\boxed{3) \quad (\bar{a}_n)^r \sim (a_n)^r} \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

(Infatti $(\bar{a}_n)^r = \left(a_n(1+o(1))\right)^r = a_n^r \underbrace{(1+o(1))^r}_{\downarrow \, 1} = a_n^r (1+o(1))$

<u>ATTENZIONE:</u> In generale è errato sostituire succ^{ni} asintoticamente equivalenti in una somma, in una differenza oppure all'interno di funzioni!

<u>Esempi</u>: $(n+1)^2 \sim n^2$ vero!

ma $\cancel{\underbrace{(n+1)^2}_{\sim n^2} - n^2 \sim n^2 - n^2 = 0}$ **ERRATO!**

In realtà $(n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} = 2n+1 \longrightarrow +\infty$

$n^2 + n \sim n^2$ vero!

$\Longrightarrow \cancel{e^{n^2+n} \sim e^{n^2}}$ **FALSO!**

Infatti $\dfrac{e^{\cancel{n^2}+n}}{e^{\cancel{n^2}}} = e^n \longrightarrow +\infty.$

$1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ vero!

ma $\cancel{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \sim 1^n = 1}$ FALSO

Tuttavia anche in una somma/differenza può essere utile considerare le asintotiche equivalenze (senza sostituire!) per capire quali termini "contano di più".

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\underbrace{\sqrt{n^3+1}}_{\sim n^{3/2}} - n\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{3/2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^{3/2}}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}\right) = +\infty$$

infatti $\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^{3/2}} = \sqrt{\frac{n^3+1}{n^3}} \to 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2}+n^6} \qquad \text{dove } x\in\mathbb{R}.$$

<u>OSS</u> $n^\alpha + n^\beta \sim \begin{cases} n^\alpha & \text{se } \alpha>\beta \\ 2n^\alpha & \beta=\alpha \\ n^\beta & \text{se } \beta>\alpha \end{cases}$

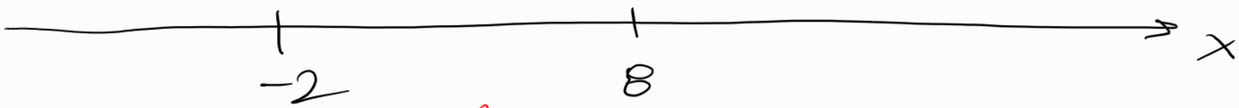
$$\alpha>\beta \Rightarrow \quad n^\alpha + n^\beta = n^\alpha \underbrace{\left(1+\underbrace{n^{\overset{<0}{\beta-\alpha}}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} \sim n^\alpha$$

$$n^{x-2} + n^6 \sim \begin{cases} n^{x-2} & \text{se } x > 8 \\ 2n^6 & x = 8 \\ n^6 & x < 8 \end{cases}$$

$$x - 2 > 6 \iff x > 8$$

$$n^x + n^{-4-x} \sim \begin{cases} n^x & x > -2 \\ 2n^{-2} & x = -2 \\ n^{-4-x} & x < -2 \end{cases}$$

$$x > -4 - x \iff x > -2$$



$\boxed{x > 8}$ $$\boxed{\frac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6}} = a_n \sim \frac{n^{\cancel{x}\,1}}{n^{\cancel{x}-2}} = n^2 \to +\infty.$$

$\boxed{x = 8}$ $$a_n \sim \frac{n^8}{2n^6} = \frac{n^2}{2} \to +\infty$$

$\boxed{-2 < x < 8}$ $$a_n \sim \frac{n^x}{n^6} = n^{x-6} \to \begin{cases} +\infty & 6 < x < 8 \\ 1 & x = 6 \\ 0 & -2 < x < 6 \end{cases}$$

$\boxed{x = -2}$ $$a_n \sim \frac{2n^{-2}}{n^6} = \frac{2}{n^8} \to 0$$

$\boxed{x < -2}$ $$a_n \sim \frac{n^{-4-x}}{n^6} = n^{-10-x} \to \begin{cases} 0 & -10 < x < -2 \\ 1 & x = -10 \\ +\infty & x < -10 \end{cases}$$

$$-10 - x > 0 \iff x < -10$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-10,6) \\ 1 & \text{se } x = -10, 6 \\ +\infty & \text{se } x \in (-\infty,-10) \cup (6,+\infty) \end{cases}$$

Confronto tra infiniti.

Una succ$^{\text{ne}}$ che tende a $\pm\infty$ si dice "un infinito".
Vogliamo chiarire come si confrontano tra loro infiniti diversi.
Situazione tipica:

$$a_n, b_n \to +\infty \qquad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow ?$$

a_n "vuole mandare la frazione" a $+\infty$
b_n "vuole mandare la frazione" a 0.

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succ$^{\text{ni}}$ tendenti a $+\infty$ oppure a $-\infty$.
Diremo che:

- $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore risp. a $\{b_n\}$, oppure che $\{b_n\}$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $\{a_n\}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad \left(\text{oppure } \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty\right)$$

In questo caso scriveremo a volte "$a_n \succ b_n$" (per $n\to+\infty$)

- Diremo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

ossia se $a_n \sim \ell\, b_n$.

Esempi: n^3 è un infinito di ordine superiore risp. a n^2

Infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}\, n}{\cancel{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\underbrace{n^3+5n^2}_{\sim n^3}$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $\underbrace{(3n-2)^5}_{\sim 243\, n^5}$

Confronto tra potenze ed esponenziali.

n^α (con $\alpha>0$) e b^n (con $b>1$)

sono entrambi infiniti.

PROP Siano $b>1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

OSS Il risultato è ovvio se $\alpha \leq 0$.

se $\alpha=0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{1} = +\infty$

$\alpha<0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = \left(\frac{+\infty}{0^+}\right) = +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\underbrace{3^n - n^2}_{\sim 3^n}}{\underbrace{n^7-2n^5+5}_{\sim n^7}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^7} = +\infty$$

$$3^n - n^2 = 3^n \Big(\overbrace{1 - \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{\to 0}}^{\to 1}\Big) \sim 3^n$$