DEF

$f: X \longrightarrow Y$ è <u>iniettiva</u> quando (equivalentemente):

1) $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ $\Longrightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$

cioè: argomenti distinti vanno in valori distinti.

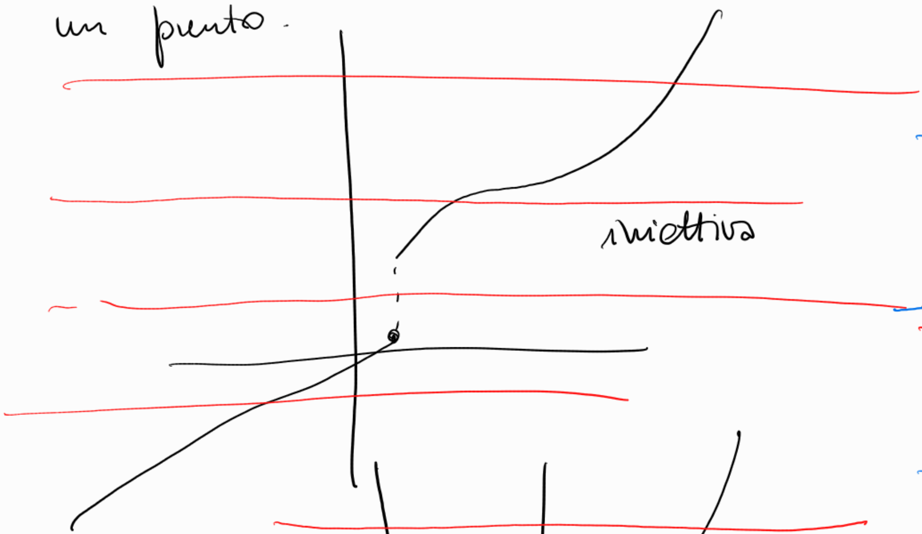
oppure:

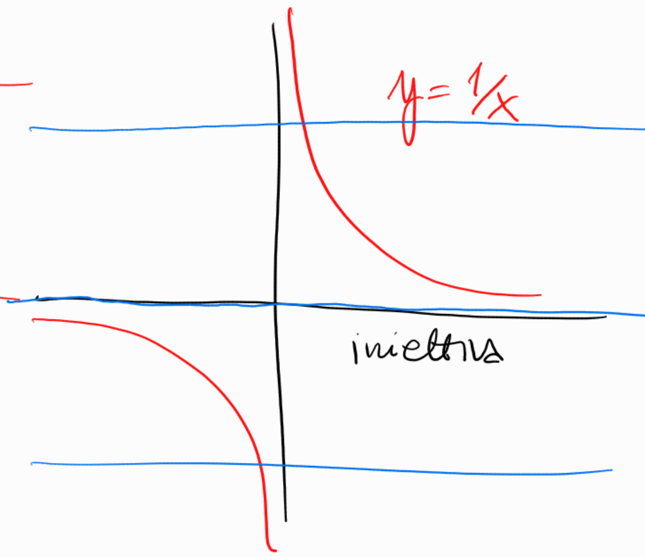
2) Se $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

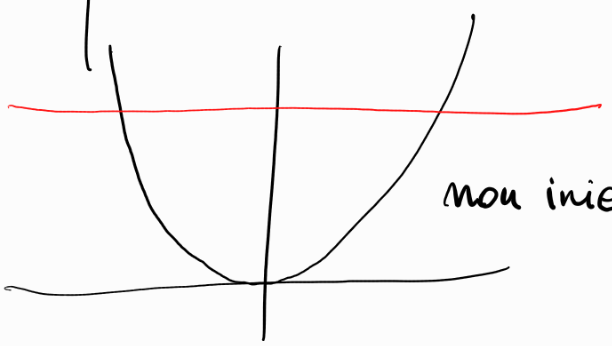
3) $\forall y \in Y$ esiste al più un elemento $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

4) $\forall y \in Y$ l'eq^{ne} $f(x) = y$ ammette al più una sol^{ne} nella variabile x.

5) Per funzioni reali di variabile **reale**, cioè $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in al più un punto.







non iniettiva.

Una funzione strettamente monotòna (decrescente o crescente) è iniettiva.

f è strett. crescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha
decresc

$$f(x_1) < f(x_2)$$
$>$

DEF

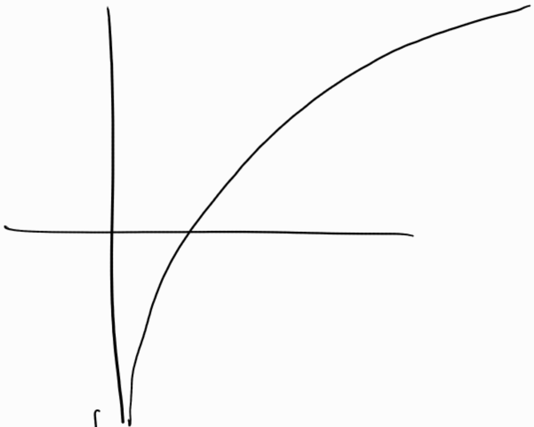
f si dice <u>suriettiva</u> se (equivalentemente):

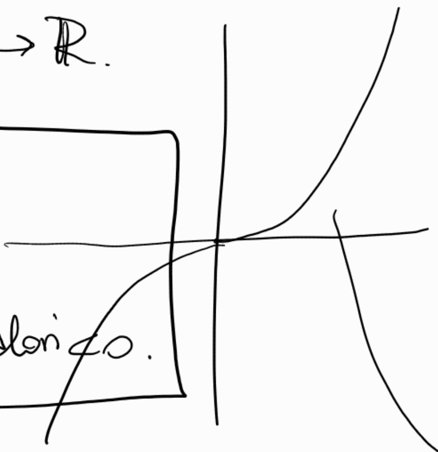
1) Ogni $y \in Y$ "proviene" da qualche $x \in X$.
2) $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
3) $\forall y \in Y$ l'equazione (nella variabile x) $f(x) = y$ ammette almeno una sol^{ne}.
4) L'insieme di arrivo coincide con l'immagine di f.
5) Ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in almeno un punto.

<u>Esempi di f. suriettive:</u>

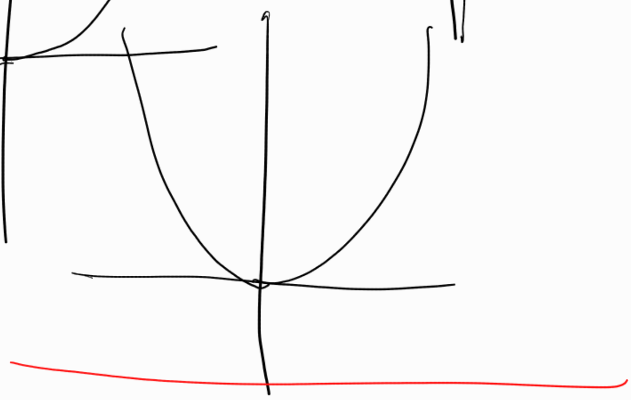
$f(x) = \log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



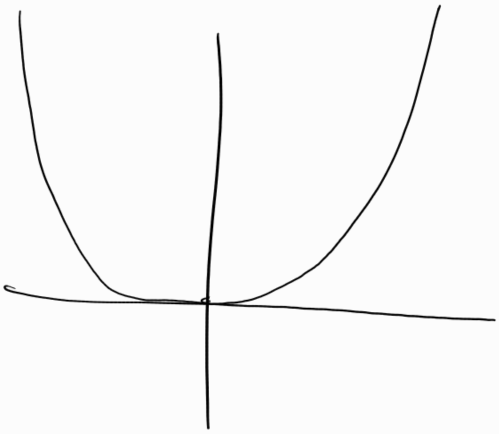


$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
<u>non è suriettiva</u>
perché non prende valori < 0.



$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ è suriettiva.

Ogni funzione si può rendere suriettiva "restringendo" l'insieme di arrivo.



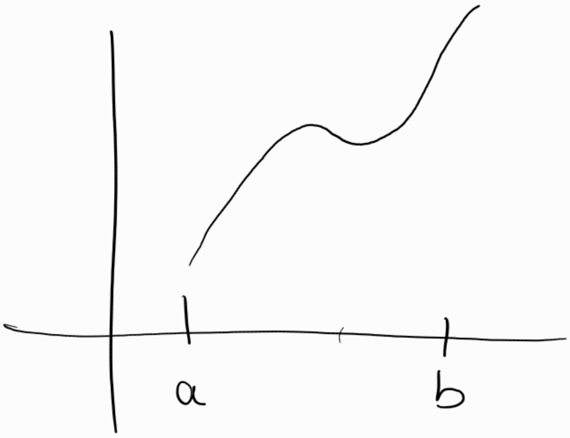
$f(x) = x^n$ $\qquad$ $n \in \mathbb{N}^+$, n pari

$$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^n$$

è suriettiva? NO, perché i valori negativi non sono assunti.

$$f(x) = \mathbb{R} \to [0,+\infty)$$
$$x \mapsto x^n$$

è suriettiva.

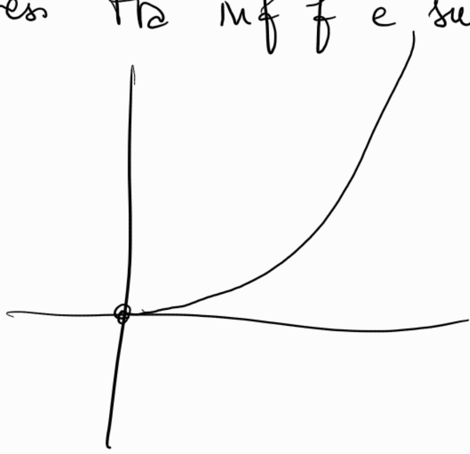


se $f: \underset{\text{intervallo}}{I} \to \mathbb{R}$ è continua

allora assume tutti i valori compresi tra inf f e sup f.

$f(x) = x^n$ $\qquad$ $n \in \mathbb{N}^+$

$I = [0,+\infty)$



$$\inf_{x \in I} f(x) = \min_{x \in I} f(x) = f(0) = 0$$

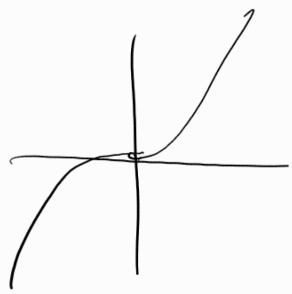
$$\sup_{x \in I} f(x) = +\infty$$

Per il teorema di cui si è detto, $f(x)$ in $[0,+\infty)$ assume tutti i valori compresi tra 0 e $+\infty$.

$$f(x) : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$x \longmapsto x^n$$

è suriettiva

$n \in \mathbb{N}^+$



se n è dispari.

$$f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n$$

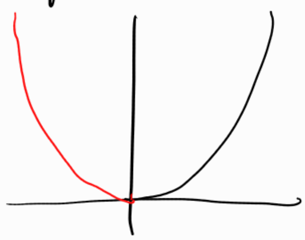
$n \in \mathbb{N}^+$, n dispari

è suriettiva

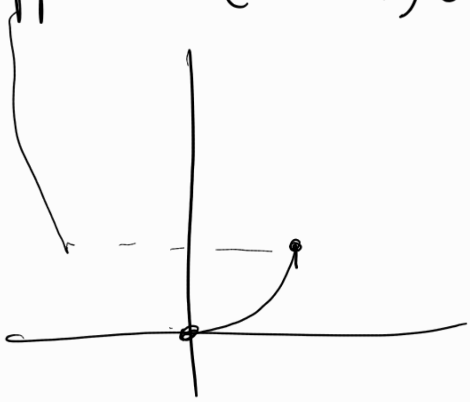
$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva perché $f(x) = f(-x)$

Per renderla iniettiva devo "restringere" il dominio,

per es. prendere $[0,+\infty)$ oppure $(-\infty,0]$.



oppure $(-\infty,-1) \cup [0,1]$ etc...



$$f(x) = x^n : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

$n \in \mathbb{N}^+$, n pari.

iniettiva + suriettiva = biiettiva.

Se $f: X \to Y$ è biiettiva,

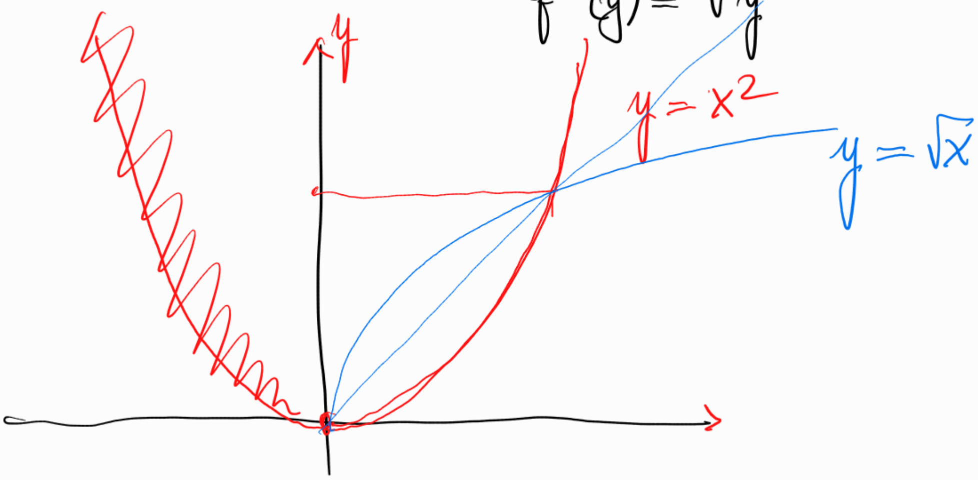
$\forall y \in Y \quad \exists!\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$

Resta quindi definita la "funzione inversa".

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } x \in X \text{ t.c. } f(x) = y$$

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \qquad \text{biettiva}$$
$$x \longmapsto x^2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } \underset{\substack{\parallel \\ f^{-1}(y) = \sqrt{y}}}{x} \in [0, +\infty) \text{ t.c. } x^2 = y$$



$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$