TEOREMA (limite di succ^{ni} monotòne)

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} di numeri reali. Allora:

1) se $\{a_n\}$ è crescente, allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

2) se $\{a_n\}$ è decrescente, allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Dim 1) (L'altra è simile).

caso I) supponiamo $L = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$ (cioè: $\{a_n\}$ limitata sup.)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$ per la caratt. del sup.

Se $n > \bar{n}$ si ha $L - \varepsilon < a_{\bar{n}} \underset{a_n \text{ crescente}}{\leq} a_n \overset{L \text{ è maggiorante}}{\leq} L < L + \varepsilon$.

Abbiamo provato che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ si ha
$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, cioè $|a_n - L| < \varepsilon$.
e questa è la def^{ne} di $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. $\square$

caso II) se $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$, cioè $\{a_n\}$ non ha maggioranti.

Fissiamo $M > 0 \Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} > M$

Se $n \geq \bar{n}$ $\qquad M < a_{\bar{n}} \underset{a_n \text{ crescente}}{\leq} a_n$

Abbiamo provato che $\forall M > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $a_n > M \ \ \forall n \geq \bar{n}$

cioè $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. $\square$

COROLLARIO Sia $\{a_n\}$ una successione crescente. Allora

- $\{a_n\}$ è convergente $\iff$ $\{a_n\}$ è limitata superiormente
- $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty$ $\iff$ $\{a_n\}$ è illimitata superiormente.

Applicazione:

Calcolare sup e inf di $a_n = \frac{n^2+2n+5}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$

OSS $a_n = 1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}$

La succ^{ne} $\{a_n\}$ è decrescente.

$$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$$

$$\cancel{1} + \underset{\frac{2}{n}}{\underset{\wedge}{\frac{2}{n+1}}} + \underset{\frac{5}{n^2}}{\underset{\wedge}{\frac{5}{(n+1)^2}}} \overset{?}{\leq} \cancel{1} + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}$$ vera con il "<"

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \max_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = 8.$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1^{+\infty})$ forma indeterminata

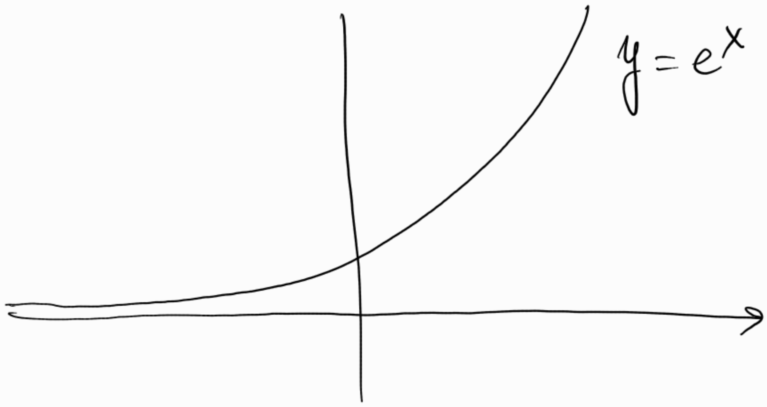
TEOREMA

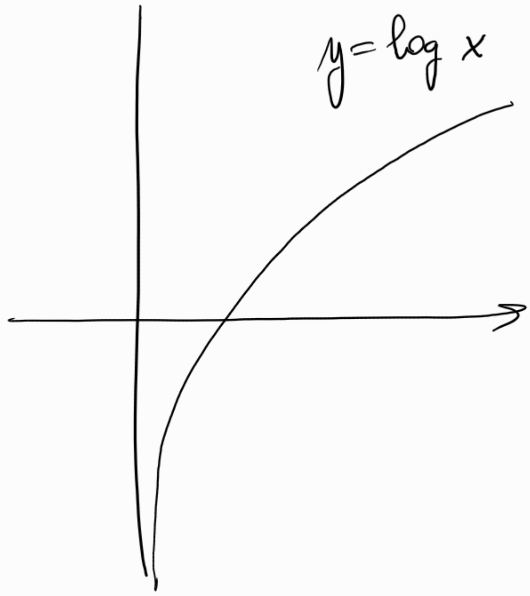
La succ^{ne} $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strett. crescente e limitata superiormente. Quindi essa converge a un limite reale, che viene indicato con e (costante di Nepero) e vale

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \simeq 2{,}718281828 4\ldots$$

Si può dimostrare che e è irrazionale.

Si definisce $\log x = \ln x = \log_e x$ logaritmo naturale.





Conseguenze della def^{ne} di e:

1) $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n}_{\downarrow\, +\infty} \, \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\downarrow\, \log 1 = 0} = (+\infty\cdot 0) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \log e = 1.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1}$$

Si è usata la proprietà del logaritmo $a \log x = \log(x^a)$
$\forall x>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$

2) $$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1^{+\infty}\right) = \frac{1}{e}}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\downarrow\, e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}_{\downarrow\, 1}} = \frac{1}{e}$$

3) Se $b_n \to +\infty$, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$

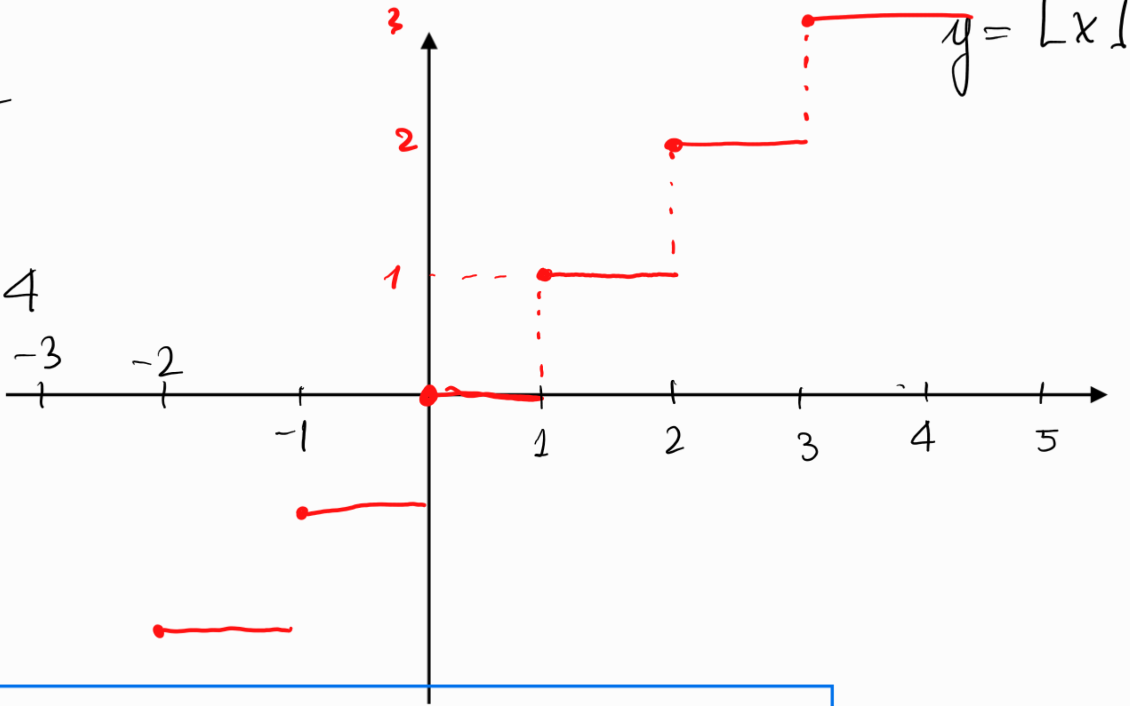
OSS b_n non è necessariamente di interi.

DEF Si definisce <u>parte intera</u> di x il numero
$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$$

$\lfloor 2 \rfloor = 2$

$\lfloor \pi \rfloor = 3$

$\lfloor -\pi \rfloor = -4$



OSS $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$b_n \to +\infty$ Valgono def^{te} le seguenti disug.

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{b_n} < \left(1+\frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{\lfloor b_n \rfloor}}}_{\downarrow\, e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)}_{\downarrow\, 1} \longrightarrow e$$

Cerchiamo l'altro "carabiniere":

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \geq \left(1+\frac{1}{\lfloor b_n\rfloor+1}\right)^{b_n} \geq \frac{\left(1+\frac{1}{\lfloor b_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor b_n\rfloor+1}}{1+\frac{1}{\lfloor b_n\rfloor+1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor b_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor b_n\rfloor+1} \to e \qquad 1+\frac{1}{\lfloor b_n\rfloor+1} \to 1$$

Per il teor. dei carabinieri, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$ se $b_n \to +\infty$.

se $b_n \to -\infty$?

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \Rightarrow (1^{-\infty})$$

Pongo $c_n = -b_n \to +\infty$

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \left(1-\frac{1}{c_n}\right)^{-c_n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{c_n}\right)^{c_n}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{c_n-1}{c_n}\right)^{c_n}} = \left(\frac{c_n-1+1}{c_n-1}\right)^{c_n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{c_n-1}\right)^{c_n-1}}_{\downarrow\, e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{c_n-1}\right)}_{\downarrow\, 1}$$

Riassunto:

$$\boxed{\text{se } b_n \to \pm\infty,\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = (1^{+\infty})$$

$$\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n/5}\right)^{\frac{n}{5}}}_{\downarrow\, e}\Bigg]^{5} \longrightarrow e^{5}$$

Con lo stesso ragionamento si prova

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \qquad \forall a\in\mathbb{R}.}$$

Se $a>0$.

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n/a}\right)^{n/a}\right]^a \longrightarrow e^a$$

perché $\frac{n}{a}\to+\infty$

$a<0$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n/a}\right)^{n/a}\right]^a \longrightarrow e^a$$

perché $\frac{n}{a}\to-\infty$

$a=0$ è banale

$$\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1 \to 1 = e^0$$

OSS Questo è vero anche se sostituisco n con $b_n\to\pm\infty$

$$\boxed{\left(1+\frac{a}{b_n}\right)^{b_n} \longrightarrow e^a \qquad \forall\, b_n\to\pm\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-4} = (1^{+\infty})$$

$$\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-4} = \Bigg(\underbrace{\left(1-\frac{5}{n+2}\right)^{n+2}}_{\downarrow\, e^{-5}}\Bigg)^{\overset{\downarrow 1}{\frac{n-4}{n+2}}} \longrightarrow e^{-5}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{3n+1} = (1^{+\infty}) = \lim_{n\to+\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}_{\downarrow\, e^{-3}}\Bigg]^{\overset{\downarrow 0}{\frac{3n+1}{n^2}}}$$

5) Sia $b_n \to \pm\infty$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n \log\left(1+\frac{1}{b_n}\right) = (\pm\infty \cdot 0) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right) =$$

$$= \log e = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{(n^2-4)}_{\to +\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\to 0} = (+\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(n^2-4)}{n+1}}}_{\to +\infty} \underbrace{(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\to 1} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3)}{1+\log n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = 3$$

$$\frac{\log(n^3)}{1+\log n} = \frac{3\log n}{1+\log n} = \frac{3\cancel{\log n}}{\cancel{\log n}\underbrace{\left(\frac{1}{\log n}+1\right)}_{\to 1}} \to 3$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(e^n+5)}{3n+7} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\log(e^n+5)}{3n+7} = \frac{\log\left(e^n\left(1+\frac{5}{e^n}\right)\right)}{n(3+o(1))} = \frac{\log(e^n)+\log\left(1+\frac{5}{e^n}\right)}{n(3+o(1))}$$

$$= \frac{n + \underbrace{\log\left(1+\frac{5}{e^n}\right)}_{=o(1)}}{n(3+o(1))} = \frac{\cancel{n}(1+o(1))}{\cancel{n}(3+o(1))} = 1/3$$

Riferimento sul testo consigliato: §§ 2.9, 2.10.