Potenze con esponente intero.

$$f(x) = x^n \qquad x \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Una funzione f è una legge che associa univocamente ad ogni elemento x di un insieme A (detto dominio) un elemento $f(x)$ di un insieme B (detto codominio)

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & \ \,\cup\!\!\!\!\shortmid \qquad\quad \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

argomento   valore

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x \\ & x \longmapsto f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N} \text{ fissato.} \end{aligned}$$

x^0 si definisce pari a 1 $\forall x \neq 0$.

DEF $f(x) = x^n$ è crescente (decrescente) in $X \subseteq \mathbb{R}$ se

$\forall x_1, x_2 \in X$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($\geq$)

strettamente crescente (decresc.) in $X \subseteq \mathbb{R}$ se

$\forall x_1, x_2 \in X$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ ($>$)

$f(x) = x^n$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$ $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

$n=1$ $\quad f(x)=x$ è crescente $\quad$ banale

$n=2$ $\quad f(x)=x^2$ è crescente in $[0,+\infty)$.

$x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ t.c. $0 \le x_1 < x_2 \overset{?}{\Longrightarrow} x_1^2 < x_2^2$

$$x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{(x_2+x_1)}_{>0} > 0$$

<u>OSS</u> se $f(x), g(x) : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sono strett. crescenti e <u>positive</u>

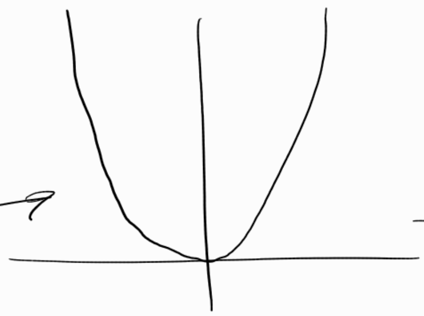
$\Longrightarrow f(x)\cdot g(x)$ è strett. crescente.

$f(x) = x$ è crescente in $\mathbb{R}$.

$g(x) = f(x) = x$.

$f(x)\cdot g(x) = x^2$ è crescente in $\mathbb{R}$?

<u>NO</u>



Siano $x_1, x_2 \in E$ $\quad x_1 < x_2$

$\Longrightarrow f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$

f è strett. crescente $\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

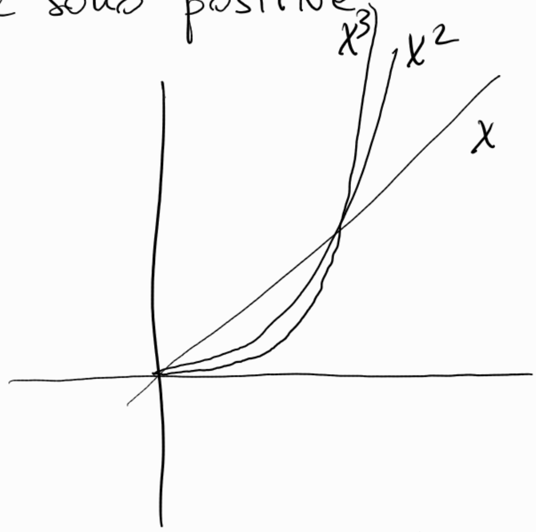
moltiplico per $\boxed{g(x_2) > 0}$ $\quad \boxed{g(x_2)f(x_1) < g(x_2)f(x_2)}$

g è strett. crescente $\Rightarrow \boxed{g(x_1) < g(x_2)}$

moltiplico per $f(x_1) > 0 \Longrightarrow \boxed{f(x_1)g(x_1) < f(x_1)g(x_2)}$

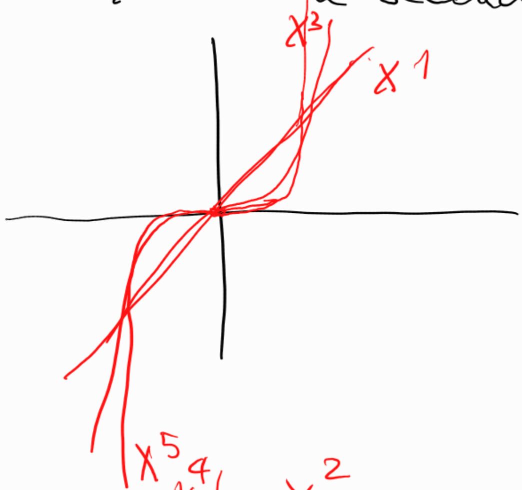
$f(x) = x$ strett crescente e positiva in $[0, +\infty)$ $\implies$ $x \cdot x = x^2$ è strett. crescente e positiva.

$f(x) = x^2$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$
$g(x) = x$ " " "
e sono positive $\implies$ $x^2 \cdot x = x^3$ è strett. cresc. in $[0, +\infty)$

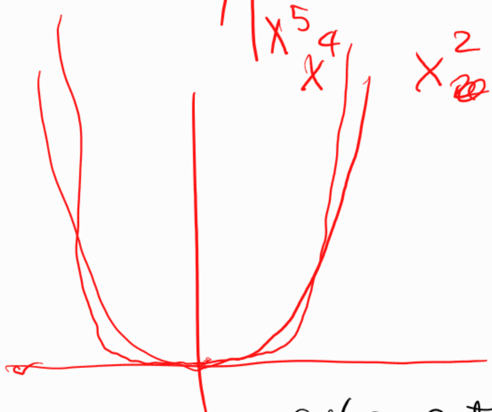


Il comportamento di $f(x) = x^n$ è nettamente diverso per $x < 0$ a seconda di n.

se n è dispari.



se n è pari,



esponente pari

$f(x) = x^2, x^4, x^6, \dots$ è una funzione pari.

cioè $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

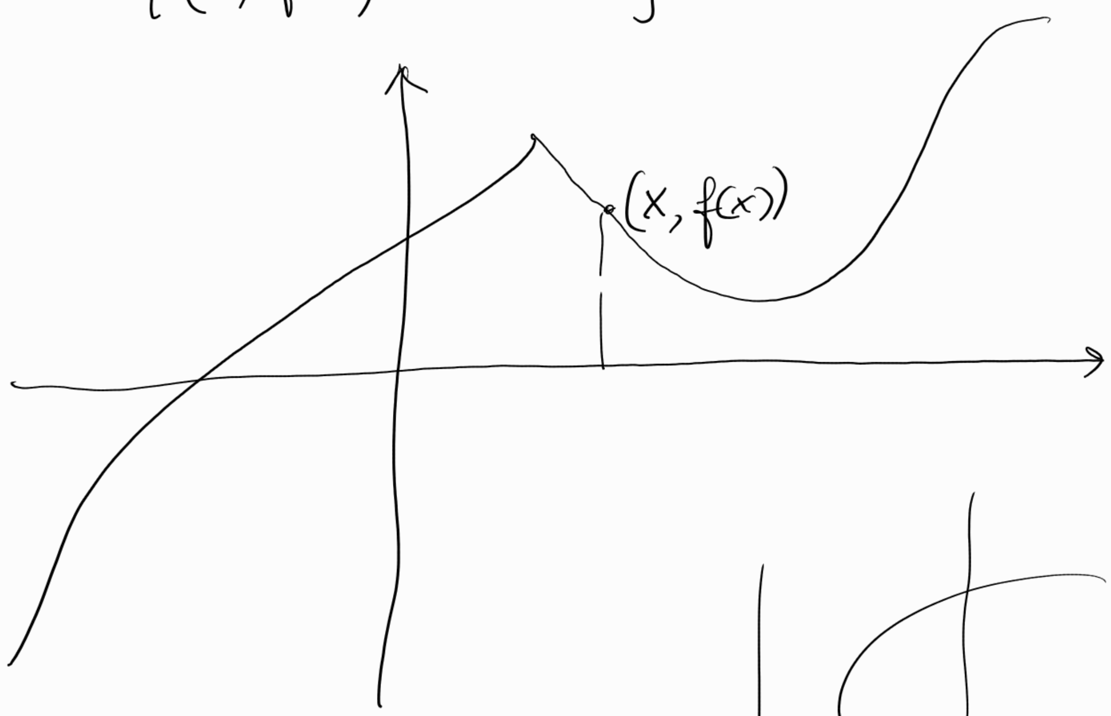
$f(x) = x, x^3, x^5 \ldots$ ← esponente dispari

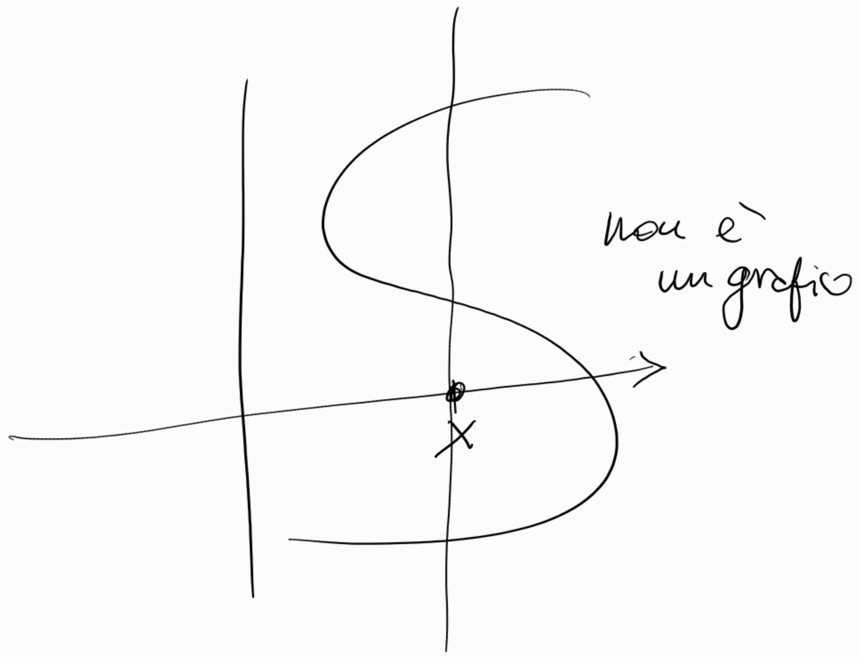
è una funzione dispari

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f: X \to Y$$

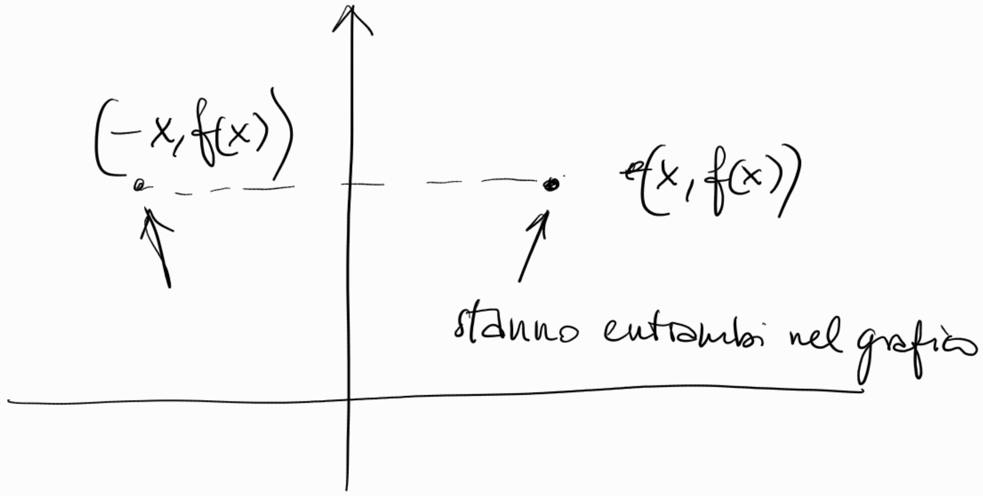
$$\text{graf } f = \{(x,y) : x \in X, y \in Y \text{ t.c. } y = f(x)\}$$
$$= \{(x, f(x)) : x \in X\}$$





Se una funzione è pari, e

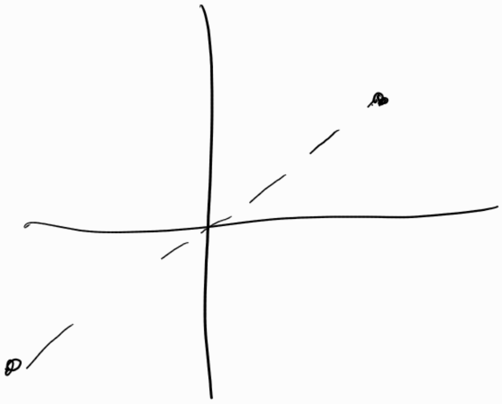
$$(x, f(x)) \in \text{graf } f, \Rightarrow (-x, f(x)) = (-x, f(-x)) \in \text{graf } f$$



$\Rightarrow$ per una funzione pari il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y.

per una funzione dispari (per es. x^3) il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

$$(x, f(x)) \in \text{graf } f, \Rightarrow (-x, -f(x)) \in \text{graf } f.$$

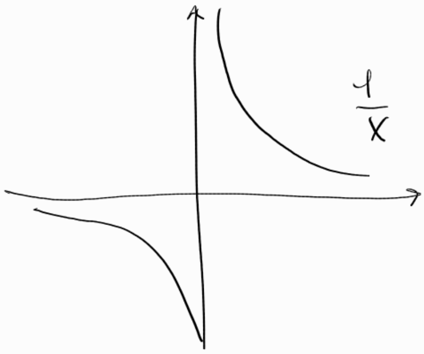


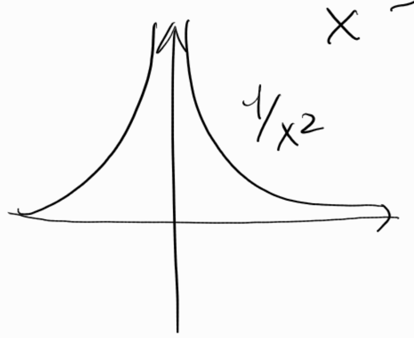
$f(x) = x^n \qquad n = -1, -2, -3, \dots \qquad x^{-1} = \frac{1}{x}$

Dominio $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$





N.B

$f(x) = \frac{1}{x}$ non è decrescente !!

ma è decrescente in $(-\infty, 0)$

e (separatamente) in $(0, +\infty)$