

Note di Analisi Matematica in più Dimensioni

Eugenio Montefusco
dipartimento di Matematica
Sapienza università di Roma
eugenio.montefusco@uniroma1.it



Indice

1 RICHIAMI DI TOPOLOGIA E GEOMETRIA	6
1.1 spazi vettoriali	6
1.2 spazi metrici	8
1.3 spazi normati completi	14
1.4 lo spazio \mathbb{R}^n	18
1.5 lo spazio $C^0[a, b]$	21
1.6 funzioni continue e lipschitziane	23
1.7 topologia di \mathbb{R}^n	24
1.8 il teorema delle contrazioni	32
1.9 esercizi	35
2 ANALISI DIFFERENZIALE	52
2.1 funzioni scalari e vettoriali	52
2.2 derivate successive	58
2.3 punti critici	60
2.4 curve	65
2.5 superfici	68
2.6 il teorema delle funzioni implicite	71
2.7 massimi e minimi vincolati	85
2.8 esercizi	88
3 MISURA E INTEGRAZIONE	131
3.1 La misura di Lebesgue	131
3.2 Misura di Lebesgue e misura di Peano-Jordan	137
3.3 L'integrale di Lebesgue	139
3.4 Teoremi di passaggio al limite	145
3.5 Il calcolo degli integrali	150
3.6 Centro di massa e momento d'inerzia	157
3.7 Cambi di variabile negli integrali	157
3.8 Esempi in \mathbb{R}^2	160
3.9 Esempi in \mathbb{R}^3	161
3.10 Solidi di rotazione	162
3.11 Gli spazi di Lebesgue	162
3.12 Proiezione in $L^p(0, 1)$	169
3.13 Dualità	171
4 ANALISI INTEGRALE	173

4.1	integrali lungo curve	173
4.2	campi vettoriali e forme differenziali	174
4.3	Esercizi	182
4.4	Area di una superficie e integrali su superfici	234
4.5	Baricentro e momento d'inerzia di una superficie	236
4.6	Superfici orientabili e flussi	237
4.7	Esercizi	239
5	ANALISI VETTORIALE	249
5.1	Analisi vettoriale nel piano	249
5.2	Analisi vettoriale nello spazio	254
5.3	Esercizi ed applicazioni	257
5.4	Leggi di conservazione	293
5.5	La diseguaglianza isoperimetrica	294
5.6	Campi vettoriali tangenti sulla sfera	298
5.7	Il teorema di Brower	300
6	equazioni differenziali	303
6.1	esistenza (ed unicità) di soluzioni	304
6.2	Sistemi lineari di equazioni differenziali	310
6.3	Sistemi lineari autonomi	315
6.4	Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti	318
6.5	Sistemi non lineari	319
6.6	Alcuni sistemi planari quadratici	320
6.7	Sistemi non lineari planari	324
6.8	esercizi ed alcune divagazioni	327
6.9	L'equazione di Poisson	393

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Il punto di partenza del nostro viaggio è costituito da quattro famose equazioni: le equazioni di Maxwell. Per il momento scrivere

$$\text{legge di Gauss per il campo elettrico} \quad \Phi_{\Sigma}(E) = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

$$\text{legge di Gauss per il campo magnetico} \quad \Phi_{\Sigma}(B) = 0$$

$$\text{legge di Faraday-Neumann} \quad \Gamma_{\mathcal{L}}(E) = -\frac{\Delta \Phi_S(B)}{\Delta t}$$

$$\text{legge di Ampère-Maxwell} \quad \Gamma_{\mathcal{L}}(B) = \mu_0 \left[i_T + \epsilon_0 \frac{\Delta \Phi_S(E)}{\Delta t} \right]$$

Le precedenti relazioni vanno lette nel seguente modo: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie chiusa nello spazio, il simbolo Φ indica il flusso del campo (elettrico o magnetico) attraverso tale superficie, Q_T è la somma algebrica delle cariche racchiuse all'interno di Σ ed ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. Γ indica la circuitazione del campo (elettrico o magnetico) lungo la linea chiusa $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^3$, S è una qualsiasi superficie dello spazio avente \mathcal{L} come bordo, i_T è la somma algebrica delle intensità di corrente concatenate con \mathcal{L} e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto. Il simbolo Δ indica la variazione della quantità che segue la lettera greca. Questo sistema di quattro equazioni racchiude in sé le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo e sono una delle conquiste scientifiche più importanti del genere umano, almeno fino alla fine del XIX secolo. Eppure la loro scrittura in questa forma presenta alcune criticità, in particolare nel calcolo dei flussi e delle circuitazioni, la cui definizione operativa non è di facile uso. Lo scopo recondito di questo corso è quello di rendere in grado il lettore e la lettrice di saper riscrivere in forma matematicamente migliore le equazioni di Maxwell, di apprezzarne pienamente il significato e, soprattutto, di essere in grado di manipolare attivamente le equazioni, al fine di calcolare quantità rivelanti, dedurre informazioni o previsioni utili.

È ben noto che nessun testo in commercio risponde a tutte le esigenze del docente, e questo è ancor più vero per un testo vorrebbe presentare esaurientemente i principali argomenti dell'analisi vettoriale moderna, venire incontro alle esigenze delle studentesse e degli studenti, riuscire a proporre un percorso ragionevole e calibrato per le ore a disposizione che risultano sempre inferiori alle necessità sia ideali che reali...

Queste note sono il risultato più recente di lunghe riflessioni su cosa (e come!) presentare agli studenti di "Analisi Vettoriale" del corso di laurea triennale in Fisica dell'Università di Roma *La Sapienza*, su come integrare la teoria con esercizi che stimolino la riflessione in modo da facilitare l'assimilazione di concetti, idee, tecniche e che facciano lavorare i discenti senza scoraggiare o stancare eccessivamente.

Ogni capitolo richiama definizioni, teoremi (alcuni dei quali con dimostrazione) e tutti gli strumenti necessari per la risoluzione dei relativi esercizi, anche se la presentazione è ridotta all'essenziale. Gli esercizi e i problemi presentati illustrano e ampliano la teoria esposta e sono completamente svolti, nella speranza che stimolino una rilettura dei precedenti risultati di teoria affrontati portando ad una rielaborazione consapevole e sicura. Pensiamo infatti che la teoria dovrebbe proporre strumenti per la risoluzione di problemi (o, più banalmente, di esercizi) e che questi dovrebbero proiettare luce sul significato dei teoremi e sul modo corretto di interpretarli e memorizzarli.

Gli argomenti di queste note sono così organizzati.

Il primo capitolo espone alcuni concetti relativi agli spazi normati e ad alcune questioni di carattere topologico o metrico, con particolare interesse allo spazio euclideo \mathbb{R}^n .

Il secondo capitolo contiene un'introduzione al calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori reali e vettoriali, con particolare enfasi ai concetti di curve e superfici dello spazio. Il calcolo differenziale viene poi applicato al problema della ricerca di massimi e minimi liberi e vincolati.

La misura e l'integrale di Lebesgue in \mathbb{R}^n è un argomento che è irrinunciabile per il corso di laurea in Fisica, a causa dei successivi corsi in cui si introducono i rudimenti della meccanica quantistica, e costituisce il contenuto del terzo capitolo. Vengono sviluppati le idee di misura, di integrazione e provati i classici risultati di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Infine viene introdotta la definizione degli spazi di Lebesgue.

Il calcolo integrale è l'argomento principale del quarto capitolo. Nella prima parte vengono definiti gli integrali curvilinei di funzioni e di campi vettoriali e vengono affrontate le questioni legate all'esistenza del potenziale di un campo vettoriale e all'esattezza delle forme differenziali lineari. Nella seconda parte viene esposta la teoria dell'integrale secondo Lebesgue con applicazioni al calcolo di aree, volumi, masse, baricentri e momenti d'inerzia di solidi. Nell'ultima parte del capitolo si considerano integrali superficiali di funzioni e di campi vettoriali con applicazioni al calcolo del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

Il quinto capitolo tratta dei teoremi fondamentali del calcolo integrale e differenziale per i campi vettoriali ossia il teorema della divergenza e il teorema del rotore, prima considerati nel piano e poi nello spazio. Al termine del capitolo è possibile trovare alcuni approfondimenti teorici che solitamente non compaiono nei testi di analisi vettoriale.

Il sesto (ed ultimo) capitolo riporta i principali risultati relativi alla teoria di base delle equazioni differenziali ordinarie. Vengono discussi in dettaglio alcuni esempi con lo scopo di rivisitare parte della teoria o accennare a qualche risultato più avanzato. Nell'ultima parte del capitolo vengono proposti alcuni risultati classici relativi all'equazione di Poisson.

Desideriamo infine ringraziare tutti gli aspiranti fisici che hanno segnalato refusi, presentato soluzioni originali ai quesiti proposti, discusso e fatto domande: continuate così!

23 gennaio 2025

EM

1 RICHIAMI DI TOPOLOGIA E GEOMETRIA

Tutte le disquisizioni che faremo nel corso delle pagine successive si svolgeranno in alcuni ambienti che godono di interessanti e cruciali proprietà, quindi è doveroso iniziare rammentando alcuni concetti che sono alla base dell'analisi in più dimensioni.

1.1 spazi vettoriali

DEFINIZIONE 1.1 *Uno spazio vettoriale reale è un insieme non vuoto V , i cui elementi sono detti vettori, su cui sono definite due operazioni*

addizione di vettori per ogni $v, w \in V$ si ha $v + w = (v + w)$,

moltiplicazione per scalare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ si ha $\lambda v = \lambda w$.

Tali operazioni godono di varie proprietà

i. l'addizione è associativa, cioè per ogni $u, v, w \in V$ vale $(u + v) + w = u + (v + w)$,

ii. l'addizione è commutativa, cioè per ogni $u, v \in V$ vale $u + v = v + u$,

iii. esiste $O \in V$ tale che $O + w = w$, per ogni $w \in V$,

iv. per ogni $w \in V$ vale $1w = w$ e $0w = O$,

v. per ogni $u, w \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo $\lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w$,

vi. per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, segue $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$,

vii. per ogni $v \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vale che $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

Si osservi che la definizione resta valida se sostituiamo il campo reale \mathbb{R} con il campo complesso \mathbb{C} . Gli spazi vettoriali sono stati i protagonisti dei corsi di geometria del primo anno, per cui non ci dilungheremo su di essi, tranne per un paio di esempi che torneranno utili.

Come primo esempio proponiamo lo spazio vettoriale che più frequentemente incontreremo, cioè

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 1, \dots, n\} \quad \begin{array}{ll} \text{se } x, y \in \mathbb{R}^n & \text{allora } w := (x + y) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \text{se } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} & \text{allora } w := \lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{array}$$

chiameremo indifferentemente gli elementi di \mathbb{R}^n vettori o punti, il perché sarà chiaro più avanti. Ricordiamo che $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Un altro esempio notevole è il seguente: dato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato, definiamo lo spazio delle funzioni continue e due operazioni come segue

$$C^0[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua in } [a, b]\} \quad \begin{array}{ll} \text{se } f, g \in C^0[a, b] & \text{allora } (f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \\ \text{se } f \in C^0[a, b] \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} & \text{allora } (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \end{array}$$

È abbastanza facile verificare che $C^0[a, b]$ soddisfa la definizione di spazio vettoriale, ed è anche interessante provare che $\dim(C^0[a, b]) = +\infty$ (è sufficiente mostrare che i monomi del tipo x^n sono linearmente indipendenti). Incontreremo altri spazi vettoriali più avanti, nel proseguo del nostro percorso.

DEFINIZIONE 1.2 Sia V uno spazio vettoriale, una funzione $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice norma se

- $\|v\|_V \geq 0$ per ogni $v \in V$ e $\|v\|_V = 0$ se e solo se $v = 0$ (positività),
- $\|\lambda w\|_V = |\lambda| \|w\|_V$ per ogni $w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (1-omogeneità),
- $\|v + w\|_V \leq \|w\|_V + \|v\|_V$ per ogni $v, w \in V$ (diseguaglianza triangolare).

È possibile dotare lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n di molte norme, i casi più noti sono

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &:= |x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &:= \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty &:= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\end{aligned}$$

la norma $\|\cdot\|_2$ è detta norma euclidea ed è la norma standard (almeno per noi) in \mathbb{R}^n , spesso verrà indicata senza alcun pedice, cioè scriveremo $\|x\|$ invece di $\|x\|_2$. La norma $\|\cdot\|_1$ è invece nota come norma del tassista o di Manhattan.

Lo spazio delle funzioni continue $C^0[a, b]$ è usualmente equipaggiato con la seguente norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad \text{per } f \in C^0[a, b]$$

DEFINIZIONE 1.3 Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , una funzione $(\cdot|\cdot)_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice prodotto scalare se

- $(w|v)_V = (v|w)_V$ per ogni $v, w \in V$ (simmetria),
- $(\lambda w|v)_V = (w|\lambda v)_V = \lambda(w|v)_V$ per ogni $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (omogeneità),
- $(w+u|v)_V = (w|v)_V + (u|v)_V$ per ogni $v, w, u \in V$ (linearità),
- $(w|w)_V \geq 0$ per ogni $w \in V$ e $(w|w)_V = 0$ se e solo se $w = 0$ (positività).

L'esempio principale di spazio dotato di prodotto scalare è \mathbb{R}^n che possiamo dotare del prodotto scalare euclideo

$$(x|y)_{\mathbb{R}^n} := x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

nelle prossime pagine proveremo ad illustrare alcuni risultati essenziali riguardo agli spazi metrici e agli spazi normati. Altri prodotti scalari notevoli in \mathbb{R}^n sono le funzioni del tipo

$$(x|y)_M := x \cdot [My] = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i y_j \quad \text{dove } M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

è possibile provare che tale applicazione definisce effettivamente un prodotto scalare se e soltanto se la matrice M è simmetrica e definita positiva.

OSSERVAZIONE 1.4 Si noti che un qualsiasi prodotto scalare induce sempre una norma sullo spazio vettoriale, grazie alla seguente espressione

$$\|x\|_s := [(x|x)]^{1/2}$$

in particolare è possibile verificare che

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left[(x|x)_{\mathbb{R}}^n \right]^{1/2} = \left[(x|x)_{I_n} \right]^{1/2} \quad \text{dove } I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1.5 È sempre possibile introdurre un concetto di lunghezza (o distanza tra punti) avendo a disposizione una norma ed uno spazio vettoriale. Pensando i vettori anche come punti di uno spazio geometrico possiamo introdurre la seguente definizione

$$d_V(u, w) := \|u - w\|_V \quad \text{per ogni } u, w \in V$$

è immediato verificare che le proprietà della norma, implicano le seguenti proprietà per la distanza d_V

- i. $d_V(u, w) \geq 0$ per ogni $u, w \in V$ e $d_V(u, w) = 0$ se e solo se $u = w$ (positività),
- ii. $d_V(u, w) = d_V(w, u)$ per ogni $u, w \in V$ (simmetria),
- iii. $d_V(v, w) \leq d_V(v, u) + d_V(u, w)$ per ogni $v, u, w \in V$ (diseguaglianza triangolare).

Tali proprietà esprimono le caratteristiche a cui, generalmente, si pensa parlando di distanze o lunghezze e, come vedremo tra poco, sono alla base di una definizione più matematica di tale concetto

1.2 spazi metrici

Abbiamo visto nelle pagine precedenti che, avendo una norma, è possibile introdurre un concetto di distanza tra due punti o, se si preferisce, di lunghezza di un segmento di estremi dati. Proviamo a generalizzare questo concetto, per isolare le caratteristiche salienti.

DEFINIZIONE 1.6 *Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme non vuoto (i cui elementi saranno chiamati punti) e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione chiamata distanza (o anche metrica) che soddisfa le seguenti richieste:*

- i. $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (positività),
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$ (simmetria),
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$ (diseguaglianza triangolare).

Il primo esempio di spazio metrico che abbiamo incontrato è l'insieme dei numeri reali con la distanza indotta dal modulo: $d(x, y) := |x - y|$; le verifiche delle proprietà i. ii. e iii. sono abbastanza facili. Analogamente anche $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è uno spazio metrico, ma su questa affermazione torneremo più avanti. Si noti che è sempre possibile definire distanze diverse su un qualsiasi spazio, infatti abbiamo già visto che è possibile dotare \mathbb{R}^n di più norme, e (conseguentemente) di più distanze.

Un esempio un po' bizzarro, e per alcuni versi degenere, è il seguente: sia $X \neq \emptyset$ un insieme arbitrario e definiamo

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{sex } \neq y \\ 0 & \text{sex } = y \end{cases}$$

È facile verificare che d_D è una metrica. Le proprietà i. e ii. sono chiaramente verificate e per quanto riguarda la iii. abbiamo che se $x = y$ non c'è nulla da dimostrare. Se $x \neq y$, basta provare che $d_D(x, z) + d_D(z, y) \geq 1$ per ogni x, y, z nello spazio X , con $x \neq y$, fatto questo che risulta essere vero, essendo almeno uno tra i valori $d_D(x, z)$ e $d_D(y, z)$ uguale a 1 (non possono essere entrambi nulli, perché si avrebbe $x = z$ e $z = y$ per la i., da cui $x = y$). La distanza d_D si chiama distanza discreta.

OSSERVAZIONE 1.7 (METRICA INDOTTA) Un'osservazione utile, per quanto elementare, è che ogni sottoinsieme E di uno spazio metrico (X, d) è a sua volta uno spazio metrico con la metrica indotta dalla restrizione della distanza alle coppie di E . Cioè, se poniamo $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definita $d_E(x, y) := d(x, y)$, allora (E, d_E) è uno spazio metrico.

Per esempio, ogni sottoinsieme di \mathbb{R} può essere considerato uno spazio metrico con la metrica indotta dal modulo.

Nei primi corsi di analisi matematica è usuale introdurre l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} e i suoi assiomi. Adesso vogliamo concentrarci sulla proprietà di completezza: questa proprietà caratterizza l'insieme dei numeri reali rendendoli differenti, in qualche senso, dall'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} . Tale assioma si è rivelato indispensabile per dimostrare tutti i principali risultati del primo corso di analisi, quali il teorema dei valori intermedi, il teorema di Weierstrass, il teorema fondamentale del calcolo integrale... Le implicazioni dell'affermazione che \mathbb{R} è completo nell'analisi matematica rendono necessaria una riflessione e una rivisitazione del significato di completezza, perché vorremmo estendere tale concetto ad altri spazi. La definizione di completezza può essere formulata tramite vari assiomi, per esempio

ASSIOMA 1.8 (PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE) *Per ogni coppia di numeri reali $a > 0$ e $b \geq 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $Na > b$.*

ASSIOMA 1.9 (DI G.F.L.P. CANTOR) *Sia $[a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, un intervallo non vuoto, tale che $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] \neq \emptyset$$

Il limite principale della formulazione della completezza di \mathbb{R} (enunciata tramite l'assioma degli intervalli incapsulati) risiede nel fatto che si basa sulla particolare struttura unidimensionale \mathbb{R} . Tuttavia, le implicazioni che la proprietà di completezza ha in \mathbb{R} sono chiaramente condivise da altri insiemi, quali per esempio il campo dei numeri complessi \mathbb{C} o lo spazio euclideo \mathbb{R}^3 (o, più in generale, \mathbb{R}^n). Ma cosa vuol dire esattamente che \mathbb{C} o \mathbb{R}^3 sono spazi completi? Di seguito diamo una formulazione equivalente della proprietà di completezza di \mathbb{R} , che è basata sul concetto di successione e che è facilmente estendibile a situazioni ben più generali, quali \mathbb{C} , \mathbb{R}^n e tante altre ancora, cioè spazi vettoriali o metrici in cui non ha senso parlare di intervalli.

Una successione di numeri reali è una funzione a valori reali di dominio \mathbb{N} , quindi $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (per cui $a(k)$, per $k \in \mathbb{N}$, sono i valori della successione). Generalmente una successione può essere indicata con una scrittura del tipo $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, o anche $\{a(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, e talvolta scriveremo $\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$ per indicare che i valori della funzione a sono assunti nei numeri reali.

Ricordiamo la definizione di successione convergente e di sottosuccessione.

DEFINIZIONE 1.10 Una successione $\{a_k\}$ è convergente se esiste $p \in \mathbb{R}$ per cui vale

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $|a_k - p| \leq \varepsilon$ per ogni $k \geq N(\varepsilon)$

In questo caso si scrive

$$a_k \rightarrow p \quad \text{oppure} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = p$$

DEFINIZIONE 1.11 Data una successione di numeri reali $\{a_k\}$ e una successione di numeri naturali strettamente crescente $k(0) < k(1) < k(2) \dots$, la successione $a' = \{a_{k(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ si chiama sottosuccessione di $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e si scrive $a' \subseteq a$.

In altre parole, una sottosuccessione $a' \subseteq a$ è la composizione della funzione a con una funzione strettamente crescente $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$a' = a \circ k \quad \text{cioè} \quad a' = (a_{k(0)}, a_{k(1)}, a_{k(2)}, \dots)$$

È noto che una successione è convergente se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono (sempre allo stesso limite), inoltre un fatto significativo riguarda le successioni limitate, per le quali esiste sempre una sottosuccessione convergente, come mostriamo nella prossima proposizione. Ricordiamo che una successione $\{a_k\}$ si dice limitata se lo è come funzione, ossia se esiste $M > 0$ tale che $|a_k| \leq M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 1.12 (DI B.P.J.N. BOLZANO E K.T.W. WEIERSTRASS) Ogni successione di numeri reali limitata possiede una sottosuccessione convergente.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{a_k\}$ una successione limitata e sia $M > 0$ tale che $-M \leq a_k \leq M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Applichiamo il cosiddetto metodo di bisezione: sia $[a_0, b_0] = [-M, M]$ e consideriamo la seguente proprietà (P) per gli intervalli chiusi e limitati I

$$(P) \quad a_k \in I \quad \text{per infiniti indici } k$$

Chiaramente (P) vale per $[a_0, b_0]$. A partire da $[a_0, b_0]$ si definisce una successione di intervalli chiusi incapsulati in modo ricorsivo procedendo secondo il seguente algoritmo di bisezione: si divide l'intervallo $[a_n, b_n]$ in due metà, $I^- := [a_n, (a_n + b_n)/2]$ e $I^+ := [(a_n + b_n)/2, b_n]$ e, se I^- soddisfa la proprietà (P), allora si pone $[a_{n+1}, b_{n+1}] := I^-$; altrimenti, necessariamente I^+ contiene infiniti termini della successione, cioè soddisfa la proprietà (P), e si pone $[a_{n+1}, b_{n+1}] := I^+$. La procedura di bisezione produce una successione di intervalli incapsulati $[a_n, b_n]$ tali che la proprietà (P) vale per ogni intervallo $[a_n, b_n]$. In particolare, dato che ci sono infiniti termini della successione in ogni intervallo $[a_n, b_n]$, possiamo trovare una successione crescente di indici $k(0) = 0 < k(1) < k(2) \dots$ tale che $a_{k(n)} \in [a_n, b_n]$ per ogni n .

Sia $\lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, si noti che tale reale esiste, per l'assioma di Cantor, ed è unico per la proprietà archimedea dei reali. Allora la sottosuccessione $\{a_{k(n)}\}$ converge a λ perché per ogni n si ha che

$$|a_{k(n)} - \lambda| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

da cui la conclusione segue dal teorema del confronto per successioni. ■

DEFINIZIONE 1.13 (SUCCESSIONE DI CAUCHY) $\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$ è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_{k+j} - a_k| \leq \varepsilon \quad \text{perognik} \geq K \in \mathbb{N}$$

Il primo risultato che vogliamo mostrare è

PROPOSIZIONE 1.14 (CONVERGENZA DELLE SUCCESSIONI DI CAUCHY) In \mathbb{R} una successione è di Cauchy se e solo se è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$ sia una successione convergente e sia $p \in \mathbb{R}$ il suo limite. Dalla definizione di limite sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_k - p| \leq \varepsilon \quad \text{perognik} \geq N(\varepsilon)$$

Allora possiamo scrivere

$$|a_{k+j} - a_k| = |a_{k+j} - p + p - a_k| \leq |a_{k+j} - p| + |p - a_k| \leq 2\varepsilon \quad \text{perognik} \geq N(\varepsilon), j \in \mathbb{N}$$

La diseguaglianza ottenuta prova che $\{a_k\}$ è di Cauchy (con $K(\varepsilon) = N(\varepsilon/2)$).

Viceversa, sia $\{a_k\}$ una successione di Cauchy; allora dalla definizione abbiamo che esiste K_0 tale che

$$|a_{k+j} - a_k| \leq 1 \quad \text{perognik} \geq K_0$$

In particolare, la successione $\{a_k\}$ è limitata in quanto

$$|a_k| \leq |a_0| + \dots + |a_{K_0}| + 1 \quad \text{perognik} \in \mathbb{N}$$

Per la Proposizione 1.12 esiste una sottosuccessione convergente $\{a_{k(n)}\}$ ad un punto $p \in \mathbb{R}$. Per concludere il ragionamento è sufficiente provare che tutta la successione $\{a_k\}$ converge a tale limite. Sia $\varepsilon > 0$; per definizione di limite (per $\{a_{k(n)}\}$) e di successione di Cauchy (per $\{a_k\}$) esistono due indici naturali K_1 e K_2 tali che

$$\begin{aligned} |a_{k(n)} - p| &\leq \varepsilon \quad \text{perognik}(n) > K_1 \\ |a_{k+j} - a_k| &\leq \varepsilon \quad \text{perognik} > K_2, j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Allora, per ogni $k \geq \max\{K_1, K_2\}$, sia n tale che $k(n) > k$ e stimiamo come segue

$$|a_k - p| \leq |a_k - a_{k(n)}| + |a_{k(n)} - p| \leq 2\varepsilon$$

L'arbitrarietà di ε ci permette di affermare che $a_k \rightarrow p$, concludendo la dimostrazione. ■

TEOREMA 1.15 (ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE) L'assioma di convergenza delle successioni di Cauchy e la proprietà archimedea implicano l'esistenza dell'estremo superiore di insiemi non vuoti e superiormente limitati.

DIMOSTRAZIONE. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e superiormente limitato. La dimostrazione procede tramite il cosiddetto metodo di bisezione: o esiste $\max(E)$ (nel qual caso la dimostrazione è conclusa), oppure esistono due successioni di reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che a_n non è un maggiorante di E e b_n è un maggiorante di E per ogni $n \in \mathbb{N}$, inoltre il metodo di bisezione garantisce che $\{a_n\}$ sia crescente e $\{b_n\}$ decrescente. In particolare, le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni di Cauchy, perché risulta che

$$|a_{n+j} - a_n|, |b_{n+j} - b_n| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}$$

quindi l'ipotesi che le successioni di Cauchy sono convergenti permette di affermare che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono convergenti. Inoltre, dato che $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$, per la proprietà di Archimede si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Chiamiamo μ tale limite: la dimostrazione si conclude provando che $\mu = \sup(E)$. Per definizione di maggiorante abbiamo che

$$x \leq b_n \quad \text{per ogni } x \in E$$

e, passando al limite, otteniamo

$$x \leq \mu \quad \text{per ogni } x \in E$$

il che prova che μ è un maggiorante. Inoltre, per costruzione a_n non è un maggiorante, per cui per ogni n esiste $x_n \in E$ tale che $a_n < x_n$. In particolare, non può esistere un maggiorante λ con $\lambda < \mu$, infatti, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \mu$$

e, dato che $a_n < x_n \leq \lambda < \mu$ per ogni n , deduciamo la contraddizione

$$0 < \mu - \lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

■

TEOREMA 1.16 (REGOLARITÀ DELLE SUCCESSIONI MONOTONE) *Ogni successione monotona e limitata è una successione di Cauchy.*

DIMOSTRAZIONE.

■

È un fatto notevole che la completezza dei numeri reali possa essere caratterizzata dalla convergenza delle successioni di Cauchy e dalla proprietà di Archimede, cioè che scegliere come assioma Cantor o Cauchy è, sostanzialmente, indifferente in \mathbb{R} , come potremo affermare dopo aver provato il seguente enunciato.

TEOREMA 1.17 (CARATTERIZZAZIONE DELLA PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA) *L'assioma di convergenza delle successioni di Cauchy implica il principio degli intervalli incapsulati di Cantor.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una successione di intervalli incapsulati, cioè di intervalli chiusi e limitati tali che $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e osserviamo che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni di Cauchy, perché sono successioni limitate e monotone, quindi convergenti per il teorema precedente. Allora abbiamo che

$$a_n \longrightarrow a_\infty \leq b_\infty \leftarrow b_n$$

A questo punto segue che

$$\emptyset \neq [a_\infty, b_\infty] \subseteq [a_n, b_n] \quad \text{perognin } n \in \mathbb{N}$$

il che conclude la prova. ■

Alla luce delle considerazioni fatte sulla completezza di \mathbb{R} è naturale definire uno spazio metrico completo come uno spazio in cui ogni successione di Cauchy è convergente. Come abbiamo già osservato questa definizione sarà indipendente dall'ordinamento dei reali e non necessita di alcuna struttura legata agli spazi vettoriali: di fatto è essenzialmente una definizione di carattere metrico, che necessita solo della proprietà di Archimede dei reali, per poter parlare di successioni infinitesime in erre e della definizione di distanza.

A questo scopo premettiamo alcune definizioni e osservazioni sulle successioni negli spazi normati.

DEFINIZIONE 1.18 i. Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato. Una successione di punti in X è una funzione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$, solitamente denotata con $\{a_k\} \subseteq X$.
ii. Una successione $\{a_k\} \subseteq X$ si dice convergente se esiste un punto $p \in X$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - p\|_X = 0$$

iii. Una successione $\{a_k\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|a_{k+j} - a_k\|_X < \varepsilon \quad \text{perognik } k \geq K(\varepsilon) \text{ e perognij } j \in \mathbb{N}$$

OSSERVAZIONE 1.19 I limiti delle successioni sono sempre unici, infatti se avessimo che $a_k \longrightarrow p$ e $a_k \longrightarrow q$, allora per la diseguaglianza triangolare avremmo che

$$\|p - q\| \leq \|p - a_k\| + \|a_k - q\| \quad \text{perognik } k \in \mathbb{N}$$

da cui

$$\|p - q\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [\|p - a_k\| + \|a_k - q\|] = 0$$

il che implica $p = q$.

OSSERVAZIONE 1.20 Dal punto ii. della definizione precedente segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un naturale $N(\varepsilon)$ tale che

$$\|a_k - p\| \leq \varepsilon \quad \text{perognik } k \geq N(\varepsilon)$$

Allora, per ogni $k \geq N(\varepsilon)$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$, per la diseguaglianza triangolare si ha che

$$\|a_k - a_{k+j}\| \leq \|a_k - p\| + \|p - a_{k+j}\| \leq 2\varepsilon$$

cioè $\{a_k\}$ è di Cauchy.

Sottolineiamo esplicitamente che il viceversa non è sempre vero: per esempio, in $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|_2)$ non è vero che ogni successione di Cauchy è convergente.

La convergenza delle successioni di Cauchy è un criterio che può essere usato per definire il concetto di completezza in uno spazio metrico generale, come proponiamo nella successiva definizione.

DEFINIZIONE 1.21 *Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|_X)$ si dice completo se ogni sua successione di Cauchy è convergente.*

1.3 spazi normati completi

Gli esempi considerati fino ad ora, ossia \mathbb{R}^n e gli spazi di funzioni continue $C^0[a, b]$, possiedono una struttura di spazi vettoriali: i loro punti sono anche vettori, e possono essere sommati tra di loro e moltiplicati per uno scalare. Questa è una classe importante di spazi metrici, per i quali (come abbiamo osservato) la metrica usuale è indotta da una norma, che gioca l'analogo ruolo della lunghezza o del modulo di un vettore.

DEFINIZIONE 1.22 *Uno spazio normato è una coppia di oggetti $(X, \|\cdot\|_X)$, dove X uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una norma.*

Abbiamo già osservato che uno spazio normato è anche uno spazio metrico introducendo la seguente funzione distanza

$$d_X(x, y) = \|x - y\|_X$$

Infatti, tale applicazione è non negativa e nulla solo se $x = y$ per la definizione di norma (positività), inoltre la simmetria segue dall'omogeneità della funzione,

$$d_X(x, y) = \|x - y\|_X = \|-(y - x)\|_X = |-1|\|y - x\|_X = \|y - x\|_X = d_X(y, x)$$

Infine la diseguaglianza triangolare discende dalla terza proprietà

$$d_X(x, y) = \|x - y\|_X = \|x - z + z - y\|_X \leq \|x - z\|_X + \|z - y\|_X = d_X(x, z) + d_X(z, y)$$

È anche utile osservare che valgono le seguenti diseguaglianze

$$\|x\|_X = \|x - y + y\|_X \leq \|x - y\|_X + \|y\|_X \quad \text{e} \quad \|y\|_X = \|y - x + x\|_X \leq \|y - x\|_X + \|x\|_X$$

da cui possiamo dedurre che

$$\left| \|x\|_X - \|y\|_X \right| \leq \|x - y\|_X$$

In altri termini, la funzione norma è continua rispetto alla metrica d_X e, più precisamente, è lipschitziana con costante di Lipschitz 1. In uno spazio normato faremo sempre riferimento alla distanza indotta dalla norma, a meno che non sia specificato diversamente.

DEFINIZIONE 1.23 *Gli spazi normati completi (rispetto alla metrica indotta dalla norma) sono detti spazi di Banach.*

DEFINIZIONE 1.24 *Dato uno spazio vettoriale X e due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ definite di esso, diremo che le due norme sono equivalenti se esistono due reali positivi $0 < c_* < c^*$ tali che*

$$c_*\|u\|_a \leq \|u\|_b \leq c^*\|u\|_a \quad \text{per ogni } u \in X$$

Se si interpreta il concetto di norma come una sorta di funzione lunghezza associata ad ogni vettore dello spazio X , il fatto che le due norme siano equivalenti significa che le due misurazioni danno sempre risultati confrontabili, in particolare il fatto più importante è che successioni di Cauchy rispetto alla distanza indotta da una norma sono successioni di Cauchy anche rispetto alla distanza indotta dall'altra norma. Quindi $(X, \|\cdot\|_a)$ è completo se e soltanto se è completo $(X, \|\cdot\|_b)$.

Questo principio è stato utilizzato nella dimostrazione della completezza di (\mathbb{R}^n, d_1) e (\mathbb{R}^n, d_∞) : infatti, entrambe le metriche sono indotte da una norma e sono equivalenti alla norma euclidea.

Questa conclusione non è fortuita ma deriva dal fatto che tutte le norme in uno spazio finito dimensionale sono equivalenti. Per provare ciò, iniziamo con alcune osservazioni generali sulle norme in spazi finito dimensionali.

OSSERVAZIONE 1.25 (NORME IN \mathbb{R}^n) Sia $\|\cdot\|_*$ una generica norma in \mathbb{R}^n e si consideri la metrica euclidea $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$ in \mathbb{R}^n (ossia la metrica indotta dal prodotto scalare euclideo). Allora si osserva quanto segue.

i. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di \mathbb{R}^n , per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha che

$$\|x\|_* = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_* \leq |x_1| \|e_1\|_* + \dots + |x_n| \|e_n\|_* \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{\|e_1\|_*^2 + \dots + \|e_n\|_*^2} = C^* \|x\|_2$$

dove $C^* = \sqrt{\|e_1\|_*^2 + \dots + \|e_n\|_*^2}$, e dove si è usata la proprietà triangolare delle norme nella prima diseguaglianza e Cauchy-Schwartz nella seconda.

ii. Ne segue che tutte le norme in \mathbb{R}^n sono funzioni continue per la topologia indotta dalla metrica euclidea: infatti, dai calcoli precedenti si evince che

$$|\|x\|_* - \|y\|_*| \leq \|x - y\|_* \leq C^* \|x - y\|_2$$

da cui la continuità.

TEOREMA 1.26 (EQUIVALENZA DELLE NORME IN SPAZI FINITO DIMENSIONALI) *Tutte le norme in uno spazio finito dimensionale sono equivalenti: in formule, se $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ sono due norme in \mathbb{R}^n , allora esistono costanti $0 < c_* < c^*$ tali che*

$$c_*\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c^*\|x\|_a \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare che tutte le norme sono equivalenti ad una norma data, per esempio alla norma euclidea $\|\cdot\|_2$, perché quella tra norme è una relazione di equivalenza. Infatti, se esistono costanti $0 < c(a)_* < c(a)^*$ e $0 < c(b)_* < c(b)^*$ tali che

$$c(a)_* \|x\|_a \leq \|x\|_2 \leq c(a)^* \|x\|_a, \quad c(b)_* \|x\|_b \leq \|x\|_2 \leq c(b)^* \|x\|_b \quad \text{perognix } \in \mathbb{R}^n$$

allora si deduce che le due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ sono equivalenti, perché

$$\frac{c(a)_*}{c(b)^*} \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \frac{c(a)^*}{c(b)_*} \|x\|_a \quad \text{perognix } \in \mathbb{R}^n$$

Basta quindi dimostrare l'equivalenza di una norma generica $\|\cdot\|_*$ con $\|\cdot\|_2$. A questo proposito, ricordiamo due fatti importanti
i. la sfera di raggio 1, $S^{n-1} = \partial B(O, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$, è un sottoinsieme compatto di $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ (perché chiuso e limitato),
ii. la norma $\|\cdot\|_*$ è una funzione continua in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Allora, per il Teorema di Weierstrass la funzione $\|\cdot\|_*$ assume massimo e minimo in S^{n-1} : vale a dire, esistono costanti $0 < c_* \leq C^* < +\infty$ tali che

$$c_* \leq \|z\|_* \leq C^* \quad \text{perogniz } \in S^{n-1}$$

Preso quindi un generico punto $x \neq 0$, si ha che $x/\|x\|_2 \in S^{n-1}$ e applicando la diseguaglianza appena mostrata a $z = x/\|x\|_2$ deduciamo che

$$c_* \leq \|z\|_* = \frac{\|x\|_*}{\|x\|_2} \leq C^*$$

da cui segue l'equivalenza delle norme. ■

OSSERVAZIONE 1.27 (CONVESSITÀ DELLA NORMA) La proprietà triangolare della Definizione 1.22 implica che una norma è una funzione convessa, infatti possiamo scrivere

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| = \lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\| \quad \text{perognix, } y \in X, \lambda \in [0, 1]$$

È un fatto generale che le funzioni convesse in \mathbb{R}^n sono continue (più precisamente localmente lipschitziane).

Consideriamo ora uno spazio vettoriale H equipaggiato con un prodotto scalare $(\cdot|\cdot)_H$, allora possiamo associare al prodotto scalare una funzione $\|\cdot\|_H : H \rightarrow [0, +\infty)$ definita come segue

$$\|x\|_H = \sqrt{(x|x)_H} \quad x \in H$$

dal teorema che segue discende, tra molti altre proprietà, che $\|\cdot\|_H$ è una norma.

TEOREMA 1.28 *Sia H uno spazio munito di prodotto scalare $(\cdot|\cdot)_H$. Allora valgono i seguenti fatti:*

i. disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|(u|w)_H| \leq \|u\|_H \|w\|_H \quad \text{perogniu, } w \in H$$

ii. disuguaglianza triangolare

$$\|u + w\|_H \leq \|u\|_H + \|w\|_H \quad \text{perogniu, } w \in H$$

iii. identità del parallelogramma

$$\|u + w\|_H^2 + \|u - w\|_H^2 = 2(\|u\|_H^2 + \|w\|_H^2) \quad \text{perogniu, } w \in H$$

DIMOSTRAZIONE. i. Consideriamo la seguente funzione di una variabile reale

$$\phi(t) := (u + tw|u + tw)_H = \|u + tw\|_H^2 \quad t \in \mathbb{R}$$

osserviamo subito che, essendo una norma al quadrato, la funzione produce solo valori non negativi, inoltre la simmetria e la linearità del prodotto scalare ci permettono di scrivere che

$$0 \leq \phi(t) = \|u + tw\|_H^2 = \|u\|_H^2 + 2t(u|w)_H + t^2\|w\|_H^2$$

La funzione ϕ è una funzione quadratica convessa (possiamo anche dire che il suo grafico è una parabola con la concavità verso l'alto) e il suo minimo assoluto è l'ordinata del vertice, dunque abbiamo che

$$0 \leq \min_{t \in \mathbb{R}} \phi(t) = \phi\left(-\frac{(u|w)_H}{\|w\|_H^2}\right) = \|u\|_H^2 - \frac{2(u|w)_H}{\|w\|_H^2}(u|w)_H + \frac{(u|w)_H^2}{\|w\|_H^4}\|w\|_H^2 = \frac{\|u\|_H^2\|w\|_H^2 - (u|w)_H^2}{\|w\|_H^2}$$

e la non negatività del numeratore implica la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

ii. Usiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz dimostrata in i. per ottenere che

$$\|u + v\|_H^2 = (u + v|u + v)_H = (u|u)_H + 2(u|v)_H + (v|v)_H = \|u\|_H^2 + 2(u|v)_H + \|v\|_H^2 \leq \|u\|_H^2 + 2\|u\|_H\|w\|_H + \|v\|_H^2 = (\|u\|_H + \|w\|_H)^2$$

iii. Per verifica diretta, scrivendo per esteso il primo membro dell'identità, si ha che

$$\|u + v\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 = (u + v|u + v)_H + (u - v|u - v)_H = (u|u)_H + 2(u|v)_H + (v|v)_H + (u|u)_H - 2(u|v)_H + (v|v)_H = 2(u|u)_H + 2(v|v)_H = 2(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2)$$

DEFINIZIONE 1.29 *Uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare $(H, (\cdot|\cdot)_H)$ e completo rispetto alla metrica indotta si chiama spazio di Hilbert.*

ESEMPIO 1.30 Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n con l'usuale prodotto scalare

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

è uno spazio di Hilbert. Approfondiremo il suo studio nelle prossime pagine.

Ci sono spazi di Banach che non sono spazi di Hilbert, cioè norme che non sono generate da prodotti scalari, e noi ne abbiamo già incontrato qualcuno, come mostra la seguente osservazione.

OSSERVAZIONE 1.31 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ non sono spazi di Hilbert. È sufficiente mostrare che non vale la proprietà del parallelogramma: considerati i vettori $(1, 0, 0, \dots, 0)$ e $(0, 1, 0, \dots, 0)$, abbiamo

$$\|u+v\|_1^2 + \|u-v\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(1+1) = 2(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2)$$

$$\|u+v\|_\infty^2 + \|u-v\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4 = 2(1+1) = 2(\|u\|_\infty^2 + \|v\|_\infty^2)$$

1.4 lo spazio \mathbb{R}^n

In questa pagina e nelle successive introduciamo alcuni esempi fondamentali di spazi metrici completi. Il primo che analizziamo è quello degli spazi euclidei, il piano, lo spazio o più in generale lo spazio a n dimensioni. \mathbb{R}^n è l'insieme delle n -ple di numeri reali, detti anche vettori,

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ricordiamo che in questo spazio è definito il prodotto scalare euclideo

$$x \cdot y = (x|y)_{\mathbb{R}^n} := \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{perognix, } y \in \mathbb{R}^n$$

e che la norma o il modulo di un vettore x è il numero

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{oppure} \quad \|x\|_2^2 = x \cdot x$$

La distanza euclidea tra due punti di \mathbb{R}^n è definita dal modulo della loro differenza

$$d_2(x, y) := \|x-y\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad \text{perognix } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

in sostanza la distanza euclidea d_2 è quella per cui vale il teorema di Pitagora generalizzato a uno spazio di n dimensioni.

Come abbiamo visto nel caso del piano euclideo, la dimostrazione che d_2 costituisca di fatto una metrica non è del tutto evidente, a questo scopo, dimostriamo un'importante diseguaglianza (che ritroverete in svariati altri contesti nel corso dei vostri studi).

TEOREMA 1.32 (DISEGUAGLIANZA DI A.L. CAUCHY & K.H.A. SCHWARTZ) *Dati due punti $p = (p_1, \dots, p_n)$ e $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha*

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^n |p_i q_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i^2 + q_i^2) = \frac{1}{2} [\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2]$$

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^n |p_i q_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n p_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n q_i^2 \right]^{1/2} = \|p\|_2 \|q\|_2$$

DIMOSTRAZIONE. La prima formula si ottiene sommando rispetto all'indice $i = 1, \dots, n$ le diseguaglianze

$$|p_i q_i| \leq \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2)$$

evidentemente vere essendo equivalenti alla diseguaglianza $(|p_i| - |q_i|)^2 \geq 0$. Abbiamo già dimostrato la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz nel paragrafo precedente, ma riportiamo una seconda prova, visto l'importanza della diseguaglianza. Cominciamo osservando che è vera se $(p_1, \dots, p_n) = (0, \dots, 0)$ o se $(q_1, \dots, q_n) = (0, \dots, 0)$. Negli altri casi applichiamo la (1.1) ai vettori $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ definiti da

$$u_i = \frac{p_i}{\|p\|} \quad \text{e} \quad w_i = \frac{q_i}{\|q\|} \quad i = 1, \dots, n$$

Per definizione si ha che $\sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 = 1$, per cui da (1.1) otteniamo

$$\sum_{i=1}^n \frac{|p_i q_i|}{\|p\| \|q\|} = \sum_{i=1}^n |u_i w_i| \leq 1$$

che è la tesi di (1.2). ■

La quantità che compare al membro sinistro della diseguaglianza di Cauchy-Schwarz è il prodotto scalare tra due vettori di \mathbb{R}^n :

$$p \cdot q := \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad p, q \in \mathbb{R}^n$$

Per cui in maniera compatta possiamo scrivere le diseguaglianze (1.1) e (1.2) nella forma

$$|p \cdot q| \leq \|p\| \cdot \|q\| \leq \frac{1}{2} (\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2)$$

Utilizzando la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz, è possibile verificare che $\|\cdot\|_2$ è una norma. La positività e l'omogeneità non richiedono una dimostrazione, mentre, per la diseguaglianza triangolare, possiamo procedere come segue: siano $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ tre punti di \mathbb{R}^n e scriviamo

$$(1.3) \quad \|x-y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2] = \|x-z\|_2^2 + \|z-y\|_2^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i)$$

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz al terzo addendo, si ha

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x-z\|_2 \|z-y\|_2$$

che unita a (1.3) dà

$$\|x-y\|_2^2 \leq \|x-z\|_2^2 + \|z-y\|_2^2 + 2\|x-z\|_2\|z-y\|_2 = [\|x-z\|_2 + \|z-y\|_2]^2$$

che è la diseguaglianza triangolare, a meno di una estrazione di radice quadrata.

PROPOSIZIONE 1.33 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una successione di Cauchy, ossia, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_k - x_{k+j}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n (x_k^i - x_{k+j}^i)^2 \right]^{1/2} \leq \varepsilon \quad \text{perognik} \geq K \in \mathbb{N}$$

dove abbiamo usato la convenzione di scrivere in apice le componenti dei punti di \mathbb{R}^n per non confonderle con l'indice della successione: $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, per cui in particolare si ha $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$.

Allora, se fissiamo un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, la successione formata da tutte le componenti i_0 -esime dei punti x_k , $\{x_k^{i_0}\}$ (k è l'indice della successione), è una successione di Cauchy, in quanto

$$|x_k^{i_0} - x_{k+j}^{i_0}| \leq \left[\sum_{i=1}^n (x_k^i - x_{k+j}^i)^2 \right]^{1/2} = \|x_k - x_{k+j}\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{perognik} \geq K \in \mathbb{N}$$

Usando la completezza di \mathbb{R} , possiamo affermare che esiste $x_\infty^{i_0} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{i_0} = x_\infty^{i_0} \quad \text{perogni} i_0 = 1, \dots, n$$

Abbiamo quindi trovato il candidato limite $x_\infty = (x_\infty^1, \dots, x_\infty^n) \in \mathbb{R}^n$.

Per completare la dimostrazione mostriamo che $\|x_k - x_\infty\|$ converge a zero: infatti, si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_\infty\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n [x_k^i - x_\infty^i]^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} [x_k^i - x_\infty^i]^2 \right]^{1/2} = 0$$

■

1.5 lo spazio $C^0[a, b]$

Uno degli esempi di spazio metrico completo più rilevanti in questo corso è quello delle funzioni continue definite in un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ con la norma uniforme.

DEFINIZIONE 1.34 *Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, definiamo lo spazio delle funzioni continue*

$$C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$$

equipaggiato con la norma uniforme

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\} \quad \text{per ogni } f \in C^0[a, b]$$

La definizione di metrica uniforme è ben posta perché negli intervalli $[a, b]$ chiusi e limitati ogni funzione continua per il teorema di Weierstrass ha massimo: in particolare, dato che $|f|$ è una funzione continua, perché composizione di funzioni continue, $\max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ esiste.

Come al solito, è necessario verificare che effettivamente $\|\cdot\|_\infty$ soddisfa le proprietà di una norma. La verifica della positività e della simmetria sono immediate e ci concentriamo sulla diseguaglianza triangolare. Date $f, g, h \in C^0[a, b]$, sia $x_0 \in [a, b]$ un punto di massimo per il modulo della differenza tra f e g , allora

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\} = |f(x_0) - g(x_0)|$$

Allora, utilizzando la diseguaglianza triangolare in \mathbb{R} , otteniamo che

$$\|f - g\|_\infty = |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - h(x)|\} + \sup_{x \in [a, b]} \{|h(x) - g(x)|\} = \|f - h\|_\infty + \|h - g\|_\infty$$

Non è un caso il fatto che usato lo stesso simbolo per le metriche $\|\cdot\|_\infty$ in \mathbb{R}^n e in $C^0[a, b]$: l'analogia risiede nella definizione della distanza come massimo dei valori, dove nel primo caso il massimo è preso sulle coordinate, mentre nel secondo al variare del punto x nell'intervallo $[a, b]$, quasi che i punti dell'intervallo fossero le infinite coordinate del punto $f \in C^0[a, b]$.

Quello che segue è uno dei risultati più importanti di tutto il corso.

TEOREMA 1.35 *Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato. Allora, lo spazio metrico $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ è completo, ossia tutte le sue successioni di Cauchy sono convergenti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{f_k\} \subseteq C^0[a, b]$ una successione di Cauchy: cioè,

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \|f_k - f_{k+j}\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f_k(x) - f_{k+j}(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } k \geq K(\varepsilon) \text{ e } j \in \mathbb{N}$$

Per ogni $x_0 \in [a, b]$, quindi, vale che

$$|f_k(x_0) - f_{k+j}(x_0)| \leq \sup_{x \in I} |f_k(x) - f_{k+j}(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } k \geq K(\varepsilon) \text{ e } j \in \mathbb{N}$$

Ne segue che per ogni $x_0 \in [a, b]$ la successione di numeri reali $\{f_k(x_0)\} \subseteq \mathbb{R}$ è di Cauchy. Per la completezza di \mathbb{R} , esiste $L_{x_0} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0) = L_{x_0}$$

Il candidato limite è quindi la funzione $f_\infty : x_0 \mapsto L_{x_0}$. Dimostriamo adesso che f_∞ appartiene allo spazio $C^0[a, b]$. A tal proposito fissiamo un punto generico $z_0 \in [a, b]$ e dimostriamo la continuità di f_∞ in z_0 (dall'arbitrarietà di z_0 seguirà la continuità di f_∞ su tutto $[a, b]$).

Sia $\varepsilon > 0$ e $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ come nella definizione di successione di Cauchy, dalla continuità di f_K , si ha che esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f_K(z_0) - f_K(x)| \leq \varepsilon$ per ogni $|z_0 - x| \leq \delta$. Allora, possiamo concludere che per ogni $x \in [a, b]$ con $|z_0 - x| \leq \delta$ vale

$$\begin{aligned} |f_\infty(z_0) - f_\infty(x)| &\leq |f_\infty(z_0) - f_K(z_0)| + |f_K(z_0) - f_K(x)| + |f_K(x) - f_\infty(x)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |f_{K+j}(z_0) - f_K(z_0)| + |f_K(z_0) - f_K(x)| + \lim_{j \rightarrow \infty} |f_{K+j}(x) - f_K(x)| \\ &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|f_{K+j} - f_K\|_\infty + |f_K(z_0) - f_K(x)| + \limsup_{j \rightarrow \infty} \|f_{K+j}, f_K\|_\infty \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la condizione di successione di Cauchy per $\{f_k\}$ e la continuità di f_K in z_0 . In particolare, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue la continuità di f_∞ . Infine, mostriamo che f_k converge a f_∞ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$: per ogni $\varepsilon > 0$ sia $K(\varepsilon)$ come nella definizione di successione di Cauchy e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $x_k \in [a, b]$ tale che

$$\|f_\infty - f_k\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f_\infty(x) - f_k(x)| \leq |f_\infty(x_k) - f_k(x_k)|$$

Allora si ha che per ogni $k \geq K(\varepsilon)$

$$\|f_\infty - f_k\|_\infty = |f_\infty(x_M) - f_k(x_M)| \leq |f_\infty(x_M) - f_{K+j}(x_M)| + |f_{K+j}(x_M) - f_k(x_M)| \leq |f_\infty(x_M) - f_{K+j}(x_M)| + \|f_{K+j} - f_k\|_\infty \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

a patto che k sia abbastanza grande. Dall'arbitrarietà di ε possiamo concludere che $\|f_\infty - f_k\|_\infty \rightarrow 0$. ■

OSSERVAZIONE 1.36 Infine, ritorniamo sull'ipotesi di chiusura e limitatezza dell'intervallo $[a, b]$. Se consideriamo un intervallo I non chiuso e limitato, le funzioni continue su I non sarebbero necessariamente limitate (si pensi, per esempio, alla funzione $1/x$ per $x \in (0, +\infty)$) per cui la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ potrebbe non essere definita, nel senso che il massimo non solo non esiste, ma addirittura l'estremo superiore sia $+\infty$.

Lo spazio giusto da considerare è quindi quello delle funzioni continue e limitate definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

$$C_b^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua e limitata}\}$$

con la norma uniforme

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)|\} \quad \text{per ogni } f, g \in C_b^0(I)$$

Il pedice b nella notazione $C_b^0(I)$ viene dall'inglese e sta per bounded (che vuol dire limitato). Se l'intervallo $I = [a, b]$ è chiuso e limitato, allora per il teorema di Weierstrass tutte le funzioni continue in $[a, b]$ ammettono massimo e minimo, e quindi sono limitate, per cui $C_b^0([a, b])$ non è altro che il più familiare insieme delle funzioni continue $C^0[a, b]$ e l'estremo superiore nella definizione di $\|\cdot\|_\infty$ è in realtà un massimo.

Generalizzando le dimostrazione fatte prima, è possibile verificare che $(C_b^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

TEOREMA 1.37 *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, allora, lo spazio normato $(C_b^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.*

1.6 funzioni continue e lipschitziane

Di fondamentale importanza è la nozione di funzioni continue tra spazi metrici, e avranno un ruolo rilevante nel resto del corso. La definizione di funzione continua è del tutto analoga a quella introdotta per le funzioni di variabile reale.

DEFINIZIONE 1.38 (FUNZIONI CONTINUE) *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tale che*

$$(1.4) \quad \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in X \text{ tale che} \quad \|x - x_0\|_X < \delta$$

Una funzione continua in tutti i punti di X si dirà semplicemente continua.

Il seguente teorema mostra come la nozione di continuità sia equivalente alla continuità per successioni (anche detta continuità sequenziale).

TEOREMA 1.39 *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi normati e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. I seguenti enunciati sono equivalenti:*

- i. f è continua;
- ii. per ogni successione convergente $\{x_k\} \subseteq X$, con $x_k \rightarrow x_\infty$, si ha che $f(x_k) \rightarrow f(x_\infty)$.

DIMOSTRAZIONE. [i implica ii] Sia $x_k \rightarrow x_\infty$. Per la continuità di f , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che (1.4) vale. Inoltre, dato che $x_k \rightarrow x_\infty$, esiste un intero $N_0(\varepsilon)$ tale che $\|x_k - x_\infty\|_X < \delta$ per ogni $k \geq N_0(\varepsilon)$. In particolare, dalla continuità di f segue che

$$\|x_k - x_\infty\|_X < \delta \quad \text{implica} \quad \|f(x_k) - f(x_\infty)\|_Y < \varepsilon \quad \text{perognik} \geq N_0(\varepsilon)$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude che $f(x_k) \rightarrow f(x_\infty)$.

[ii implica i] Supponiamo per assurdo che f non sia continua: allora esiste un punto x_0 e un numero $\varepsilon > 0$ tali che, per ogni δ della forma $\delta = 1/k$, esiste almeno un punto $x_k \in B(x_0, 1/k) = \{p \in X : \|x_0 - p\|_X < 1/k\}$ tale che $\|f(x_k) - f(x_0)\|_Y > \varepsilon$. Chiaramente $x_k \rightarrow x_0$, ma $f(x_k) \not\rightarrow f(x_0)$, contraddicendo ii. ■

Tra gli esempi più significativi di funzioni continue ci sono le isometrie tra spazi normati.

DEFINIZIONE 1.40 (ISOMETRIA) Una funzione $f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ è una isometria se f è suriettiva e

$$\|x - y\|_X = \|f(x) - f(y)\|_Y \quad \text{perognix, } y \in X$$

Si noti che le isometrie sono necessariamente funzioni iniettive ($f(x) = f(y)$ implica che $\|x - y\|_X = 0$, ossia $x = y$ per le proprietà della norma), cioè sono delle biezioni. In particolare, $f^{-1} : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ è anch'essa una isometria.

Le isometrie sono funzioni continue: per ogni $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta = \varepsilon$ per verificare la continuità.

Due spazi metrici tra i quali esiste una isometria sono del tutto equivalenti dal punto di vista delle proprietà degli spazi normati (potremmo anche dire: della geometria degli spazi normati).

DEFINIZIONE 1.41 Una funzione $f : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ tra due spazi normati si dice lipschitziana se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X \quad \text{perognix, } y \in X$$

È facile verificare che le funzioni lipschitziane sono continue: nella definizione di continuità, per ogni $\varepsilon > 0$ basta scegliere $\delta = \varepsilon/L$. Il numero

$$[f]_{\text{Lip}} := \sup_{x \neq y \in X} \frac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{\|x - y\|_X}$$

rappresenta la più piccola costante L per cui vale la maggiorazione nella definizione. Una classe particolare di funzioni continue da uno spazio in se stesso sono le contrazioni, ovvero funzioni lipschitziane di costante di Lipschitz strettamente minore di 1, così dette perché di fatto “contraggono” tutte le distanze tra le coppie di punti.

1.7 topologia di \mathbb{R}^n

Sebbene uno spazio metrico sia univocamente descritto dalla sua metrica, alcune sue proprietà vengono espresse in maniera più efficace guardando opportuni sottoinsiemi dello spazio stesso, come accade, per esempio, con la nozione di continuità, come vedremo a breve. Con questo intento, introduciamo la nozione di topologia di uno spazio metrico e definiamo alcuni concetti che hanno a che fare con la geometria dei sottoinsiemi degli spazi metrici.

Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, sia $p \in \mathbb{R}^n$ un punto dello spazio e $r > 0$ un reale positivo, denotiamo con $B(p, r)$ la palla di centro p e raggio $r > 0$ cioè l'insieme

$$B(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|p - x\| < r\}$$

Si noti che per definizione la palla $B(p, r)$ non è mai vuota, perché contiene sempre (almeno) il suo centro p .

DEFINIZIONE 1.42 (INSIEMI APERTI E CHIUSI) *i. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se per ogni $x_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq A$.*

ii. Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare $C^c = \mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto.

La famiglia degli insiemi aperti, cioè $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R}^n : A \text{ aperto}\}$, si chiama topologia dello spazio \mathbb{R}^n .

L'insieme vuoto e l'intero spazio \mathbb{R}^n sono insiemi aperti e chiusi per definizione. Infatti, la definizione di aperto è banalmente verificata per $A = \emptyset$ perché non esiste nessun $x_0 \in \emptyset$ e, analogamente, è verificata per $A = \mathbb{R}^n$ perché ogni palla $B(x_0, r)$ è per definizione un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Dato che $\emptyset^c = \mathbb{R}^n$ e anche che $[\mathbb{R}^n]^c = \emptyset$, ne deriva che sono anche chiusi.

DEFINIZIONE 1.43 (PUNTI INTERNI) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x_0 \in A$ si dice interno ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq A$.*

Quindi, un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se tutti i suoi punti sono punti interni.

OSSERVAZIONE 1.44 Un insieme che non è aperto non è necessariamente chiuso: la negazione dell'affermazione A è aperto è la seguente:

A non è aperto se e solo se esiste $x_0 \in A$ chenonsiaunpunto interno

Se $x_0 \in A$ non è un punto interno, allora esiste una successione decrescente ed infinitesima $\{r_k\} \subseteq (0, +\infty)$, tale che per ogni r_k esiste un punto $x_k \in A$ tale che $\|x_k - x_0\| < r_k$. L'affermazione è equivalente a dire che

A non è aperto se e solo se esiste una successione $\{x_k\} \subseteq A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ tale che $x_k \rightarrow x_0 \in A$

DEFINIZIONE 1.45 (PUNTI DI BORDO) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, il bordo di E (si denota ∂E) è l'insieme dei punti $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tali che per ogni $r > 0$ la palla aperta di centro x_0 e raggio r interseca sia E che il complementare di E , in formule*

$$x_0 \in \partial E \quad \text{se e solo se} \quad \text{per ogni } r > 0 \quad B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(x_0, r) \cap E^c \neq \emptyset$$

In altri termini un punto è di bordo se non è interno a $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (il che implica che ogni palla $B(x_0, r)$ interseca il complementare di E , cioè $B(x_0, r) \cap E^c \neq \emptyset$) e non è interno al complementare di E (cioè ogni palla $B(x_0, r)$ interseca anche E , che vuol dire $B(x_0, r) \cap E \neq \emptyset$).

Un punto di bordo può appartenere o meno all'insieme stesso: quando tutti punti di bordo appartengono, allora l'insieme è chiuso, come prova la proposizione che segue.

PROPOSIZIONE 1.46 *Un sottoinsieme $E \subseteq (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è chiuso se e solo se $\partial E \subseteq E$.*

DIMOSTRAZIONE. Se E è chiuso, allora E^c è aperto e tutti i punti di E^c sono interni, per cui ∂E (che è costituito da punti che non sono interni né per E né per E^c) deve essere necessariamente contenuto in E . Viceversa, se $\partial E \subseteq E$, allora tutti i punti di E^c sono interni: infatti, se esistesse un punto $x \in E^c$ non interno, allora per ogni $r > 0$ si avrebbe che $B(x, r) \cap E^c \neq \emptyset$, perché questa intersezione contiene x , e contemporaneamente $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$ perché il punto per ipotesi non è interno al complementare; in altri termini $x \in \partial E$, contro l'ipotesi che $\partial E \subseteq E$. ■

ESEMPIO 1.47 i. Ogni palla $B(p, r)$ è aperta: ogni punto $x_0 \in B(p, r)$ è interno a $B(p, r)$. Infatti, se $s = r - d(p, x_0)$, allora $s > 0$ perché $d(p, x_0) < r$ e inoltre $B(x_0, s) \subseteq B(p, r)$ perché

$$z \in B(x_0, s) \quad \text{significa} \quad d(x_0, z) < s \quad \text{daci} \quad d(p, z) \leq d(p, x_0) + d(x_0, z) < d(p, x_0) + s = r$$

Per questa ragione gli insiemi $B(p, r)$ sono anche chiamati palle aperte.

ii. Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : d(p, x) \leq r\}$ sono chiusi e sono dette palle chiuse. La verifica di questa affermazione è analoga a quanto visto in i.

iii. Consideriamo \mathbb{R} con la metrica usuale $d(x, y) = |x - y|$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si verifica facilmente che gli intervalli (a, b) sono aperti, gli intervalli $[a, b]$ sono chiusi; gli intervalli $(a, b]$ e $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi.

Proviamo alcune proprietà basilari degli insiemi aperti e chiusi.

PROPOSIZIONE 1.48 *Sia Λ un insieme di indici generico e sia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di aperti. Allora, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ è aperto. Se $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia arbitraria di chiusi, allora $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ è chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Riguardo alla prima affermazione, osserviamo subito che, se $p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, allora esiste (almeno) un aperto A_{λ_0} , per un certo $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $p \in A_{\lambda_0}$. Dato che A_{λ_0} è aperto, per definizione esiste $B(p, r) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, il che prova che un'unione arbitraria di aperti è aperta.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, è sufficiente concentrarsi sugli insiemi complementari: ricordiamo che per definizione C_λ^c sono insiemi aperti, per cui per quanto appena dimostrato $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^c = A$ è aperto. D'altronde dalle leggi di De Morgan possiamo concludere che $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = \left[\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^c \right]^c = A^c$ è un chiuso. ■

PROPOSIZIONE 1.49 *L'intersezione di una famiglia finita di aperti è aperta e l'unione di una famiglia finita di chiusi è chiusa.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo A_1, \dots, A_N insiemi aperti in \mathbb{R}^n e $p \in A_1 \cap \dots \cap A_N$. Poiché tutti gli A_i sono aperti, esiste $r_i > 0$ tale che $B(p, r_i) \subseteq A_i$ per ogni i . Quindi, posto $r = \min\{r_1, \dots, r_N\}$ ed osservato che tale valore è positivo perché il minore di N valori positivi, possiamo affermare che $B(p, r) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_N$, e quindi l'intersezione finita di aperti è aperta.

Come per il teorema precedente, la conclusione per i chiusi si deduce dalla precedente passando ai complementari: $(C_1 \cup \dots \cup C_N)^c = C_1^c \cap \dots \cap C_N^c$ è aperto, da cui segue che $C_1 \cup \dots \cup C_N$ è chiuso. ■

Gli insiemi chiusi di uno spazio metrico sono caratterizzati dalla proprietà di contenere tutti i limiti delle successioni convergenti contenute nell'insieme.

TEOREMA 1.50 (CHIUSURA PER SUCCESSIONI) *Sono condizioni equivalenti:*

- i. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso,
- ii. ogni successione convergente $\{x_k\} \subseteq C$ ha limite in C , o meglio $C \ni x_k \rightarrow x_\infty$ allora $x_\infty \in C$.

DIMOSTRAZIONE. [i. implica ii.] Supponiamo che C sia chiuso e consideriamo una successione $\{x_k\} \subseteq C$ convergente ad un punto x_∞ . Se $x_\infty \in C^c$, dato che C^c è aperto, esiste $r > 0$ tale che $B(x_\infty, r) \subseteq C^c$. Dalla definizione di successione convergente (scegliendo $\varepsilon = r/2$) sappiamo che esiste un indice $K = K(r/2) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x_k - x_\infty\| \leq \frac{r}{2} \quad \text{per ogni } k \geq K$$

Questo significa che $x_k \in B(x_\infty, r) \subseteq C^c$ per ogni $k \geq K$, il che è assurdo visto per ipotesi $\{x_k\} \subseteq C$. Questo dimostra che l'ipotesi $x_\infty \in C^c$ è contraddittoria, per cui di fatto C contiene il punto limite x_∞ .

[ii. implica i.] Come spiegato precedentemente, se C^c non è aperto, esiste $q \in C^c$ e $x_k \in (C^c)^c = C$ con $\|q - x_k\| \leq 1/k$. In particolare, $\{x_k\} \subseteq C$ converge a $q \in C^c$, contraddicendo ii, ne deriva che C^c deve essere aperto, cioè C chiuso. ■

Cerchiamo ora di rileggere il concetto di continuità alla luce dei concetti topologici introdotti nelle ultime pagine.

TEOREMA 1.51 *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Allora, sono fatti equivalenti:*

- i. f è continua,
- ii. per ogni aperto $A \subseteq Y$ si ha che la controimmagine di A , $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$, è aperto in X .

DIMOSTRAZIONE. [i. implica ii.] Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme aperto $A \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(A) \subseteq X$ non sia aperto. Questo vuol dire che esiste un punto $x_\infty \in f^{-1}(A)$ e una successione $\{x_k\} \subseteq (f^{-1}(A))^c$ tale che $x_k \rightarrow x_\infty$. Dalla continuità sequenziale si ha che $f(x_k) \rightarrow f(x_\infty)$. Inoltre, dato che A è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(f(x_\infty), \varepsilon) \subseteq A$. Ne segue che esiste $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ per cui $\|f(x_k) - f(x_\infty)\|_Y < \varepsilon$, cioè $f(x_k) \in B(f(x_\infty), \varepsilon) \subseteq A$, per ogni $k \geq N_0(\varepsilon)$. In particolare, $x_k = f^{-1}(f(x_k)) \in f^{-1}(A)$, in contraddizione con la scelta $x_k \in (f^{-1}(A))^c$.

[ii. implica i.] Sia $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$. Si ricordi che la palla $B(f(x_0), \varepsilon)$ è un sottoinsieme aperto. Per ii. si ha che $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq X$ è aperto, per cui esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. In altri termini, per ogni $x \in X$ tale che $\|x - x_0\|_X < \delta$ si ha che $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, cioè $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$. Questo prova la continuità di f in un generico punto x_0 , da cui segue i. ■

In queste pagine ci interessiamo di una tra le proprietà più importanti degli spazi metrici e dei suoi sottoinsiemi, nota con il termine di compattezza. Iniziamo col dare le definizioni pertinenti al concetto di compattezza.

DEFINIZIONE 1.52 Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice

- compatto se da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un sottoricoprimento finito: cioè, se data una famiglia arbitraria di aperti $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tali che $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, esiste un certo numero $N \in \mathbb{N}$ di elementi della famiglia $A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_N}$ tali che $K \subseteq A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_N}$,
- compatto per successioni (o sequenzialmente compatto) se da ogni successione $\{x_k\} \subseteq K$ si può estrarre una sottosuccessione convergente con limite appartenente a K ,
- totalmente limitato se per ogni $r > 0$ esistono $N \in \mathbb{N}$ ed N punti $\{p_1, \dots, p_N\} \subseteq K$ tali che

$$K \subseteq B(p_1, r) \cup \dots \cup B(p_N, r)$$

- completo se è completo per la metrifica restrizione $(K, \|\cdot\|_K)$: ossia ogni successione di Cauchy $\{x_k\} \subseteq K$ ha limite in K .

OSSERVAZIONE 1.53 i. Un insieme compatto per successioni è automaticamente completo. Infatti, se K è compatto per successione, allora ogni successione di Cauchy $\{x_k\} \subseteq K$ deve possedere una sottosuccessione convergente in K , ma se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, allora tutta la successione ammette limite, per cui K è completo.

ii. La nozione di totale limitatezza può essere formulata equivalentemente come segue: chiamiamo diametro di un insieme $A \subseteq X$ il numero

$$\text{diam}(A) = \sup_{p, q \in A} \|p - q\|_X$$

allora K è totalmente limitato se per ogni $r > 0$ esiste un numero $N \in \mathbb{N}$ di insiemi D_1, \dots, D_N con diametro minore di r tali che

$$K \subseteq \bigcup_{l=1}^N D_l$$

iii. Chiaramente, se un insieme è totalmente limitato, allora è limitato.

ESEMPIO 1.54 Facciamo alcuni esempi elementari al fine di illustrare i concetti introdotti.

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è completo ma non è totalmente limitato (visto che non è limitato); non è compatto per successioni (per esempio, $x_k = k$ non ha sottosuccessioni convergenti).
- $((0, 1), |\cdot|)$ è totalmente limitato, ma non è completo, inoltre non è compatto per successioni (per esempio, $x_k = 1/k$ è una successione di Cauchy che non ha limite in $(0, 1)$).
- $([0, 1], |\cdot|)$ è completo, totalmente limitato e compatto per successioni, (grazie al teorema di Bolzano e Weierstrass) ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente e, dato che $[0, 1]$ è chiuso, il limite appartiene a $[0, 1]$.
- (\mathbb{R}, d_D) è limitato (ma non totalmente limitato), completo ma non è compatto per successioni: infatti $x_k = 1/k$ non ha sottosuccessioni convergenti.

Mostriamo quali implicazioni sussistono tra le diverse nozioni introdotte nella Definizione 1.52.

PROPOSIZIONE 1.55 Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $E \subseteq X$. Allora $(E, \|\cdot\|)$ è completo se e solo se E è chiuso in $(X, \|\cdot\|)$.

DIMOSTRAZIONE. Se E è completo, allora ogni successione convergente in E , essendo una successione di Cauchy, ha limite in E : cioè E contiene tutti i suoi punti di accumulazione e quindi è chiuso (si noti che per questa implicazione non abbiamo utilizzato la completezza di X !).

Viceversa, se E è chiuso, allora ogni successione di Cauchy in E è convergente in X (grazie alla completezza di X): ma dato che E è chiuso, si ha che il limite appartiene ad E , da cui abbiamo la completezza di E . \blacksquare

PROPOSIZIONE 1.56 *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $K \subseteq X$ un insieme compatto. Allora K è chiuso e totalmente limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con il mostrare che $A = K^c$ è aperto. Fissiamo $x_0 \in A$ e, per ogni $y \in K$, sia $d_y := \|y - x_0\|/3$. Si noti che $d_y > 0$ e inoltre $B(x_0, d_y) \cap B(y, d_y) = \emptyset$ per ogni $y \in K$.

Chiaramente $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B(y, d_y)$ è un ricoprimento di aperti, e siccome K è compatto esiste un insieme finito di punti $\{y_1, \dots, y_N\}$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, N} B(y_i, d_{y_i})$$

Ponendo $r = \min\{d_{y_1}, \dots, d_{y_N}\}$, abbiamo che $B(y_i, d_{y_i}) \cap B(x_0, r) = \emptyset$ per ogni $i = 1, \dots, N$. In particolare, $K \cap B(x_0, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(y_i, d_{y_i}) \cap B(x_0, r) = \emptyset$, ossia $B(x_0, r) \subseteq A = K^c$. Ogni punto $x_0 \in A$ è quindi un punto interno a A , cioè A è aperto. Ne segue che $K = A^c$ è chiuso e per la proposizione precedente K è completo.

Per provare che K è totalmente limitato, fissiamo $r > 0$ e notiamo che naturalmente $\{B(x, r)\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K , da cui è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, cioè

$$K \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, N} B(x_i, r)$$

per opportuni punti $\{x_1, \dots, x_N\} \subseteq K$, il che prova che K è totalmente limitato. \blacksquare

PROPOSIZIONE 1.57 *I sottoinsiemi chiusi di insiemi compatti sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $C \subseteq K \subseteq (X, d)$, con K compatto e C chiuso: vogliamo mostrare che allora C è compatto. A questo scopo consideriamo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un ricoprimento aperto di C . Per ipotesi C^c è aperto e, dato che $C \subseteq K$, si ha che la famiglia $\{C^c, A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ costituisce un ricoprimento aperto di K .

Per la completezza di K esiste un sottoricoprimento finito, cui possiamo aggiungere l'aperto C^c se non fosse già preso in considerazione: cioè $K \subseteq C^c \cup A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_N}$. Dato che $C \subseteq K$ e $C \cap C^c = \emptyset$, ne segue che $C \subseteq A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_N}$ cioè C ammette un sottoricoprimento finito e quindi è compatto. \blacksquare

COROLLARIO 1.58 *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $K \subset X$ compatto e $C \subseteq X$ chiuso. Allora $C \cap K$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 1.56 si ha che K è chiuso. Allora $K \cap C$ è un chiuso contenuto in K , per cui il corollario segue quindi dalla proposizione precedente. \blacksquare

PROPOSIZIONE 1.59 *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $Z \subseteq K \subseteq X$, con K compatto e Z infinito. Allora, esiste un punto di accumulazione di Z in K .*

DIMOSTRAZIONE. Se nessun punto di K è un punto di accumulazione per Z , allora per ogni $x \in K$ esiste $r_x > 0$ tale che $Z \cap (B(x, r_x) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Poiché $Z \subseteq K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ e K è compatto, esiste un sottoricoprimento finito $Z \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, N} B(x_i, r_{x_i})$. In particolare, ne segue che

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, N} B(x_i, r_{x_i}) \cap Z \subset \{x_1, \dots, x_N\}$$

perché $B(x_i, r_{x_i}) \cap Z \subseteq \{x_i\}$ per ogni $i = 1, \dots, N$, contraddicendo l'ipotesi che Z abbia infiniti elementi. ■

COROLLARIO 1.60 *Ogni insieme compatto è sequenzialmente compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia K un compatto e $\{x_k\} \subseteq K$ una successione. Se l'immagine della successione $Z = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ha un numero finito di elementi, allora ne deve esistere almeno uno che si ripete per infiniti indici e che costituisce una sottosuccessione costante, quindi convergente.

Se Z ha infiniti elementi, per la proposizione precedente Z possiede almeno un punto x_∞ di accumulazione e quindi esiste una sottosuccessione convergente. ■

Abbiamo mostrato che un insieme compatto è necessariamente completo e totalmente limitato da un lato, e compatto per successioni dall'altro. Queste in realtà sono condizioni equivalenti alla compattezza negli spazi metrici.

TEOREMA 1.61 (CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI COMPATTI) *Dato uno spazio normato (X, d) e $K \subseteq X$, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- i. K è sequenzialmente compatto,
- ii. K è completo e totalmente limitato,
- iii. K è compatto.

DIMOSTRAZIONE. [i. implica ii.] Per quanto osservato in § 1.53-i, ogni insieme sequenzialmente compatto è completo. Per cui dobbiamo solo provare che K è totalmente limitato. Se così non fosse, esisterebbe $r > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio r è un ricoprimento di K . In particolare, fissato $x_1 \in K$ arbitrariamente, si ha che $B(x_1, r)$ non ricopre K , e quindi esiste $x_2 \in K$ tale che $\|x_1 - x_2\| \geq r$. Poiché neanche $B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$ ricopre K , deve esistere un punto $x_3 \in K$ tale che $\|x_i - x_3\| \geq r$ per $i = 1, 2$. Ripetendo il ragionamento otteniamo una successione $(x_k) \subseteq K$ tale che

$$\|x_i - x_k\| \geq r \quad \text{perogni } i, k \in \mathbb{N}$$

Da una tale successione non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente, e questo contraddice l'ipotesi che K sia sequenzialmente compatto.

[ii. implica iii.] Sia K completo e totalmente limitato e supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento aperto $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Essendo K totalmente limitato, esiste un numero finito di insiemi C_1, \dots, C_N con la proprietà che

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^N C_k \quad \text{e} \quad \text{diam}(C_k) < 1 \quad \text{perogni } k = 1, \dots, N$$

Se fosse possibile ricoprire ognuno degli C_k con un numero finito di aperti della famiglia \mathcal{A} , unendo questi ricoprimenti avremmo trovato una famiglia finita di aperti di \mathcal{A} che ricopre K . Questo significa che esiste almeno un insieme C_{k_1} che non può essere ricoperto con un numero finito di aperti. Poniamo $C_{k_1} = X_1$ e osserviamo che X_1 è totalmente limitato, perché K lo è. Possiamo quindi ripetere il ragionamento precedente con un numero finito di insiemi di diametro minore di $1/2$, trovando un sottoinsieme $X_2 \subseteq X_1$ che non può essere ricoperto con un numero finito di elementi di \mathcal{A} e ha diametro minore di $1/2$. Iterando il procedimento troveremo una successione $\{X_k\}$ di sottoinsiemi di K tali che

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \quad \text{e} \quad \text{diam}(X_k) < 1/k$$

e nessuno degli insiemi X_k può essere ricoperto con un numero finito di aperti di \mathcal{A} . Per ogni indice $k \in \mathbb{N}$ sia x_k un punto di X_k e osserviamo che, dato che $X_n \subseteq X_k$ per ogni $n \geq k$, allora

$$\|x_n - x_k\| \leq \text{diam}(X_k) < 1/k \quad \text{perognik} < n$$

Quindi la successione (x_k) è di Cauchy e, poiché per ipotesi K è completo, esiste $x_\infty \in K$ tale che $x_k \rightarrow x_\infty \in K$.

Notiamo che $X_k \subseteq B(x_\infty, 1/k)$ per ogni k : infatti, se $x \in X_k$ e $n > k$, allora abbiamo che $x_n \in X_n \subseteq X_k$, da cui

$$\|x - x_\infty\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_\infty\| < 1/k + \|x_n - x_\infty\|$$

Quindi, passando al limite su $n \rightarrow \infty$, concludiamo che

$$\|x - x_\infty\| \leq 1/k \quad \text{perognix} \in X_k$$

Sia A_{λ_0} un aperto del ricoprimento \mathcal{A} contenente x_∞ e sia $r > 0$ tale che $B(x_\infty, r) \subseteq A_{\lambda_0}$. Se $k > 1/r$, allora $\|x - x_\infty\| < r$ per ogni $x \in X_k$, cioè $X_k \subseteq B(x_\infty, r) \subseteq A_{\lambda_0}$, e questo è assurdo perché abbiamo assunto che X_k non possa essere ricoperto da un numero finito di aperti in \mathcal{A} .

[iii. implica i.] È il corollario 1.59. ■

Concludiamo rivedendo alcuni dei risultati già incontrati nelle pagine precedenti, alla luce del concetto di compattezza.

OSSERVAZIONE 1.62 (COMPATTI DI \mathbb{R}^n) Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Infatti, dato che $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è uno spazio metrico completo, un insieme è chiuso se e solo se è completo e limitato se e solo se è totalmente limitato.

OSSERVAZIONE 1.63 (PRINCIPIO DEGLI INTERVALLI INCAPSULATI) Siano $I_n = [a_n, b_n]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ intervalli chiusi, limitati e incapsulati, ossia tali che $I_{n+1} \subseteq I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ è non vuota.

Questa è una conseguenza della proposizione relativa all'intersezione di insiemi compatti e della caratterizzazione degli insiemi compatti di \mathbb{R} fatta nell'osservazione 1.62.

TEOREMA 1.64 (DI B.P.J.N. BOLZANO & K.T.W. WEIERSTRASS) Una successione limitata in \mathbb{R}^n ammette una sottosuccessione convergente.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una successione limitata, ossia esiste $M > 0$ tale che $\{x_k\} \subseteq [-M, M]^n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dato che $[-M, M]^n$ è compatto in \mathbb{R}^n , per il Teorema 1.61, è compatto per successioni, per cui possiamo estrarre da $\{x_k\}$ una sottosuccessione convergente.

Proponiamo una dimostrazione alternativa che fa uso, soltanto, del teorema di Bolzano e Weierstrass in \mathbb{R} usualmente studiato nei corsi di Analisi delle funzioni scalari. ■

TEOREMA 1.65 (DI K.T.W. WEIERSTRASS) *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, $K \subseteq X$ un insieme compatto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha un massimo e un minimo in K , ossia esistono $z_0, z_1 \in K$ tali che*

$$f(z_0) \leq f(x) \leq f(z_1) \quad \text{perognix } x \in K$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione procede seguendo il metodo diretto del calcolo delle variazioni:

i. si considera una successione minimizzante (che esiste per definizione di estremo inferiore):

$$\{x_k\} \subseteq K \quad \text{taleche} \quad f(x_k) \rightarrow \inf_{x \in K} f(x)$$

ii. per la compattezza di K , esiste una sottosuccessione convergente, cioè esiste $\{x_{k(i)}\}$ tale che $x_{k(i)} \rightarrow z_0 \in K$,

iii. usando la continuità di f , si conclude

$$f(z_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k(i)}) = \inf_{x \in K} f(x)$$

da cui si deduce che z_0 è un punto di minimo di f . Per l'esistenza del massimo si ragiona in maniera analoga. ■

1.8 il teorema delle contrazioni

DEFINIZIONE 1.66 *Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio metrico. Diremo che $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ è una contrazione, se esiste un reale $\alpha \in [0, 1)$ tale che*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad \text{perognix } x, y \in X$$

Il seguente teorema è il risultato principale che dimostriamo sulle contrazioni.

TEOREMA 1.67 (DELLE CONTRAZIONI DI S. BANACH & R. CACCIOPPOLI) *Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, $C \subseteq X$ un insieme chiuso e $T : C \rightarrow C$ una contrazione. Allora esiste un unico punto fisso di T , cioè esiste un solo punto $p \in C$ tale che*

$$T(p) = p$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo la seguente successione per ricorrenza: prendiamo un punto $x_0 \in C$ in maniera arbitraria e poniamo

$$x_{k+1} := T(x_k) = \dots = T^{k+1-j}(x_j) = \dots = T^{k+1}(x_0) \quad k \in \mathbb{N}$$

in questo modo abbiamo costruito una successione di punti $\{x_k\} \subseteq C$, visto che l'immagine di T è contenuta in C . Notiamo che vale

$$\|x_k - x_{k+1}\| = \|T^k(x_0) - T^{k+1}(x_1)\| \leq \alpha \|T^{k-1}(x_0) - T^{k-1}(x_1)\| \leq \dots \leq \alpha^k \|x_0 - x_1\|$$

In particolare, ne discende che per ogni $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \|x_k - x_{k+j}\| &\leq \|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_{k+2}\| + \dots + \|x_{k+j-1} - x_{k+j}\| \leq \alpha^k \|x_0 - x_1\| + \alpha^{k+1} \|x_0 - x_1\| + \dots + \alpha^{k+j-1} \|x_0 - x_1\| \\ (1.5) \quad &= \alpha^k (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{j-1}) \|x_0 - x_1\| \leq \alpha^k \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i d(x_0, x_1) = \alpha^k \frac{\|x_0 - x_1\|}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Dato che $\alpha \in [0, 1)$, questo prova che (x_k) è una successione di Cauchy nello spazio normato X : infatti, vale l'implicazione

$$\|x_k - x_{k+j}\| \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad k \geq K_0(\varepsilon) = \left\lfloor \log_{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{C} \varepsilon \right) \right\rfloor + 1$$

dove le parentesi $\lfloor \lambda \rfloor$ indicano il più grande intero minore o uguale a $\lambda \in \mathbb{R}$. Siccome X è completo, C risulta completo in quanto chiuso, o possiamo dire che esiste $p \in C$ tale che $x_k \rightarrow p$ e, per la continuità delle contrazioni, $T(x_k) \rightarrow T(p)$. In conclusione abbiamo che

$$T(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = p$$

Per l'unicità, supponiamo per assurdo che esistano due punti fissi p e q : allora

$$\|p - q\| = \|T(p) - T(q)\| \leq \alpha \|p - q\|$$

ossia

$$(1 - \alpha) \|p - q\| \leq 0$$

Dato che il fattore $(1 - \alpha) > 0$ per ipotesi e che $\|p - q\| \geq 0$ per definizione di distanza, si ha che $\|p - q\| = 0$, cioè che $p = q$. ■

Si noti che l'espressione (1.5) dà anche una stima dell'errore che si commette nel calcolare il punto fisso, in quanto

$$\|x_k - p\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_k - x_{k+j}\| \leq \frac{\alpha^k \|x_0 - x_1\|}{1 - \alpha}$$

Concludiamo la dimostrazione del teorema con alcuni ragionamenti cercando di illustrare, in casi più semplici, alcuni argomenti che abbiamo utilizzato. Innanzitutto consideriamo una situazione particolarmente semplice ambientando il primo esempio nello spazio metrico completo $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. In questo contesto possiamo identificare un'applicazione da \mathbb{R} in sé come una funzione di una variabile reale, quindi una contrazione è una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{con } L < 1 \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$

Un punto fisso di f è una soluzione dell'equazione $x = f(x)$ o, in maniera equivalente, del sistema

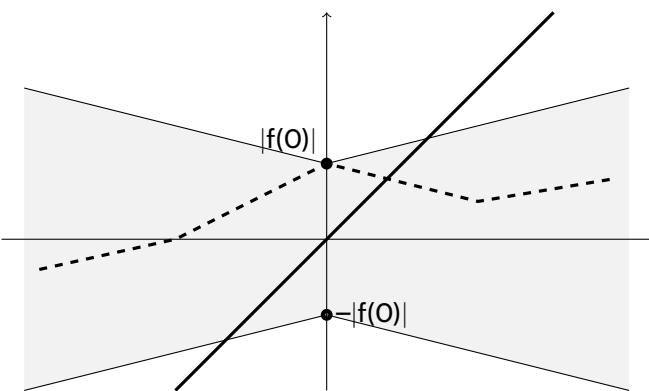
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

in questo modo possiamo osservare che gli eventuali punti fissi della funzione f sono punti comuni ai grafici delle due funzioni che compongono il sistema precedente. Perché un tale sistema dovrebbe avere un'unica soluzione, a patto che f sia una contrazione?

Le proprietà del valore assoluto, unitamente alla scelta $y = 0$ nella definizione di contrazione, ci permettono di scrivere che

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq L|x - 0| = L|x| \quad \text{cioè} \quad |f(x)| \leq |f(0)| + L|x| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

la situazione descritta dalle diseguaglianze precedenti è schematizzata nella figura 5. Osserviamo che stiamo supponendo che $f(0) \neq 0$, altrimenti $f(0) = 0$ e avremmo già trovato un punto fisso.



La diseguaglianza implica che il grafico della funzione f deve trovarsi nella regione grigia e deve passare per uno dei due punti evidenziati di coordinate $(0, \pm|f(0)|)$, il grafico della retta $y = x$ è la linea nera continua ed è facile convincersi che non è possibile evitare l'intersezione tra i due grafici, questo perché il bordo della zona colorata ha pendenza $\pm L$ con $L < 1$ e quindi non c'è spazio sufficiente che permetta ai due grafici di evitarsi.

2 ANALISI DIFFERENZIALE

Introduzione

2.1 funzioni scalari e vettoriali

DEFINIZIONE 2.1 (Continuità di funzioni scalari) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dove A è un aperto, e $p \in A$. Diremo che f è continua in p se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, f, p) > 0$ tale che*

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|x - p\| < \delta$$

DEFINIZIONE 2.2 (Continuità di funzioni vettoriali) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, con A aperto, e $p \in A$. Diremo che f è continua in p se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon, f, p) > 0$ tale che*

$$\|f(x) - f(p)\|_k < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|x - p\|_n < \delta$$

OSSERVAZIONE 2.3 Una funzione a valori vettoriali $(f_1, \dots, f_k) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è continua in un punto p se e soltanto se ogni funzione "componente" $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, per $i = 1, \dots, k$.

DEFINIZIONE 2.4 *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto, e $p \in A$. Diremo che f possiede derivata nella direzione $w \in \mathbb{R}^n$ se esiste finito il seguente limite*

$$\partial_w f(p) = \frac{\partial f}{\partial w}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hw) - f(p)}{h}$$

Nel caso in cui $w = e_i$ la derivata direzionale viene detta derivata parziale, e viene indicata con una delle seguenti notazioni

$$\partial_i f(p) = \partial_{x_i} f(p) = \partial_{e_i} f(p) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = f_{x_i}(p) \quad \text{peri} = 1, \dots, n$$

DEFINIZIONE 2.5 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto, e $p \in A$. Diremo che f è differenziabile in p se esiste $L = L(f, p) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - [f(p) + L \cdot h]}{\|h\|} = 0$$

ovvero

$$f(p+h) = f(p) + L \cdot h + o(\|h\|) \quad \text{dove} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$$

Diremo che f è differenziabile in A se è differenziabile in tutti i punti dell'aperto.

DEFINIZIONE 2.6 Introduciamo il seguente operatore differenziale vettoriale

$$\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$$

che in seguito verrà chiamato nabla.

OSSERVAZIONE 2.7 (Conseguenze della differenziabilità) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora valgono le seguenti affermazioni:

i. f è continua in A , infatti, per ogni $p \in A$ abbiamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(p+h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(p) + L \cdot h + o(\|h\|)] = f(p)$$

ii. La funzione f è derivabile in A e, per ogni $p \in A$, si ha $L = \nabla f(p)$. Infatti possiamo scrivere che

$$\partial_i f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h e_i) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_i h + o(h)}{h} = L_i \quad \text{peri} = 1, \dots, n$$

Introducendo la quantità

$$R(p+h) = f(p+h) - f(p) - \nabla f(p) \cdot h$$

possiamo affermare che

$$f \text{ è differenziabile in } p \quad \text{se e solo se} \quad R(p+h) = o(\|h\|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

iii. La funzione f possiede derivate direzionali in A e si ha

$$(2.1) \quad \partial_w f(p) = \nabla f(p) \cdot w$$

Infatti, dalla definizione di differenziabilità e dal punto precedente, segue che

$$\partial_w f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hw) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \nabla f(p) \cdot w + o(h)}{h} = \nabla f(p) \cdot w$$

iv. Il vettore $\nabla f(p)$, se non è nullo, identifica la direzione di massima (e minima) crescita della funzione. Infatti dalla (2.1), per la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz, segue che

$$|\partial_w f(p)| = |\nabla f(p) \cdot w| = \|\nabla f(p)\| \cdot \|w\| \cdot |\cos(\theta)| \leq \|\nabla f(p)\| \cdot \|w\| = |\nabla f(p)|$$

ricordando che w è un versore. La precedente maggiorazione implica che

$$-\|\nabla f(p)\| \leq \partial_w f(p) \leq \|\nabla f(p)\|$$

e il segno di uguaglianza è verificato se e solo se i vettori $\nabla f(p)$ e w sono paralleli. Se $w = \nabla f(p)/\|\nabla f(p)\|$ allora la derivata direzionale è massima, se $w = -\nabla f(p)/\|\nabla f(p)\|$ la derivata direzionale è minima.

v. Se $p \in A$, la funzione f possiede iperpiano tangente al suo grafico nel punto di coordinate $(p, f(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$. L'equazione cartesiana dell'iperpiano tangente è

$$x_{n+1} = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

ESEMPIO 2.8 Notiamo che la sola esistenza delle derivate parziali non basta a concludere che f è continua. Per esempio, la funzione di due variabili

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{se } x_1 x_2 \neq 0 \\ 1 & \text{se } x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

non è continua in $(0, 0)$ pur esistendo le derivate parziali prime $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$.

Notiamo anche che la continuità e l'esistenza delle derivate parziali non garantiscono la differenziabilità. Come esempio, consideriamo $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, f è continua in $(0, 0)$ e ha derivate parziali $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$. Però f non è differenziabile nell'origine perché non esiste il limite

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(h)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Infatti muovendosi lungo la direzione $h_1 = h_2$ oppure lungo gli assi coordinati si ottengono valori diversi.

A questo punto è lecito chiedersi cosa si può dedurre dall'esistenza della derivate parziali, il seguente risultato prova che condizione sufficiente affinché una funzione sia differenziabile è che le derivate parziali non solo esistano ma siano continue.

TEOREMA 2.9 (del differenziale totale) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto, se esistono continue le derivate parziali di f in A allora la funzione è differenziabile nell'aperto.*

Sinteticamente: se $f \in C^1(A)$, allora f è differenziabile in A .

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema nel caso $n = 2$. Per $p \in A$ scriviamo

$$f(p+h) - f(p) = f(p_1 + h_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2 + h_2) + f(p_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2)$$

Per il teorema del valor medio (Lagrange) esisterà un punto q_1 compreso tra p_1 e $p_1 + h_1$ tale che

$$f(p_1 + h_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2 + h_2) = \partial_1 f(q_1, p_2 + h_2)h_1$$

Analogamente esisterà un punto q_2 compreso tra p_2 e $p_2 + h_2$ tale che

$$f(p_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2) = \partial_2 f(p_1, q_2)h_2$$

Quindi

$$f(p+h) - f(p) - \nabla f(p) \cdot h = (\partial_1 f(q_1, p_2 + h_2) - \partial_1 f(p_1, p_2))h_1 + (\partial_2 f(p_1, q_2) - \partial_2 f(p_1, p_2))h_2$$

Abbiamo allora

$$\frac{|f(p+h) - f(p) - \nabla f(p) \cdot h|}{\|h\|} \leq |\partial_1 f(q_1, p_2 + h_2) - \partial_1 f(p_1, p_2)| \frac{h_1}{\|h\|} + |\partial_2 f(p_1, q_2) - \partial_2 f(p_1, p_2)| \frac{h_2}{\|h\|} \leq |\partial_1 f(q_1, p_2 + h_2) - \partial_1 f(p_1, p_2)| + |\partial_2 f(p_1, q_2) - \partial_2 f(p_1, p_2)|$$

Per la continuità delle derivate parziali di f

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} (\partial_1 f(q_1, p_2 + h_2) - \partial_1 f(p_1, p_2)) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} (\partial_2 f(p_1, q_2) - \partial_2 f(p_1, p_2)) = 0$$

da cui si deduce che

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(p+h) - f(p) - \nabla f(p) \cdot h|}{\|h\|} = 0$$

che implica alla tesi. ■

Se indichiamo con $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici a coefficienti reali con k righe e n colonne, possiamo presentare il seguente concetto

DEFINIZIONE 2.10 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $p \in A$. Diremo che f è differenziabile in p se esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{\|h\|_n \rightarrow 0} \frac{\|f(p+h) - (f(p) + Mh)\|_k}{\|h\|_n} = 0$$

che possiamo scrivere, in maniera equivalente, anche nel seguente modo

$$f(p+h) = f(p) + Mh + o(\|h\|) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

OSSERVAZIONE 2.11 Dato che un vettore di \mathbb{R}^k tende a zero se e solo se tutte le sue componenti tendono a zero possiamo dire che f è differenziabile se e solo se lo sono le sue componenti f_1, \dots, f_k .

Indicando con Jf lo jacobiano (cioè la matrice Jacobiana) di f definita come

$$(Jf(p))_{ik} = \partial_k f_i(p) \quad \text{con } i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$$

si ha che nella definizione 2.10 vale $M = Jf(p)$.

DEFINIZIONE 2.12 L'uso formale dell'operatore nabla ci permette di definire alcuni operatori differenziali che operano su campi scalari o vettoriali di classe C^1 , o più. Tali operatori avranno un ruolo importante nelle pagine che seguiranno.

gradiante	seu $\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	abbiamo	$\nabla u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\nabla u(p) := (\partial_1 u(p), \dots, \partial_n u(p))$
divergenza	seu $\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$	abbiamo	$\nabla \cdot u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $(\nabla \cdot u)(p) := \partial_1 u_1(p) + \dots + \partial_n u_n(p)$
jacobiano	seu $\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$	abbiamo	$Ju : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ con $Ju(p) := (\partial_k u_i(p))_{ik}$
rotore	seu $\in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$	abbiamo	$\nabla \wedge u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $(\nabla \wedge u)(p) := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)(p)$

TEOREMA 2.13 (differenziale di funzioni composte) Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$, con $B \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto e $f(A) \subseteq B$, due funzioni differenziabili (rispettivamente) in $p \in A$ e in $f(p) \in B$. Allora definita la funzione $h : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ come $h(p) := g(f(p))$, abbiamo che h è differenziabile in p e vale

$$Jh(p) = Jg(f(p))Jf(p)$$

ovvero

$$(Jh(p))_{ik} = \partial_k h_i(p) = \sum_{s=1}^k \partial_s g_i(f(p)) \partial_k f_s(p) \quad i = 1, \dots, p, k = 1, \dots, n$$

Si noti che

$$Jh \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad Jg \in \mathfrak{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \quad Jf \in \mathfrak{M}_{k,n}(\mathbb{R})$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo il significato delle ipotesi: la funzione g è differenziabile in z se

$$g(q) = g(z) + Jg(z)(q - z) + o(\|q - z\|)$$

Ponendo $q = f(p + s)$ e $z = f(p)$ otteniamo

$$g(f(p + s)) = g(f(p)) + Jg(f(p))(f(p + s) - f(p)) + o(\|f(p + s) - f(p)\|)$$

D'altra parte, per la differenziabilità di f abbiamo che

$$(2.2) \quad f(p + s) = f(p) + Jf(p)s + o(\|s\|)$$

da cui segue

$$g(f(p+s)) = g(f(p)) + Jg(f(p))Jf(p)s + Jg(f(p))o(\|s\|) + o(\|f(p+s) - f(p)\|)$$

Per concludere la dimostrazione dobbiamo mostrare che

$$\lim_{\|s\| \rightarrow 0} \frac{Jg(f(p))o(\|s\|) + o(\|f(p+s) - f(p)\|)}{\|s\|} = 0$$

È evidente che

$$\frac{Jg(f(p))o(\|s\|)}{\|s\|} = Jg(f(p)) \frac{o(\|s\|)}{\|s\|} \rightarrow 0 \quad \text{per } \|s\| \rightarrow 0$$

D'altra parte, tenuto conto della (2.2), vale anche

$$\|f(p+s) - f(p)\| \leq \|Jf(p)s\| + o(\|s\|) \leq \|Jf(p)\| \cdot \|s\| + o(\|s\|) \leq C\|s\|$$

con C costante positiva. Con $\|A\|$ abbiamo indicato la norma di Frobenius della matrice $A \in \mathbb{M}_{k,n}$, cioè la quantità

$$\|A\| := \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

Quindi

$$\frac{o(\|f(p+s) - f(p)\|)}{\|s\|} = \frac{o(\|f(p+s) - f(p)\|)}{\|f(p+s) - f(p)\|} \cdot \frac{\|f(p+s) - f(p)\|}{\|s\|} \rightarrow 0 \quad \text{per } \|s\| \rightarrow 0$$

perché prodotto di una quantità infinitesima, per definizione di o piccolo, e di una quantità limitata. Concludiamo che

$$g(f(p+s)) = g(f(p)) + Jg(f(p))Jf(p)s + o(\|s\|) \quad \text{per } \|s\| \rightarrow 0$$

■

ESEMPIO 2.14 Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di componenti $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e sia $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione composta $F(t) = g(x(t), y(t), z(t))$, discende dal precedente risultato che se f e g sono differenziabili allora lo è anche F e si ha

$$F'(t) = \nabla g(f(t)) \cdot f'(t) = \partial_1 g(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \partial_2 g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \partial_3 g(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

ESEMPIO 2.15 Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : B \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti e $h(B) \subseteq A$ due funzioni differenziabili. Consideriamo la funzione composta $F(u, v) := f(x(u, v), y(u, v)) : B \rightarrow \mathbb{R}$. Allora la funzione F è differenziabile in B e si ha

$$\begin{aligned} \nabla F(u, v) &= (\partial_1 F(u, v), \partial_2 F(u, v)) = \nabla f(x(u, v), y(u, v))Jg(u, v) = (\partial_1 f(x(u, v), y(u, v)), \partial_2 f(x(u, v), y(u, v))) \begin{pmatrix} \partial_1 x(u, v) & \partial_2 x(u, v) \\ \partial_1 y(u, v) & \partial_2 y(u, v) \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1 f(x(u, v), y(u, v))\partial_1 x(u, v) + \partial_2 f(x(u, v), y(u, v))\partial_1 y(u, v), \partial_1 f(x(u, v), y(u, v))\partial_2 x(u, v) + \partial_2 f(x(u, v), y(u, v))\partial_2 y(u, v)) \end{aligned}$$

2.2 derivate successive

Analogamente al caso di funzioni di una variabile reale, è possibile definire derivate successive anche per funzioni vettoriali.

DEFINIZIONE 2.16 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, chiameremo derivate parziali del secondo ordine di f (se esistono) le funzioni*

$$\partial_{ij}f(x) := \partial_j(\partial_i f(x)) \quad i, j = 1, \dots, n$$

Segue dalla precedente definizione che una funzione di due variabili ha 4 derivate seconde

$$\partial_{11}f(x) \quad \partial_{12}f(x) \quad \partial_{21}f(x) \quad \partial_{22}f(x)$$

mentre una funzione di tre variabili ha addirittura 9 derivate seconde

$$\partial_{11}f(x) \quad \partial_{12}f(x) \quad \partial_{13}f(x) \quad \partial_{21}f(x) \quad \partial_{23}f(x) \quad \partial_{31}f(x) \quad \partial_{32}f(x) \quad \partial_{33}f(x)$$

in generale una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, può avere n^2 derivate seconde.

Non sempre è possibile scambiare l'ordine in cui si eseguono le derivate, per esempio, consideriamo

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Si ha

$$\partial_{12}f(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial_1 f(0, k) - \partial_1 f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = -1$$

$$\partial_{21}f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(h, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = 1$$

da cui segue che

$$\partial_{21}f(0, 0) \neq \partial_{12}f(0, 0)$$

Il seguente teorema ci assicura però che, per funzioni di classe C^2 , le derivate non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le operazioni di derivazione.

TEOREMA 2.17 (di K.H.A. Schwarz) *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione di classe C^2 , cioè derivabile due volte con derivate seconde continue, allora vale*

$$\partial_{ij}f(x) = \partial_{ji}f(x) \quad \text{per } i, j = 1, \dots, n$$

DEFINIZIONE 2.18 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 , con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, allora possiamo definire la matrice delle derivate seconde

$$Hf(x) = (h_{ij}(x))_{ij} = (\partial_{ij} f(x))_{ij} \quad \text{peri, } j = 1, \dots, n$$

che chiameremo matrice hessiana. Il teorema di Schwarz può essere enunciato dicendo che la matrice hessiana è simmetrica.

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile nell'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora possiede un iperpiano tangente in tutti i punti del suo grafico, il che equivale a dire che ha uno sviluppo lineare (cioè vale la formula di Taylor al primo ordine)

$$f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + o(\|x - p\|) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{o(\|x - p\|)}{\|x - p\|} = 0$$

Se f è una funzione di classe C^2 possiamo, come è ragionevole pensare, migliorare l'approssimazione: consideriamo la funzione di una variabile

$$F(t) := f(p) + t(x - p) \quad \text{pert } t \in [0, 1]$$

Dato che $F \in C^2([0, 1])$ possiamo scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine per funzioni di una variabile, ottenendo

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta) \quad \text{con } \theta \in (0, 1)$$

Per la formula di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$F'(t) = \nabla f(p + t(x - p)) \cdot (x - p) \quad \text{e} \quad F''(t) = Hf(p)(x - p) \cdot (x - p)$$

da cui segue, in termini di funzione f , la formula di Taylor del primo ordine con resto di Lagrange

$$(2.3) \quad f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(Hf(\xi)(x - p) \cdot (x - p)) \quad \text{con } \xi = p + \theta(x - p)$$

Facciamo vedere che dalla (2.3) discende la formula di Taylor del secondo ordine con resto di Peano

$$(2.4) \quad f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(Hf(p)(x - p) \cdot (x - p)) + o(\|x - p\|^2)$$

dove vale

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{o(\|x - p\|^2)}{\|x - p\|^2} = 0$$

La (2.4) segue dalla (2.3) se dimostriamo che

$$(2.5) \quad ((Hf(\xi) - Hf(p))(x - p)) \cdot (x - p) = o(\|x - p\|^2)$$

Infatti, dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ricaviamo per una generica matrice M che

$$|Mx \cdot x| = \left| \sum_{i,j}^{1,n} M_{ij} x_i x_j \right| \leq \|M\| \cdot \|x\|^2 \quad \text{dove } \|M\| := \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n |M_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

Quindi, nel nostro caso otteniamo

$$|(Hf(\xi) - Hf(x)) \cdot (x - p)| \leq \varepsilon \|x - p\|^2 \quad \text{con} \quad \varepsilon = \left[\sum_{i,j}^{1,n} (\partial_{ij} f(\xi) - \partial_{ij} f(p))^2 \right]^{1/2}$$

e dalla continuità delle derivate seconde segue la (2.5).

OSSERVAZIONE 2.19 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso (per archi) tale che $\nabla f \equiv 0$, allora

$$f(p) = f(q) \quad \text{per ogni } p, q \in A$$

Se così non fosse potremmo costruire una curva regolare di parametrizzazione $\phi : [0, 1] \rightarrow A$ congiungente i punti p e q tali che $f(p) \neq f(q)$. Allora (per il teorema di Lagrange e per il teorema di derivazione delle funzioni composte) seguirebbe

$$0 \neq f(p) - f(q) = f(\phi(0)) - f(\phi(1)) = \left[\frac{d}{dt} f(\phi(t)) \right]_{t=\xi} = \nabla f(\phi(\xi)) \cdot \phi'(\xi) = 0 \cdot \phi'(\xi) = 0$$

perché $\phi(\xi) \in A$.

2.3 punti critici

DEFINIZIONE 2.20 Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 , con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, allora si dice che $p \in A$ è un punto critico (o stazionario) per f se

$$\nabla f(p) = 0$$

TEOREMA 2.21 (di P. Fermat) Sia $p \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ (insieme aperto) un punto di massimo o minimo locale per f , se f è differenziabile in p allora $\nabla f(p) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Fissata una direzione w , la funzione di una variabile $F(t) := f(p + tw)$ ha in $t = 0$ un punto di massimo o minimo locale. Dato che $F(t)$ è differenziabile in $t = 0$ deve necessariamente essere $F'(0) = \partial_w f(p) = \nabla f(p) \cdot w = 0$. Per l'arbitrarietà di w segue che $\nabla f(p) = 0$. ■

Per stabilire se un punto critico p è un estremo relativo è necessario studiare il segno della differenza $f(x) - f(p)$, e spesso è conveniente farlo usando la formula di Taylor. Ciò conduce a studiare il segno della forma quadratica associata alla matrice hessiana $Hf(p)$

$$Hf(p)w \cdot w = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}f(p)w_i w_j \quad \text{con } w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$$

Richiamiamo alcune definizioni e proprietà delle forme quadratiche.

DEFINIZIONE 2.22 *Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $p \in A$, si dice che l'hessiano $Hf(p)$ è una matrice*

- i. *definita positiva se $Hf(p)w \cdot w > 0$, per ogni vettore $w \neq 0$,*
- ii. *definita negativa se $Hf(p)w \cdot w < 0$, per ogni vettore $w \neq 0$,*
- iii. *semidefinita positiva se $Hf(p)w \cdot w \geq 0$, per ogni $w \in \mathbb{R}^n$,*
- iv. *semidefinita negativa se $Hf(p)w \cdot w \leq 0$, per ogni $w \in \mathbb{R}^n$,*
- v. *indefinita se esistono $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $Hf(p)w_1 \cdot w_1 > 0$ e $Hf(p)w_2 \cdot w_2 > 0$.*

TEOREMA 2.23 (di J.J. Sylvester) *Indichiamo con $H^{(k)}$ il minore principale di ordine $k \leq n$ estratto dalla matrice $Hf(p)$, cioè la sottomatrice composta dalle prime k righe e k colonne. Allora*

- i. *$Hf(p)$ è definita positiva se e solo se $|H^{(k)}| = \det[H^{(k)}] > 0$, per ogni $k = 1, \dots, n$,*
- ii. *$Hf(p)$ è definita negativa se e solo se $(-1)^k |H^{(k)}| > 0$, per ogni $k = 1, \dots, n$,*
- iii. *$Hf(p)$ è indefinita se ha un minore principale di ordine pari con determinante negativo oppure se ha due diversi minori principali di ordine dispari che sono discordi.*

TEOREMA 2.24 (test degli autovalori)

- i. *$Hf(p)$ è definita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi,*
- ii. *$Hf(p)$ è definita negativa se e solo se tutti i suoi autovalori sono negativi,*
- iii. *$Hf(p)$ è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi autovalori sono non negativi,*
- iv. *$Hf(p)$ è definita negativa se e solo se tutti i suoi autovalori sono non positivi,*
- v. *$Hf(p)$ è indefinita se e solo se ha almeno due autovalori non nulli e discordi.*

OSSERVAZIONE 2.25 Per stabilire se una matrice è definita, semidefinita o indefinita non serve conoscere gli autovalori, ma basta conoscere il loro segno. È quindi utile ricordare la regola dei segni di Cartesio.

È anche utile sapere che

PROPOSIZIONE 2.26 *$Hf(p)$ è definita positiva se e solo esiste $m > 0$ tale che $Hf(p)w \cdot w \geq m\|w\|^2$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$. $Hf(p)$ è definita negativa se e solo esiste $m > 0$ tale che $Hf(p)w \cdot w \leq -m\|w\|^2$.*

Un'altra condizione necessaria oltre al teorema di Fermat è data dal seguente

TEOREMA 2.27 *Siano $f \in C^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e $p \in A$ un punto critico, allora*

- se p è un punto di minimo locale, allora $Hf(p)$ è una matrice semidefinita positiva,*
- se p è un punto di massimo locale, allora $Hf(p)$ è una matrice semidefinita negativa.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il caso i, il caso ii segue considerando la funzione $g(x) = -f(x)$ che ha un minimo locale in p . Per la formula di Taylor con resto di Peano possiamo scrivere che

$$f(p) \leq f(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2} (Hf(p)(x - p) \cdot (x - p)) + o(\|x - p\|^2)$$

essendo p un punto critico vale $\nabla f(p) = 0$, e otteniamo che

$$Hf(p)(x - p) \cdot (x - p) \geq o(\|x - p\|^2)$$

Posto $x - p = tw$, con $\|w\| = 1$ la precedente relazione equivale a scrivere

$$Hf(p)w \cdot w \geq \frac{o(t^2)}{t^2}$$

E per $t \rightarrow 0$ si ottiene $Hf(p)w \cdot w \geq 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, cioè la matrice hessiana è semidefinita positiva nel punto p . ■

TEOREMA 2.28 (test dell'hessiano) *Siano $f \in C^2(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e $p \in A$ un punto critico della funzione, allora*

- se $Hf(p)$ è una matrice indefinita allora p è una sella,*
- se $Hf(p)$ è una matrice definita positiva (cioè ha solo autovalori positivi), allora p è un punto di minimo locale,*
- se $Hf(p)$ è una matrice definita negativa (cioè ha solo autovalori negativi), allora p è un punto di massimo locale.*

DIMOSTRAZIONE. i. Se $Hf(p)$ è indefinita, per il teorema precedente p non è né un punto di massimo né un punto di minimo.
ii. Per la proposizione 2.26 esiste $m > 0$ tale che $Hf(p)w \cdot w \geq m\|w\|^2$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, dalla formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) - f(p) = \frac{1}{2} (Hf(p)(x - p) \cdot (x - p)) + o(\|x - p\|^2) \geq \frac{m}{2} \|x - p\|^2 + o(\|x - p\|^2) = \left(\frac{m}{2} + o(1)\right) \|x - p\|^2$$

Sia $\delta > 0$ tale che, per $\|x - p\| < \delta$, si abbia $m/2 + o(1) > 0$, allora segue che $f(x) > f(p)$ per $0 < \|x - p\| < \delta$ cioè p è un punto di minimo locale stretto. Il caso iii si tratta in maniera analoga. ■

Se $Hf(p)$ è semidefinita, positiva o negativa, non si può concludere nulla. Per esempio, $O(0, 0)$ è punto stazionario sia per $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ che per $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ e, in entrambi i casi, la matrice hessiana nell'origine è semidefinita positiva. Si verifica facilmente che l'origine O è punto di minimo (assoluto) per f e punto di sella per g .

inserire un paio di grafici?

TEOREMA 2.29 (di K.T.W. Weierstrass) *Sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto. Allora esistono due punti $p, q \in K$ tali che*

$$\min_K(f) = f(p) \leq f(x) \leq f(q) = \max_K(f) \quad \text{per ogni } x \in K$$

DIMOZRAZIONE. Sia $\{p_j\}$ una successione minimizzante, cioè una successione tale che

$$\{p_j\} \subseteq K \quad \text{e} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} f(p_j) = \inf_{x \in K} f(x)$$

Osserviamo che sotto la sola condizione $K \neq \emptyset$ esistono successioni minimizzanti. Infatti, posto $m := \inf_{x \in K} f(x) > -\infty$, dalla definizione di estremo inferiore segue che per ogni $j = 1, 2, \dots$ esiste $y_j \in f(K)$ tale che $m \leq y_j \leq m + \frac{1}{j}$. Ogni successione $\{p_j\}$ tale che

$$\{p_j\} \subseteq K \quad \text{e} \quad f(p_j) = y_j \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

è dunque una successione minimizzante (il caso che $\inf_{x \in K} f(x) = -\infty$ si tratta in maniera simile). Osserviamo che non è detto che la successione minimizzante $\{p_j\}$ converga. Dato che K è compatto, cioè chiuso e limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{p_{j(k)}\}$ convergente a $p \in K$ per $k \rightarrow +\infty$. Per la continuità di f si ha dunque

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(p_{j(k)}) = f(p)$$

D'altra parte, per definizione di successione minimizzante, si ha anche

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(p_j) = m = \inf_{x \in K} f(x)$$

e si conclude dunque che

$$f(p) = m = \min_{x \in K} f(x)$$

Lo stesso ragionamento è vero per il punto di massimo q . ■

TEOREMA 2.30 (di K.T.W. Weierstrass) *Sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso. Se f è coercitiva, cioè se vale la seguente condizione,*

$$\lim_{\substack{x \in K \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} f(x) = +\infty$$

allora esiste $p \in K$ tale che

$$\min_K f = f(p)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia p_j una successione minimizzante per f in K . Se $\{p_j\}$ non fosse limitata, a meno di sottosuccessioni, avremmo che $\|p_j\| \rightarrow \infty$ e dalla ipotesi di coercività si avrebbe allora l'assurdo che

$$\inf_K f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(p_j) = +\infty$$

Quindi $\{p_j\}$ è una successione limitata e si può procedere come nel caso K limitato. ■

OSSERVAZIONE 2.31 I precedenti risultati di Weierstrass propongono alcune ipotesi che si rivelano sufficienti a garantire che f sia dotata di massimo e/o minimo assoluti. Però come è possibile identificare questi punti? Se f è differenziabile e se uno di questi punti q appartiene a K° (l'interno di K), segue dal teorema di Fermat che $\nabla f(q) = 0$. Naturalmente il punto di massimo e/o minimo potrebbe cadere sulla frontiera ∂K del dominio K . Si noti che se $q \in \partial K$ (la frontiera di K) non è vero che il gradiente della funzione nel punto deve essere nullo, quindi avremo bisogno di strumenti differenti per studiare le proprietà dei punti della frontiera.

Per stabilire se un insieme è chiuso è utile conoscere il seguente risultato.

TEOREMA 2.32 (caratterizzazione della continuità) *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, allora vale che*

- i. gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \lambda\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \mu\}$ sono aperti,
- ii. gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \mu\}$ sono chiusi,

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si ricordi che l'unione (qualsiasi) di insiemi aperti produce sempre un aperto e l'intersezione di un numero finito di aperti produce ancora un aperto. L'unione finita di chiusi produce un chiuso, mentre l'intersezione (qualsiasi) di chiusi è sempre un chiuso.

DEFINIZIONE 2.33 *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A \quad \text{per ogni } x, y \in A \text{ e } \lambda \in [0, 1]$$

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto convesso, la funzione f si dice convessa se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \text{per ogni } x, y \in A \text{ e } \lambda \in [0, 1]$$

OSSERVAZIONE 2.34 È possibile mostrare che f è convessa se e solo se l'insieme epigrafico $E_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definito come $E_f := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$ è convesso.

Le funzioni convesse hanno un ruolo importante in ottimizzazione. Infatti se f è convessa in A allora ogni punto di minimo locale è anche di minimo assoluto per f .

OSSERVAZIONE 2.35 Lo studio della matrice hessiana fornisce un criterio per stabilire la convessità di una funzione di più variabili. Richiamiamo brevemente alcune proprietà delle funzioni convesse. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto convesso:

- i. se f è convessa allora f è continua in A ,

ii. se f è differenziabile allora f è convessa se e solo se $f(x) \geq f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$,
 iii. se $f \in C^2(A)$ allora f è convessa in A se e solo se $Hf(x)$ è una matrice semidefinita positiva.

2.4 curve

DEFINIZIONE 2.36 Una curva in \mathbb{R}^3 è un'applicazione $\phi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. La funzione $p = \phi(t)$ è detta una rappresentazione parametrica della curva. Se una delle tre componenti è identicamente nulla allora si ha una curva piana, contenuta in uno dei piani coordinati del sistema di riferimento.

Una curva è continua se ogni sua componente $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ è continua in $[a, b]$.

Una curva è regolare se ogni sua componente è di classe $C^1([a, b])$ e vale

$$\|\phi'(t)\|^2 = [x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + x'_3(t)^2]^{1/2} \neq 0 \quad \text{perognit } \in (a, b)$$

Una curva è regolare a tratti se è continua in $[a, b]$ e se è possibile dividere $[a, b]$ in un numero finito di intervalli chiusi, all'interno dei quali ϕ è regolare, cioè ϕ deve essere un collage continuo di un numero finito di curve regolari.

Una curva ϕ si dice chiusa se $\phi(a) = \phi(b)$, si dice semplice se $\phi(t)$ è iniettiva in (a, b) .

Al variare di $t \in [a, b]$, $\phi(t)$ descrive un insieme $\gamma = \phi([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^3$ detto sostegno della curva.

Due curve $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ si dicono equivalenti se esiste una funzione continua e biunivoca $h : [c, d] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$ tale che

$$\phi(h(t)) = \psi(t) \quad \text{perognit } \in [c, d]$$

OSSERVAZIONE 2.37 Nel caso in cui ϕ e ψ siano due curve equivalenti, possiamo anche dire che ψ è una nuova parametrizzazione della curva ϕ , si noti che due curve equivalenti hanno sempre lo stesso sostegno.

Data una rappresentazione parametrica è automaticamente assegnato un verso di percorrenza sulla curva ovvero una orientazione: $\phi(a)$ è il punto iniziale e $\phi(b)$ è il punto finale della curva.

OSSERVAZIONE 2.38 Per una curva regolare (a tratti) è (quasi) sempre ben definito il vettore $\phi'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$. Interpretando t come il tempo, si può pensare $\phi(t)$ come il vettore posizione di una particella al tempo t ; il sostegno $\gamma = \phi([a, b])$ è la traiettoria del moto; il vettore $\phi'(t)$ è il vettore velocità. Il versore

$$T(t) = \frac{\phi'(t)}{|\phi'(t)|}$$

viene detto versore tangente. La retta tangente alla curva nel punto $p_0 = \phi(t_0)$ ha equazione parametrica

$$(2.6) \quad p(t) = \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0) = p_0 + v(t_0)(t - t_0)$$

A questo punto vogliamo introdurre il concetto di lunghezza per una generica curva (anche se siamo interessati alle curve regolari a tratti, come sarà chiaro più avanti). Come spesso accade la nostra definizione dovrà fare i conti con le lunghezze che abbiamo già definito, cioè dovrà coincidere con la nozione elementare di perimetro di un poligono, visto che i lati di un poligono possono essere interpretati come una curva regolare a tratti.

Data una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ dell'intervallo $[a, b]$, poniamo $p_j = \phi(t_j)$ i punti corrispondenti sulla curva ϕ . La poligonale o spezzata \mathcal{P} di vertici p_0, p_1, \dots, p_k inscritta alla curva ϕ ha lunghezza

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \|p_j - p_{j-1}\| = \sum_{j=1}^k \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\|$$

Nella figura che segue possiamo vedere rappresentato un tratto di curva regolare con una poligonale inscritta e una curva chiusa non semplice, quindi soltanto regolare a tratti.

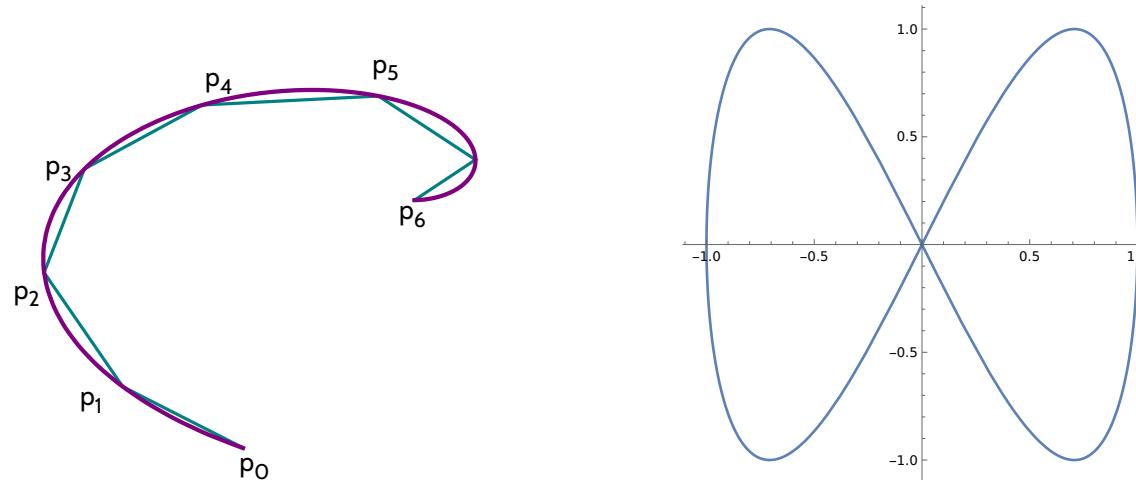


Figura 2: una curva piana semplice (in viola) e una poligonale inscritta (verde) e una curva chiusa regolare a tratti

Sia $L(\phi) := \sup\{L(\mathcal{P}) \text{ al variare delle poligonali } \mathcal{P} \text{ inscritte in } \phi\}$, allora abbiamo

DEFINIZIONE 2.39 Se $L(\phi) < +\infty$ si dice che la curva ϕ è *rettificabile* e si definisce $L(\phi)$ la sua lunghezza.

TEOREMA 2.40 (rettificazione di una curva regolare semplice) *Sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare semplice, allora ϕ è rettificabile e possiamo calcolare la lunghezza della curva nel seguente modo*

$$(2.7) \quad L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)| dt = \int_a^b \left[|x'_1(t)|^2 + |x'_2(t)|^2 + |x'_3(t)|^2 \right]^{1/2} dt$$

È possibile dimostrare che la lunghezza di una curva non dipende dalla rappresentazione parametrica scelta. Se ϕ è una curva regolare a tratti allora ϕ è rettificabile, perché è unione di un numero finito di curve regolari, quindi la lunghezza della curva è la somma (finita) delle lunghezze dei tratti regolari.

ESEMPIO 2.41 Sia $f(x) = x \sin(1/x)$ per $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$. La curva $(t, f(t))$ per $t \in [0, 1]$ non è rettificabile

OSSERVAZIONE 2.42 Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , la curva del piano che ha come sostegno il grafico di f è una curva regolare di equazioni parametriche $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (t, f(t), 0)$, con $t \in [a, b]$. In tal caso si dice che la curva è data in forma cartesiana

$$y = f(x) \quad x \in [a, b] \quad \text{curva in forma cartesiana}$$

La lunghezza del suo grafico è data dalla formula

$$(2.8) \quad L(\phi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Una curva piana in coordinate polari è data dall'equazione

$$\rho = \rho(\theta) \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1] \quad \text{curva in forma polare}$$

che corrisponde all'equazione in forma parametrica

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos(\theta), \rho(\theta) \sin(\theta)) \quad \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

La lunghezza del suo grafico è data dall'espressione

$$(2.9) \quad L(\phi) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta$$

È sempre possibile, tramite un opportuno cambio di variabile, parametrizzare la curva con una particolare variabile s , detta ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_a^t \|\phi'(u)\| du$$

Si ha $s'(t) = \|\phi'(t)\| > 0$ in (a, b) . Quindi $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\phi)]$ è strettamente crescente e quindi invertibile. Indichiamo con $t(s)$ la funzione inversa, $t : [0, L(\phi)] \rightarrow [a, b]$. Posto $\phi_*(s) = \phi(t(s))$ con $s \in [0, L(\phi)]$, la curva ϕ_* è equivalente alla curva ϕ e le curve hanno lo stesso orientamento. Si ha

$$\frac{d\phi_*(s)}{ds} = \frac{d\phi(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\phi'(t(s))}{\|\phi'(t(s))\|}$$

da cui segue

$$\left| \frac{d\phi_*}{ds}(s) \right| = |\dot{\phi}_*(s)| = 1$$

Con $\dot{\phi}_*(s)$ indichiamo la derivata rispetto a s di $\phi_*(s)$.

DEFINIZIONE 2.43 Sia $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata con la sua ascissa curvilinea, e supponiamo che $\phi \in C^2([a, b])$. Indichiamo con $T(s)$ il versore tangente cioè

$$T(s) = \frac{\dot{\phi}(s)}{|\dot{\phi}(s)|} = \dot{\phi}(s) \quad \text{e poiché vale} \quad (\dot{T}(s) \cdot T(s)) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (T(s) \cdot T(s)) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|T(s)\|_2^2 = 0$$

segue che $\dot{T}(s)$ è un vettore ortogonale al versore tangente $T(s)$.

Si definisce la curvatura della curva (nel punto $\phi(s)$) la quantità scalare $\kappa(s) = \|\dot{T}(s)\|$ e il versore normale alla curva il versore $N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \dot{T}(s)$.

A questo possiamo introdurre il vettore $B(s) = T(s) \wedge N(s)$, detto vettore binormale. I versori $T(s)$, $N(s)$ e $B(s)$ costituiscono la terna intrinseca o tetraedro di Frénet nel punto $\phi(s)$, questi versori sono linearmente indipendenti, la terna (T, N, B) è una base dello spazio ed ha la stessa orientazione della terna canonica (e_1, e_2, e_3) .

Si può anche mostrare che $\dot{B}(s) = -\tau(s)N(s)$, introducendo la quantità scalare $\tau(s)$, detta torsione della curva.

2.5 superfici

DEFINIZIONE 2.44 Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ la chiusura di un aperto connesso. Una superficie regolare di \mathbb{R}^3 è un'applicazione $r : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

- r è di classe $C^1(K)$ cioè r è continua in K ed è dotata di derivate parziali continue,
- r è iniettiva all'interno di K ,
- la matrice jacobiana

$$Jr(u_1, u_2) = \frac{\partial r(u_1, u_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{pmatrix} \partial_1 r_1(u_1, u_2) & \partial_2 r_1(u_1, u_2) \\ \partial_1 r_2(u_1, u_2) & \partial_2 r_2(u_1, u_2) \\ \partial_1 r_3(u_1, u_2) & \partial_2 r_3(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in ogni punto dell'interno di K . L'immagine $\Sigma = r(K)$ è un insieme di \mathbb{R}^3 detto sostegno della superficie. Le equazioni

$$x = r(u) \quad \text{cioè} \quad (x_1, x_2, x_3) = (r_1(u_1, u_2), r_2(u_1, u_2), r_3(u_1, u_2)) \quad \text{per ogni } u = (u_1, u_2) \in K$$

si chiamano equazioni parametriche della superficie. Nel seguito identificheremo spesso la superficie r con il suo sostegno Σ .

Se poniamo

$$\partial_1 r(u) = (\partial_1 r_1(u_1, u_2), \partial_1 r_2(u_1, u_2), \partial_1 r_3(u_1, u_2)) \quad \text{e} \quad \partial_2 r(u) = (\partial_2 r_1(u_1, u_2), \partial_2 r_2(u_1, u_2), \partial_2 r_3(u_1, u_2))$$

La condizione iii equivale a richiedere che $\partial_1 r(u)$ e $\partial_2 r(u)$ siano linearmente indipendenti ovvero che sia

$$\partial_1 r(u) \wedge \partial_2 r(u) \neq 0 \quad \text{per ogni } u \in \text{int}(K)$$

OSSERVAZIONE 2.45 Data una funzione $f \in C^1(K)$, possiamo interpretare il suo grafico $x_3 = f(x_1, x_2)$ come una superficie di equazioni parametriche

$$(x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)) \quad u = (u_1, u_2) \in K$$

Poiché $\partial_1 r(u) = (1, 0, \partial_1 f(u))$ e $\partial_2 r(u) = (0, 1, \partial_2 f(u))$ risulta $\partial_1 r \wedge \partial_2 r = (-\partial_1 f(u), -\partial_2 f(u), 1) \neq 0$, quindi la superficie è sempre regolare.

Le curve ottenute fissando una delle due variabili $u_1 = \bar{u}_1$ oppure $u_2 = \bar{u}_2$ di equazioni parametriche

$$p = r(\bar{u}_1, u_2) \quad \text{oppure} \quad p = r(u_1, \bar{u}_2)$$

sono dette linee coordinate e sono delle curve regolari che giacciono sulla superficie.

ESEMPIO 2.46 La sfera di centro p_0 e raggio $R > 0$ di \mathbb{R}^3 ha equazioni parametriche

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_0 + R \sin(\phi) \cos(\theta), y_0 + R \sin(\phi) \sin(\theta), z_0 + R \cos(\phi))$$

con $u = (\phi, \theta) \in K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. È una superficie regolare dato che si ha

$$\|\partial_1 r(u) \wedge \partial_2 r(u)\|_2 = R^2 \sin(\phi) > 0 \quad \text{in } (0, \pi)$$

In questo caso le linee coordinate $\phi = \bar{\phi}$ rappresentano i paralleli, mentre le linee coordinate $\theta = \bar{\theta}$ rappresentano i meridiani, usando un linguaggio di tipo geografico.

Consideriamo una curva regolare γ con sostegno contenuto in $K \subseteq \mathbb{R}^2$, di equazioni parametriche

$$\gamma : \phi(t) = (u_1(t), u_2(t)) \quad \text{cont} \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

passante per $(u_{0,1}, u_{0,2}) = (u_1(t_0), u_2(t_0))$. La curva regolare ottenuta componendo la parametrizzazione di ϕ con la parametrizzazione di una superficie regolare r (definita su K), cioè $\Phi(t) = r(u_1(t), u_2(t))$ ha sostegno contenuto in Σ , il sostegno della superficie r , passa per il punto $p_0 = r(u_{0,1}, u_{0,2})$ e ha come retta tangente nel punto p_0 la retta di equazione parametrica

$$(p - p_0) = \left[\frac{d}{dt} r(u_1(t), u_2(t)) \right]_{t=t_0} (t - t_0)$$

Per la formula di derivazione delle funzioni composte vale

$$\frac{d}{dt} r(u(t)) = \partial_1 r(u_1(t), u_2(t)) u'_1(t) + \partial_2 r(u_1(t), u_2(t)) u'_2(t)$$

quindi il vettore tangente è contenuto nel piano passante per p_0 generato dai vettori linearmente indipendenti $\partial_1 r(u_{0,1}, u_{0,2})$ e $\partial_2 r(u_{0,1}, u_{0,2})$ ovvero nel piano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - x_{0,1} & x_2 - x_{0,2} & x_3 - x_{0,3} \\ \partial_1 r_1(u_{0,1}, u_{0,2}) & \partial_1 r_2(u_{0,1}, u_{0,2}) & \partial_1 r_3(u_{0,1}, u_{0,2}) \\ \partial_2 r_1(u_{0,1}, u_{0,2}) & \partial_2 r_2(u_{0,1}, u_{0,2}) & \partial_2 r_3(u_{0,1}, u_{0,2}) \end{pmatrix} = 0$$

Il piano tangente introdotto non dipende dalla particolare curva γ . Dato che qualunque curva regolare tracciata su Σ e passante per p_0 può esprimersi localmente nella forma $p = r(u_1(t), u_2(t))$, il piano di sopra contiene tutte le rette tangenti a ogni curva regolare sulla superficie passante per p_0 . Tale piano si dice piano tangente a Σ nel punto p_0 .

Il vettore $\partial_1 r(u) \wedge \partial_2 r(u)$ è ortogonale al piano tangente, il corrispondente versore

$$n = \frac{\partial_1 r(u) \wedge \partial_2 r(u)}{\|\partial_1 r(u) \wedge \partial_2 r(u)\|_2}$$

è detto versore normale alla superficie.

OSSERVAZIONE 2.47 Nel caso di superfici in forma cartesiana $x_3 = f(x_1, x_2)$, il piano tangente alla superficie nel punto $(x_{0,1}, x_{0,2}, f(x_{0,1}, x_{0,2}))$ ha equazione

$$x_3 = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = f(x_{0,1}, x_{0,2}) + \partial_1 f(x_{0,1}, x_{0,2})(x_1 - x_{0,1}) + \partial_2 f(x_{0,1}, x_{0,2})(x_2 - x_{0,2})$$

e ha versore normale

$$n = \frac{(-\partial_1 f(x_0), -\partial_2 f(x_0), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x_0)\|_2^2}}$$

È facile osservare che anche $-n$ è un versore normale alla superficie. La scelta di uno dei due versori $\pm n$ è legata al concetto di orientazione di una superficie.

Oltre che in forma parametrica o cartesiana le superfici possono essere date in forma implicita. Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $F \in C^1(A)$. Sia Σ l'insieme di livello $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, se $(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) \in \Sigma$ e $\nabla F(x_0) \neq 0$ allora Σ coincide localmente con una superficie in forma cartesiana. Si noti che questa affermazione è, al momento, decisamente immotivata, perché non disponiamo di risultati e strumenti con cui provarla! Ritorneremo più avanti su questo problema. Analogamente a quanto scritto prima l'equazione del piano tangente a Σ in $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})$ è

$$\nabla F(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \quad \text{o anche} \quad \partial_1 F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})(x_1 - x_{0,1}) + \partial_2 F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})(x_2 - x_{0,2}) + \partial_3 F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3})(x_3 - x_{0,3}) = 0$$

Consideriamo ancora la curva γ tracciata su Σ . L'ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d}{dt} r(u_1(\tau), u_2(\tau)) \right| d\tau$$

rappresenta la lunghezza dell'arco descritto da $r(u_1(\tau), u_2(\tau))$, per $\tau \in [a, t]$. Si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= \left\| \frac{d}{dt} r(u_1(t), u_2(t)) \right\|_2^2 = \|\partial_1 r(u_1(t), u_2(t)) u'_1(t) + \partial_2 r(u_1(t), u_2(t)) u'_2(t)\|_2^2 \\ &= \|\partial_1 r(u_1(t), u_2(t))\|_2^2 |u'_1(t)|^2 + 2(\partial_1 r(u_1(t), u_2(t)) \cdot \partial_2 r(u_1(t), u_2(t))) u'_1(t) u'_2(t) + \|\partial_2 r(u_1(t), u_2(t))\|_2^2 |u'_2(t)|^2 \end{aligned}$$

Ponendo

$$E(u) = \|\partial_1 r(u_1, u_2)\|_2^2 \quad F(u) = \partial_1 r(u_1, u_2) \cdot \partial_2 r(u_1, u_2) \quad G(u) = \|\partial_2 r(u_1, u_2)\|_2^2$$

si ricava la seguente formula

$$ds^2 = E(u)du_1^2 + 2F(u)du_1du_2 + G(u)du_2^2$$

che esprime il quadrato del differenziale dell'arco su una superficie. La forma quadratica

$$I(u) = E(u_1, u_2)du_1^2 + 2F(u_1, u_2)du_1du_2 + G(u_1, u_2)du_2^2$$

prende il nome di prima forma quadratica fondamentale della superficie ed esprime, codifica in termini quantitativi alcune delle proprietà geometriche della superficie stessa.

2.6 il teorema delle funzioni implicite

ESEMPIO 2.48 Sia $\mathbb{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : N(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $F(x) = Dx \cdot x$, con $D \in \mathbb{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ matrice diagonale $M = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$ con $c_1 < c_2 < c_3$. Si provi che esistono $p, q \in \mathbb{S}^2$ tali che

$$F(p) = \max_{x \in \mathbb{S}^2} [F(x)] \quad \text{e} \quad F(q) = \min_{x \in \mathbb{S}^2} [F(x)]$$

e si identifichino tali punti.

Prima di tutto notiamo che la sfera unitaria, cioè il nostro vincolo \mathbb{S}^2 , è un insieme limitato (per definizione) e chiuso in quanto controimmagine del chiuso $\{O\} \subseteq \mathbb{R}$, e poiché la funzione F è continua in tutto \mathbb{R}^3 , essendo di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di (almeno) un punto di massimo e di minimo.

A questo punto proseguiamo i nostri ragionamenti osservando che

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = Mx \cdot x = (c_1 x_1, c_2 x_2, c_3 x_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 \quad x \in \mathbb{S}^2$$

e anche che

$$c_1 = c_1[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] \leq c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 \leq c_3[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2] = c_3 \quad \text{perognix } \in \mathbb{S}^2$$

Dalle precedenti osservazioni possiamo concludere subito che

$$c_1 = F(e_1) = \min_{x \in \mathbb{S}^2} [F(x)] \quad \text{e} \quad c_3 = F(e_3) = \max_{x \in \mathbb{S}^2} [F(x)]$$

quindi conosciamo già la soluzione del problema che ci siamo posti!

A questo punto consideriamo le seguenti curve regolari in \mathbb{R}^2 di parametrizzazione $\phi(t) = wt$, con $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ e $w \in \mathbb{R}^2$ versore, tali curve (pensate nel piano $\{x_3 = 0\}$) hanno immagine dei segmenti passanti per il punto O . A partire dalla precedente parametrizzazione possiamo ottenere delle curve sul vincolo \mathbb{S}^2 nel seguente modo

$$\psi(t) = (w_1 t, w_2 t, [1 - w_1^2 t^2 - w_2^2 t^2]^{1/2}) \quad \text{cont } \in [-\varepsilon, \varepsilon], w \in \mathbb{R}^2$$

Si noti che abbiamo ricavato la terza componente di ψ in modo che valga $\psi(t) \in \mathbb{S}^2$ per ogni t e $\psi(O) = e_3$, cioè ψ descrive una curva sulla sfera passante per il polo nord, per ogni scelta del versore w . Siamo riusciti in questo intento esclusivamente grazie al fatto che la semisfera $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > 0\}$ può essere pensata come il grafico della funzione $f(x_1, x_2) = [1 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}$, con $(x_1, x_2) \in B(O, 1)$.

A questo punto possiamo introdurre due funzioni nel seguente modo: $h(t) := F(\psi(t))$ e $k(t) := N(\psi(t))$, per $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, e osserviamo che sono funzioni di classe C^1 e che vale

$$k'(t) = 0 \quad \text{perognit } \in [-\varepsilon, \varepsilon], w \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad h(O) = \max(h) \quad \text{daci} \quad h'(O) = 0$$

inoltre abbiamo, per ogni versore $w \in \mathbb{R}^2$, che

$$h'(O) = \nabla F(\psi(O)) \cdot \psi'(O) = \nabla F(e_3) \cdot \psi'(O) = 2(c_1 w_1 t, c_2 w_2 t, c_3 [1 - \|w\|^2 t^2]^{1/2}) \cdot (w_1, w_2, 0) = 2(O, O, c_3) \cdot (w_1, w_2, 0)$$

$$k'(O) = \nabla N(\psi(O)) \cdot \psi'(O) = \nabla N(e_3) \cdot \psi'(O) = 2(O, O, 1) \cdot (w_1, w_2, 0)$$

Queste ultime due relazioni mostrano che i vettori $\nabla F(e_3)$ e $\nabla N(e_3)$ devono essere paralleli, cioè proporzionali, visto che sono entrambi ortogonali a tutti i vettori dello spazio vettoriale $W = \{(w_1, w_2, 0), w \in \mathbb{R}^2\}$ (cosa per altro evidente dalle espressioni calcolate). Quest'ultima osservazione si rivela essere una conseguenza sempre vera per punti critici vincolati, cioè vera per F e N qualsiasi, e suggerisce l'introduzione della funzione di Lagrange

$$L(x, s) = F(x) - sN(x) : A \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

I punti critici liberi di L risultano essere punti $(x, s) \in \mathbb{R}^4$ tali che x appartiene al vincolo e in tali punti i vettori $\nabla F(x)$ e $\nabla N(x)$ (derivate parziali rispetto alle sole variabili di x) sono paralleli (s è la costante di proporzionalità), quindi sono i punti critici di F sul vincolo $\{x : N(x) = 0\}$ (si veda il teorema 2.59).

Il teorema delle funzioni implicite risponde ad alcune delle precedenti domande: per ripetere i ragionamenti dell'esempio 2.48 abbiamo bisogno di poter descrivere, almeno intorno ai punti critici di una funzione obiettivo F ristretta ai punti di un vincolo, il luogo dei punti appartenenti al vincolo come il grafico di una funzione, in modo da ottenere una struttura regolare di cui sia possibile descrivere lo spazio tangente, cioè lo spazio dei vettori tangenti, e che tale spazio abbia dimensione sufficientemente alta, in modo da poter dedurre il parallelismo dei vettori gradiente delle funzioni che compongono la funzione di Lagrange L . Come primo passo verso una migliore comprensione dei risultati di Ulisse Dini, cioè del teorema della funzione implicita, proviamo a studiare un primo caso non troppo complesso.

TEOREMA 2.49 (delle funzioni implicite in tre dimensioni I) *Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dove $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è un aperto e f una funzione di classe $C^1(A)$, e $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) \in A$ un punto tale che*

$$F(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_3 F(x_0) \neq 0$$

Allora esistono due costanti $a, b > 0$ tali che per ogni punto $(x_1, x_2) \in B = \{(x_1 - x_{0,1})^2 + (x_2 - x_{0,2})^2 \leq a^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, cioè per ogni punto in un cerchio (del piano) sufficientemente piccolo centrato in $(x_{0,1}, x_{0,2})$, l'equazione

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(dove l'incognita è la variabile x_3) ha un'unica soluzione $x_3 = \phi(x_1, x_2)$ che appartiene all'intervallo $I = [x_{0,3} - b, x_{0,3} + b] \subseteq \mathbb{R}$. Inoltre la funzione $(x_1, x_2) \mapsto \phi(x_1, x_2)$ appartiene allo spazio $C^1(B, I)$ e vale anche la relazione

$$\nabla z(x, y) = (\partial_x z(x, y), \partial_y z(x, y)) = \left(-\frac{\partial_x F(x, y, z(x, y))}{\partial_z F(x, y, z(x, y))}, -\frac{\partial_y F(x, y, z(x, y))}{\partial_z F(x, y, z(x, y))} \right)$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo subito che le ipotesi su F nel punto x_0 , cioè che

$$F(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_3 F(x_0) > 0$$

ci permettono di dedurre che esiste $r_1 > 0$ tale che

$$F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} - r_1) < F(x_0) = 0 < F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} + r_1)$$

Si noti che abbiamo assunto che $\partial_3 F(x_0) > 0$, questa scelta sul segno della derivata parziale non lede la generalità del discorso, come sarà chiaro nel proseguo. Il teorema della permanenza del segno (applicato alla funzione F nei punti x_0 , $(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} - r_1)$ e $(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} + r_1)$) ci permette di affermare che esiste un numero reale $r_2 > 0$ e, conseguentemente, un cilindro $C \subseteq \mathbb{R}^3$, definito nel seguente modo

$$C = \{(x_1 - x_{0,1})^2 + (x_2 - x_{0,2})^2 \leq r_2^2\} \times \{x_{0,3} - r_1 \leq x_3 \leq x_{0,3} + r_1\} = B_{r_2} \times I$$

tale che

$$F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} - r_1) < 0 < F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} + r_1) \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in B_{r_2} \quad \text{e} \quad \partial_3 F(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in C$$

A questo punto del ragionamento possiamo osservare che, fissato $(x_1, x_2) \in B_{r_2}$, la funzione di una variabile reale

$$h(t) := F(x_1, x_2, t) : [z_0 - r_1, z_0 + r_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione continua (anzi almeno di classe C^1) che assume valori discordi agli estremi dell'intervallo

$$h(x_{0,3} - r_1) = F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} - r_1) < 0 < F(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3} + r_1) = h(x_{0,3} + r_1)$$

quindi, per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_3 = \phi(x_1, x_2) \in I$ tale che $F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) = 0$. Inoltre tale soluzione è unica, perché la funzione h è strettamente monotona crescente in I , perché per $t \in I$ si ha che $h'(t) = \partial_3 F(x_1, x_2, t) > 0$ con $(x_1, x_2, t) \in C$.

Poniamo $a := r_2$ e $b := r_1$. A questo punto del ragionamento abbiamo ottenuto l'esistenza di una funzione $\phi(x, y)$ definita su $B = B_a = B_{r_2}$ che produce valori in I , tale funzione ad ogni input (x_1, x_2) associa un reale $x_2 = \phi(x_1, x_2)$ unica soluzione, nell'intervallo I , dell'equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Per concludere la dimostrazione dobbiamo investigare le proprietà di continuità e differenziabilità della funzione ϕ .

Consideriamo i punti (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) appartenenti al cilindro C , con $x_3 = \phi(x_1, x_2)$ e $y_3 = \phi(y_1, y_2)$. Per le proprietà della funzione ϕ e per il teorema dei valori intermedi (si ricordi che C è un insieme convesso) abbiamo che

$$0 = F(x_1, x_2, x_3) - F(y_1, y_2, y_3) = \nabla F(\nu, \sigma, \xi) \cdot (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \quad \text{con } (\nu, \sigma, \xi) \in \overline{xy}$$

da cui, svolgendo alcuni calcoli, ricaviamo

$$\begin{aligned} |\phi(x_1, x_2) - \phi(y_1, y_2)| &= |x_3 - y_3| = \left| \frac{\partial_1 F(\nu, \sigma, \xi)(x_1 - y_1) + \partial_2 F(\nu, \sigma, \xi)(x_2 - y_2)}{\partial_3 F(\nu, \sigma, \xi)} \right| \leq \left| \frac{\partial_1 F(\nu, \sigma, \xi)}{\partial_3 F(\nu, \sigma, \xi)} \right| |x_1 - y_1| + \left| \frac{\partial_2 F(\nu, \sigma, \xi)}{\partial_3 F(\nu, \sigma, \xi)} \right| |x_2 - y_2| \\ &\leq \frac{\max |\partial_1 F|}{\min \partial_3 F} |x_1 - y_1| + \frac{\max |\partial_2 F|}{\min \partial_3 F} |x_2 - y_2| \leq K_0 \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

e le diseguaglianze ottenute implicano la continuità della funzione ϕ nel generico punto (x_1, x_2) , visto che se facciamo tendere $(y_1, y_2) \rightarrow (x_1, x_2)$, segue che $|\phi(x_1, x_2) - \phi(y_1, y_2)| \rightarrow 0$.

Per mostrare la differenziabilità della funzione implicita ϕ introduciamo la seguente funzione ausiliaria:

$$g(t) := F(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2, \phi(x_1, x_2) + t(\phi(y_1, x_2) - \phi(x_1, x_2)))$$

dove $t \in [0, 1]$ e $(x_1, x_2), (y_1, x_2) \in B_{r_2}$. La funzione g è costruita come composizione di funzioni di classe C^1 e in più vale che $g(0) = F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) = 0$ e $g(1) = F(y_1, x_2, \phi(y_1, x_2)) = 0$, allora il teorema di Rolle prova l'esistenza di $\tau \in (0, 1)$ tale che

$$g'(\tau) := \partial_1 F(\nu, x_2, \sigma)(y_1 - x_1) + \partial_3 F(\nu, x_2, \sigma)(\phi(y_1, x_2) - \phi(x_1, x_2)) = 0$$

dove $\nu = x_1 + \tau(y_1 - x_1)$, $\sigma = \phi(x_1, x_2) + \tau(\phi(y_1, x_2) - \phi(x_1, x_2))$ e si noti che abbiamo usato il teorema di derivazione delle funzioni composte.

La precedente relazione ci permette di ricavare che

$$\partial_1 \phi(x_1, x_2) = \lim_{y_1 \rightarrow x_1} \frac{\phi(y_1, x_2) - \phi(x_1, x_2)}{y_1 - x_1} = - \lim_{y_1 \rightarrow x_1} \frac{\partial_1 F(\nu, x_2, \sigma)}{\partial_3 F(\nu, x_2, \sigma)} = - \frac{\partial_1 F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))}{\partial_3 F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))}$$

e il limite ottenuto, unitamente al fatto che $F \in C^1$, ci permette di concludere che ϕ ha derivata parziale continua nel generico punto $(x_1, x_2) \in B$. Ragionando in modo speculare sulla funzione ausiliaria

$$g(t) := F(x_1, x_2 + t(y_2 - x_2), \phi(x_1, x_2) + t(\phi(x_1, y_2) - \phi(x_1, x_2)))$$

possiamo concludere che $\phi \in C^1(B)$, il che (anche grazie al teorema del differenziale totale) termina la dimostrazione del teorema. ■

Osserviamo, come già detto, che il teorema può essere riscritto permutando il ruolo delle variabili. Per mostrare come questa possibilità complichi i possibili enunciati equivalenti proviamo a riassumere le differenti situazioni nel seguente modo: data una funzione $F \in C^1(A, \mathbb{R})$ definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e un punto $(x_0) \in A$ tale che $F(x_0) = 0$, abbiamo che

- se $\partial_3 F(x_0) \neq 0$ allora esiste $\phi(x_1, x_2) \in C^1(B, I)$ tale che $\{F(x, y, z) = 0\} \cap C = \{x_3 = \phi(x_1, x_2)\}$
- se $\partial_2 F(x_0) \neq 0$ allora esiste $\phi(x_1, x_3) \in C^1(B, I)$ tale che $\{F(x, y, z) = 0\} \cap C = \{x_2 = \phi(x_1, x_3)\}$
- se $\partial_1 F(x_0) \neq 0$ allora esiste $\phi(x_2, x_3) \in C^1(B, I)$ tale che $\{F(x, y, z) = 0\} \cap C = \{x_1 = \phi(x_2, x_3)\}$

In tutti i casi il grafico della funzione descrive (almeno nelle vicinanze del punto x_0) l'insieme $\{F(x) = 0\}$, cioè il luogo degli zeri della funzione F .

Al crescere delle dimensioni del input e dell'output della funzione F le cose si complicano un po', consideriamo il caso in cui la funzione produca risposte vettoriali. Fissiamo le idee considerando il caso $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $A \subseteq \mathbb{R}^3$, questo significa che possiamo pensare la nostra funzione vettoriale come una coppia di funzioni scalari

$$F(x) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3)) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Intuitivamente possiamo dire che il luogo degli zeri di ognuna delle due funzioni F_1 e F_2 possa essere il grafico di una funzione (come nel precedente risultato) quindi un oggetto che possiamo pensare come una superficie nello spazio tridimensionale, e questo significa che il luogo degli zeri della funzione vettoriale F , cioè l'insieme dove sono nulle entrambe le componenti di F $Z_F = \{F_1(x) = F_2(x) = 0\}$, può essere pensato come l'intersezione di due superfici, quindi una curva. Per precisare meglio questo ragionamento qualitativo possiamo procedere come segue: sia $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) \in Z_F$ e supponiamo che una delle derivate parziali di F_1 in x_0 sia non nulla, per esempio $\partial_3 F_1$ (si ricordi che se nessuna derivata parziale ha valore diverso da 0 è possibile che il luogo degli zeri non abbia alcuna struttura geometrica, come suggerisce l'esempio della funzione $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ il cui luogo degli zeri è solo il punto $(0, 0, 0)$). Per il teorema precedente, almeno in un intorno del punto x_0 , l'insieme $\{F_1(x) = 0\}$ è descritto dal grafico di una funzione $\phi_3(x_1, x_2)$, e siccome per ogni $x \in Z_F$ vale $F_1(x) = 0$ segue anche che

$$G(x_1, x_2) := F_2(x_1, x_2, \phi_3(x_1, x_2)) = 0$$

e in particolare abbiamo che

$$G(x_0) = F_2(x_{0,1}, x_{0,2}, \phi_3(x_{0,1}, x_{0,2})) = F_2(x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) = 0$$

Per poter applicare il primo teorema che abbiamo dimostrato alla funzione G dobbiamo verificare che la sua derivata parziale, rispetto alla variabile y per esempio, sia diversa da 0, quindi grazie al teorema di derivazione delle funzioni composte e al teorema di Dini in \mathbb{R}^2 possiamo calcolare

$$\partial_2 G(x_1, x_2) = \partial_2 [F_2(x_1, x_2, \phi_3(x_1, x_2))] = \partial_2 F_2(x_1, x_2, \phi_3(x_1, x_2)) + \partial_3 F_2(x_1, x_2, \phi_3(x_1, x_2)) \partial_2 \phi_3(x_1, x_2) = \frac{\partial_2 F_2 \partial_3 F_1 - \partial_3 F_2 \partial_2 F_1}{\partial_3 F_1}$$

Se questa derivata è non nulla otteniamo l'esistenza di una funzione $\psi_2(x)$, definita per $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, tale che

$$0 = G(x_1, \psi_2(x_1)) = F_2(x_1, \psi_2(x_1), \phi_3(x_1, \psi_2(x_1))) = F_2(x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)) \quad \text{con } \psi_3(x_1) := \phi_3(x_1, \psi_2(x_1))$$

e vale anche $F_1(x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)) = 0$ per quanto osservato prima. Quanto ottenuto conferma che è possibile descrivere Z_F come l'intersezione di due grafici di funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} , cioè (geometricamente parlando) che Z_F è una curva. L'ipotesi cruciale per il calcolo precedente è che

$$\partial_2 F_2(x_0, x_0, x_0, x_0) \partial_3 F_1(x_0, x_0, x_0, x_0) - \partial_3 F_2(x_0, x_0, x_0, x_0) \partial_2 F_1(x_0, x_0, x_0, x_0) \neq 0$$

e siccome vale la relazione

$$\partial_2 F_2(x) \partial_3 F_1(x) - \partial_3 F_2(x) \partial_2 F_1(x) = \det[J_{2,3} F](x) = \det \begin{pmatrix} \partial_2 F_1(x) & \partial_3 F_1(x) \\ \partial_2 F_2(x) & \partial_3 F_2(x) \end{pmatrix}$$

possiamo concludere che un'ipotesi sufficiente per poter descrivere l'insieme degli zeri di una funzione vettoriale come grafico di una funzione vettoriale (una curva nel caso in esame) è che il determinante della matrice jacobiana di F , rispetto alle sole variabili che dipenderanno dalle restanti, sia non nullo. Notiamo anche che il fatto che tale determinante sia diverso da 0 implica che almeno una tra le derivate parziali $\partial_z F_1$ e $\partial_z F_2$ debba essere differente da 0, quindi la prima ipotesi fatta per costruire la funzione ϕ_1 è "contenuta" nella richiesta che la matrice jacobiana sia non singolare.

Per completare il ragionamento supponiamo di aver provato che le funzioni $x_1 \mapsto \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)$ siano di classe C^1 , e svolgiamo la seguente derivata della funzione vettoriale

$$0 = \frac{d}{dx_1} \begin{pmatrix} F_1(x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)) \\ F_2(x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 + \partial_2 F_1 \psi'_2(x_1) + \partial_3 F_1 \psi'_3(x_1) \\ \partial_1 F_2 + \partial_2 F_2 \psi'_2(x_1) + \partial_3 F_2 \psi'_3(x_1) \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo un sistema lineare per le incognite $\psi'_2(x_1)$ e $\psi'_3(x_1)$

$$\begin{cases} \partial_2 F_1 \psi'_2(x_1) + \partial_3 F_1 \psi'_3(x_1) = -\partial_1 F_1 \\ \partial_2 F_2 \psi'_2(x_1) + \partial_3 F_2 \psi'_3(x_1) = -\partial_1 F_2 \end{cases}$$

Tale sistema è risolubile, perché la matrice associata al sistema è esattamente $J_{y,z} F(x, y(x), z(x))$ che è non singolare, cioè invertibile, per cui otteniamo che

$$\begin{cases} \psi'_2(x_1) = \left[\frac{\partial_3 F_1 \partial_1 F_2 - \partial_1 F_1 \partial_3 F_2}{\partial_2 F_1 \partial_3 F_2 - \partial_3 F_1 \partial_2 F_2} \right] (x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)) \\ \psi'_3(x_1) = \left[\frac{\partial_1 F_1 \partial_2 F_2 - \partial_2 F_1 \partial_1 F_2}{\partial_2 F_1 \partial_3 F_2 - \partial_3 F_1 \partial_2 F_2} \right] (x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1)) \end{cases}$$

Tutto quello che abbiamo discusso può essere condensato nel seguente enunciato.

TEOREMA 2.50 (delle funzioni implicite in tre dimensioni II) *Sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $A \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme aperto, e F una funzione di classe $C^1(A)$, e $x_0 \in A$ un punto tale che*

$$F(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det[J_{2,3}F](x_0) = [\partial_2 F_1 \partial_3 F_2 - \partial_3 F_1 \partial_2 F_2](x_0) \neq 0$$

Allora esistono due costanti $a, b > 0$ tali che per ogni $x_1 \in B = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a\}$, cioè sufficientemente vicino ad $x_{0,1}$, l'equazione

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(dove l'incognita adesso è la coppia di variabili (x_2, x_3)) ha una sola soluzione $(x_2 = \psi_2(x_1), x_3 = \psi_3(x_1)$ che appartiene al cerchio $I = \{(x_2 - x_{0,2})^2 + (x_3 - x_{0,3})^2 \leq b^2\}$. Inoltre la funzione $x_1 \mapsto (\psi_2(x_1), \psi_3(x_1))$ appartiene allo spazio $C^1(B, I)$ e vale anche la relazione

$$\psi'_2(x_1) = -\frac{\det[J_{1,3}F](x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1))}{\det[J_{2,3}F](x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1))} \quad \text{e} \quad \psi'_3(x_1) = -\frac{\det[J_{1,2}F](x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1))}{\det[J_{2,3}F](x_1, \psi_2(x_1), \psi_3(x_1))}$$

DIMOZIONE. La dimostrazione di questo risultato è stata sviluppata (per grandi linee) nelle righe precedenti, per non appesantire il discorso omettiamo i dettagli mancanti che saranno affrontati nella prova del caso generale. ■

Sottolineiamo che la richiesta fatta sul determinante della matrice jacobiana garantisce che la variabile indipendente sia esattamente la x . Come nei casi precedenti il ruolo della variabile indipendente non può essere fissato a priori, in generale bisognerà considerare la matrice jacobiana di F , cioè

$$JF(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x F_1(x) & \partial_y F_1(x) & \partial_z F_1(x) \\ \partial_x F_2(x) & \partial_y F_2(x) & \partial_z F_2(x) \end{pmatrix}$$

e, per poter dimostrare il teorema delle funzioni implicite di Dini, supporre che la matrice abbia rango 2, cioè che esista un suo minore (sottomatrice quadrata) 2×2 ottenuto cancellando una delle tre colonne, che abbia determinante diverso da zero. La colonna scartata conterrà le derivate parziali delle due funzioni rispetto alla variabile che assurerà al ruolo di variabile indipendente!

ESEMPIO 2.51 Assegnato il seguente vincolo

$$\mathcal{T} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) : \left[2 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \right]^2 + x_3^2 - 1 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si provi che \mathcal{T} è chiuso e limitato,

ii. si trovino tutti i punti critici, vincolati su \mathcal{T} , della funzione $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_2$,

iii. si scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione implicitamente definita da \mathcal{T} intorno ai punti critici trovati in ii.

i. L'insieme in questione è definito come

$$\mathcal{T} = \left\{ H(x_1, x_2, x_3) = \left[2 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \right]^2 + x_3^2 - 1 = 0 \right\}$$

essendo la funzione $H \in C^0(\mathbb{R}^3)$ il nostro vincolo risulta chiuso, perché controimmagine di un chiuso in \mathbb{R} . La sua limitatezza segue dall'osservazione che

$$x_3^2 \leq \left[2 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \right]^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{implica} \quad |x_3| \leq 1$$

e analogamente

$$|(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 2| \leq 1$$

da cui si ottiene

$$-1 \leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 2 \leq 1 \quad \text{cioè} \quad 1 \leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = r \leq 3$$

la precedente diseguaglianza implica

$$|x_1|, |x_2| \leq 3 \quad \text{omeglio} \quad -3 \leq x_1, x_2 \leq 3$$

Le diseguaglianze provate, combinate insieme, mostrano che $\mathcal{T} \subseteq [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$, cioè che il nostro insieme è limitato. E, come noto, chiuso e limitato equivale a (sequenzialmente) compatto in \mathbb{R}^3 e in tutti gli spazi di dimensione finita.

ii. La funzione $f(x_1, x_2, x_3) = x_2$ ha gradiente costante (e non nullo) in tutto lo spazio (esattamente $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0) = e_2$ per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$), quindi la funzione non ha punti critici liberi. D'altronde, ponendo $r = r(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ e ricordando che

$$\partial_1 r(x_1, x_2) = \frac{x_1}{r} \quad \text{e} \quad \partial_2 r(x_1, x_2) = \frac{x_2}{r}$$

vale

$$\nabla H(x_1, x_2, x_3) = (\partial_1 H(x_1, x_2, x_3), \partial_2 H(x_1, x_2, x_3), \partial_3 H(x_1, x_2, x_3)) = 2 \left(\frac{x_1(r-2)}{r}, \frac{x_2(r-2)}{r}, x_3 \right) = 2 \left(x_1 \left[1 - \frac{2}{r} \right], x_2 \left[1 - \frac{2}{r} \right], x_3 \right)$$

Si noti che tale vettore non può avere tutte le componenti nulle nei punti di \mathcal{T} , cioè la superficie non possiede punti singolari, per cui sarà possibile applicare il teorema delle funzioni implicite in uno qualsiasi dei punti che la compongono. Come visto precedentemente i punti critici vincolati $x = (x_1, x_2, x_3)$ di f su \mathcal{T} sono punti in cui il vettore $\nabla H(x_1, x_2, x_3)$ è parallelo al vettore $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = e_2$, quindi sono punti le cui coordinate, per qualche $c \in \mathbb{R}$, sono soluzioni del seguente sistema

$$\left(x_1 \left[1 - \frac{2}{r} \right], x_2 \left[1 - \frac{2}{r} \right], x_3 \right) = (0, c, 0) \quad x \in \mathcal{T}$$

È subito evidente che $x_3 = 0$, inoltre la prima componente ci permette di scrivere che

$$x_1 \left[1 - \frac{2}{r} \right] = 0 \quad \text{dacui} \quad \begin{cases} 0 & x_1 = 0 \\ 0 & r^2 = x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases}$$

però non è possibile che $r = 2$, perché nessun $x \in \mathcal{T}$ è tale che $x_1^2 + x_2^2 = 4$ e $x_3 = 0$, quindi i punti critici vincolati sono solo i punti del tipo $(0, s, 0)$, dove s deve essere una soluzione dell'equazione

$$[|s| - 2]^2 = 1 \quad \text{cioè} \quad s_{1,2,3,4} = \pm 1, \pm 3$$

affinché il punto si trovi sul vincolo. Riassumendo i ragionamenti precedenti i punti critici vincolati di f su \mathcal{T} sono i seguenti

$$a = (0 - 3, 0) \quad b = (0, -1, 0) \quad c = (0, 1, 0) \quad d = (0, 3, 0)$$

e, naturalmente, vale

$$f(a) = a_2 = -3 = \min_{\mathbb{T}}(f) \quad f(b) = b_2 = -1 \quad f(c) = c_2 = +1 \quad f(d) = d_2 = +3 = \max_{\mathbb{T}}(f)$$

iii. Nella precedente discussione abbiamo verificato che

$$\partial_2 H(a), \partial_2 H(b), \partial_2 H(c), \partial_2 H(d) > 0$$

quindi intorno a tutti e quattro i punti possiamo ricorrere al teorema delle funzioni implicite per affermare che esistono 4 funzioni $\phi_p(x_1, x_3)$, al variare di $p \in \{a, b, c, d\}$, tali che

$$H(x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3) = 0 \quad \text{per ogni } (x_1, x_3) \in B(O, \delta) \subseteq \mathbb{R}^2$$

con $\phi_p(O) = \phi_p(O, O) = f(p)$, al variare di $p \in \{a, b, c, d\}$.

Per scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione $\phi_p(x_1, x_3)$ abbiamo bisogno del gradiente e della matrice hessiana di H , avendo già scritto $\nabla H(x_1, x_2, x_3)$ procediamo oltre, ricordando che l'hessiano deve essere una matrice simmetrica e svolgendo qualche "agile" conto abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_{11} H(x_1, x_2, x_3) &= 2 \left[1 - \frac{2x_2^2}{r^3} \right] & \partial_{12} H(x_1, x_2, x_3) &= \frac{4x_1 x_2}{r^3} & \partial_{13} H(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ \partial_{22} H(x_1, x_2, x_3) &= 2 \left[1 - \frac{2x_1^2}{r^3} \right] & \partial_{23} H(x_1, x_2, x_3) &= 0 & \partial_{33} H(x_1, x_2, x_3) &= 2 \end{aligned}$$

Dalla teoria sappiamo che

$$\nabla \phi_p(x_1, x_3) = (\partial_1 \phi_p(x_1, x_3), \partial_2 \phi_p(x_1, x_3)) = \left(-\frac{\partial_1 H(x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3)}{\partial_2 H(x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3)}, -\frac{\partial_3 H(x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3)}{\partial_2 H(x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3)} \right)$$

e che

$$\begin{aligned} \partial_{11} \phi_p(x_1, x_3) &= - \left[\frac{\partial_{11} H |\partial_2 H|^2 - 2\partial_{12} H \partial_1 H \partial_2 H + \partial_{22} H |\partial_1 H|^2}{[\partial_2 H]^3} \right] (x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3) \\ \partial_{12} \phi_p(x_1, x_3) &= - \left[\frac{\partial_{13} H |\partial_2 H|^2 - \partial_2 H (\partial_{12} H \partial_3 H + \partial_{23} H \partial_1 H) + \partial_{22} H \partial_1 H \partial_3 H}{[\partial_2 H]^3} \right] (x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3) \\ \partial_{22} \phi_p(x_1, x_3) &= - \left[\frac{\partial_{22} H |\partial_3 H|^2 - 2\partial_{23} H \partial_2 H \partial_3 H + \partial_{33} H |\partial_2 H|^2}{[\partial_2 H]^3} \right] (x_1, \phi_p(x_1, x_3), x_3) \end{aligned}$$

dalle precedenti espressioni ricaviamo innanzitutto che

$$\partial_1 \phi_p(O, O) = \partial_2 \phi_p(O, O) = 0$$

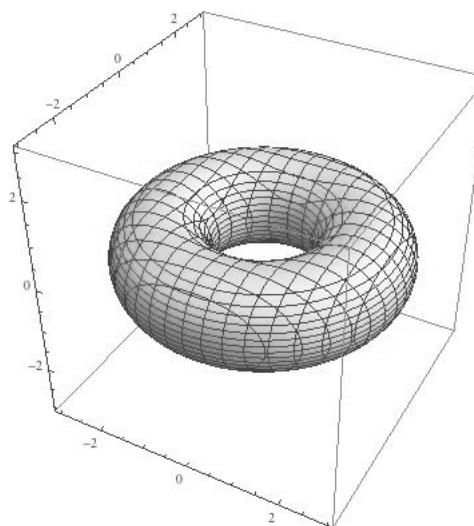
cioè $(0, 0)$ è un punto critico per ϕ_p (per ogni $p \in \{a, b, c, d\}$), inoltre, ricordando lo sviluppo di Taylor (al secondo ordine) per funzioni in due variabili e le formule scritte sopra, troviamo

$$\begin{aligned}\phi_p(x_1, x_3) &= \phi_p(0, 0) + \nabla \phi_p(0, 0) \cdot (x_1, x_3) + \frac{1}{2} \left[\partial_{11} \phi_p(0, 0) x_1^2 + 2 \partial_{12} \phi_p(0, 0) x_1 x_3 + \partial_{22} \phi_p(0, 0) x_3^2 \right] + o(x_1^2 + x_3^2) \\ &= \phi_p(0, 0) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_{11} H(0, \phi_p(0, 0), 0)}{\partial_2 H(0, \phi_p(0, 0), 0)} x_1^2 + \frac{\partial_{22} H(0, \phi_p(0, 0), 0)}{\partial_2 H(0, \phi_p(0, 0), 0)} x_3^2 \right] + o(x_1^2 + x_3^2) = \phi_p(0, 0) - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\phi_p(0, 0)} x_1^2 + \frac{|\phi_p(0, 0)|}{\phi_p(0, 0) (2 - |\phi_p(0, 0)|)} x_3^2 \right] + o(x_1^2 + x_3^2)\end{aligned}$$

e nei vari casi $p \in \{a, b, c, d\}$ otteniamo le approssimazioni richieste

$$\begin{aligned}\phi_a(x_1, x_3) &= -3 + \frac{1}{6} x_1^2 + \frac{1}{2} x_3^2 + o(x_1^2 + x_3^2) & \phi_b(x_1, x_3) &= -1 + \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_3^2 + o(x_1^2 + x_3^2) \\ \phi_c(x_1, x_3) &= +1 - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_3^2 + o(x_1^2 + x_3^2) & \phi_d(x, z) &= +3 - \frac{1}{6} x_1^2 - \frac{1}{2} x_3^2 + o(x_1^2 + x_3^2)\end{aligned}$$

concludiamo con una rappresentazione grafica del vincolo \mathcal{T} , che è la seguente superficie, detta toro, contenuta in \mathbb{R}^3 .



TEOREMA 2.52 (del valor medio in più dimensioni) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $A \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto, una funzione vettoriale di classe C^1 e $K \subseteq A$ un compatto convesso, allora

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Jf\|_\infty \|x - y\| \quad \text{perognix, } y \in K$$

dove vale

$$\|J\|_\infty := \sqrt{m} \left[\max_{i=1 \dots m} \max_{x \in K} \sum_{j=1}^k |\partial_j f_i(x)|^2 \right]^{1/2}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $p(t) = (1-t)y + tx$ una parametrizzazione regolare del segmento di estremi x e y , allora per i teoremi di Lagrange e di derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(p(1)) - f_i(p(0))| = |(f_i(p(t)))'| = |\nabla f_i(p(t_0)) \cdot (x - y)| \leq \|\nabla f_i(p(t_0))\| \cdot \|x - y\| \leq \max_{q \in K} \|\nabla f_i(q)\| \cdot \|x - y\| = \|\nabla f_i\|_\infty \|x - y\|$$

Allora vale

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \leq \left[\sum_{i=1}^m \|\nabla f_i\|_\infty^2 \right] \|x - y\|^2 \leq m \left[\max_{i=1 \dots m} \|\nabla f_i\|_\infty^2 \right] \|x - y\|^2$$

cioè

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sqrt{m} \left[\max_{i=1 \dots m} \|\nabla f_i\|_\infty^2 \right]^{1/2} \|x - y\| = \|Jf\|_\infty \|x - y\| \quad \text{perognix, } y \in K$$

■

OSSERVAZIONE 2.53 (norme di matrici) Nel precedente risultato abbiamo introdotto una norma per la matrice jacobiana di una funzione vettoriale, in generale se $F = (F_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,k}(\mathbb{R})$ abbiamo diverse possibilità. Per esempio le quantità

$$\|F\|_1 := \sqrt{m} \left[\max_{i=1 \dots m} \left(\sum_{j=1}^k |F_{ij}|^2 \right) \right]^{1/2} \quad \|F\|_2 := \sqrt{nm} \left[\max_{i=1 \dots m, j=1 \dots k} |F_{ij}| \right] \quad \|F\|_3 := \max_{v \in S^k} \frac{\|Fv\|}{\|v\|}$$

inducono norme "buone" per funzioni continue a valori in spazi di matrici (per esempio la funzione Jf quando f è di classe C^1 !) sostituendo alle entrate F_{ij} la norma della funzione corrispondente $\|a_{ij}\|_\infty = \max_K |a_{ij}(x)|$.

TEOREMA 2.54 (delle funzioni implicite (U. Dini)) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ aperto, una funzione di classe C^1 e $(x_0, y_0) \in A$ tale che

$$f(x_0, y_0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \det[J_y f(x_0, y_0)] \neq 0$$

Allora esiste un intorno $I \subseteq \mathbb{R}^m$ di x_0 e un intorno $J \subseteq \mathbb{R}^n$ di y_0 tali che, per ogni $x \in I$ l'equazione nell'incognita y

$$f(x, y) = \mathbf{0}$$

ha un'unica soluzione $y = g(x)$. Inoltre l'applicazione g che ad ogni $x \in I$ associa l'unica soluzione $y = g(x) \in J$ è una funzione vettoriale $g : I \rightarrow J$ di classe C^1 e risulta

$$(2.10) \quad Jg(x) = (\partial_j g_i)_{ij} = -[J_y f(x, g(x))]^{-1} J_x f(x, g(x))$$

Dove abbiamo usato la notazione

$$J_y f(x_0, y_0) = (\partial_{y_k} f_i(x_0, y_0))_{ik} \quad \text{coni, } k = 1, \dots, n$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo subito che, ponendo $B = [J_y f(x_0, y_0)]^{-1}$, abbiamo che

$$f(x, y) = \mathbf{0} \quad \text{se e solo se} \quad Bf(x, y) = \mathbf{0} \quad \text{ovvero} \quad G(x, y) := y - Bf(x, y) = y$$

quindi gli zeri di f sono esattamente i punti fissi di G . Per cui possiamo riformulare il problema nel seguente modo: vogliamo provare che esiste $g \in C^0(\bar{B}(x_0, r), \bar{B}(y_0, \varepsilon))$ tale che

$$G(x, g(x)) = g(x) \quad \text{per ogni } x \in \bar{B}(x_0, r) \quad \text{e} \quad g(x_0) = y_0$$

I parametri $\varepsilon, r > 0$ saranno fissati in modo che $\bar{B}(x_0, r) \times \bar{B}(y_0, \varepsilon) \subseteq A$ e che siano garantite delle stime che ci serviranno più avanti. Per dimostrare il teorema ricorriremo al teorema delle contrazioni nello spazio metrico completo

$$X = C^0(\bar{B}(x_0, r), \bar{B}(y_0, \varepsilon)) = \{g \in C^0(\bar{B}(x_0, r)) : \|g - y_0\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

dove la distanza indotta è dalla norma $\|f\|_\infty := \max_{x \in \bar{B}(x_0, r)} |f(x)|$. Notiamo subito che

$$G(x_0, y_0) = y_0 \quad \partial_y G(x, y) = I_n - B \partial_y f(x, y) \quad \text{e} \quad \partial_y G(x_0, y_0) = I_n - B \partial_y f(x_0, y_0) = I_n - I_n = \mathbf{0}_n$$

e consideriamo la seguente applicazione (operatore) da X in sé

$$H : w \mapsto H[w] \quad \text{dove} \quad H[w](x) := G(x, w(x)) \quad \text{per ogni } x \in \bar{B}(x_0, r)$$

Si noti che $H[w]$ è una funzione continua in quanto composizione di funzioni continue: il teorema è dimostrato se riusciamo a provare che H è una contrazione. Allora vale

$$\|H[w](x) - y_0\|_2 = \|G(x, w(x)) - y_0\|_2 \leq \|G(x, w(x)) - G(x, y_0)\|_2 + \|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\|_2 \leq \|\partial_y G\|_\infty \|w(x) - y_0\|_2 + \|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\|_2 \leq \varepsilon$$

a patto che r ed ε siano sufficientemente piccoli in modo da avere

$$\|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|\partial_y G\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

per continuità (si ricordi che $\partial_y G$ è la matrice nulla nel punto (x_0, y_0)). Inoltre vale

$$\|H[w](x) - H[v](x)\|_2 = \|G(x, w(x)) - G(x, v(x))\|_2 \leq \|\partial_y G\|_\infty \|w(x) - v(x)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|w(x) - v(x)\|_2$$

per quanto detto prima. Passando all'estremo superiore per $x \in \bar{B}(x_0, r)$ otteniamo che $H[w] \in X$, cioè che l'operatore H agisce su X , e che H è una contrazione. Questo implica l'esistenza di un unico punto fisso, cioè di una funzione $g \in X$ che descrive (localmente) il luogo degli zeri di f .

Rimane da dimostrare che g è di classe C^1 in $I = \bar{B}(x_0, r)$. Supponiamo che

$$\det[\partial_y f(x, y)] \neq 0 \quad \text{in } I$$

(se non lo fosse dovremmo restringere l'intorno I). Dalla differenziabilità di f segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta(\varepsilon)$ tale che, se $\|h\| \leq \eta(\varepsilon)$ e $\|k\| \leq \eta(\varepsilon)$ allora

$$\|f(x + h, g(x) + k) - f(x, g(x)) - \partial_x f(x, g(x))h - \partial_y f(x, g(x))k\|_2 \leq \varepsilon (\|h\|_2 + \|k\|_2)$$

Sia per il momento $J_y f(x, g(x)) = I_n$. Posto $k = (g(x + h) - g(x))$, dato che per definizione $f(x + h, g(x + h)) = f(x, g(x)) = 0$, se $\|h\|_2 \leq \eta(\varepsilon)$ e $\|g(x + h) - g(x)\|_2 \leq \eta(\varepsilon)$ otteniamo

$$(2.11) \quad \|g(x + h) - g(x) + \partial_x f(x, g(x))h\|_2 \leq \varepsilon (\|h\|_2 + \|g(x + h) - g(x)\|_2)$$

Sia $\varepsilon = 1/2$ in (2.11) e sia $\delta_0 < \eta(1/2)$ tale che

$$\|g(x + h) - g(x)\|_2 < \eta(1/2) \quad \text{per} \quad \|h\|_2 < \delta_0$$

(si ricordi che g è continua e quindi un tale δ_0 esiste sempre). Usando la diseguaglianza triangolare e la (2.11), per $\|h\| < \delta_0$ si ha

$$\|g(x + h) - g(x)\|_2 \leq \|g(x + h) - g(x) + J_x f(x, g(x))h\|_2 + \|J_x f(x, g(x))h\|_2 \leq \frac{1}{2} (\|h\|_2 + \|g(x + h) - g(x)\|_2) + \|J_x f(x, g(x))\|_\infty \|h\|_2$$

che implica

$$(2.12) \quad \|g(x + h) - g(x)\|_2 \leq \|h\|_2 (1 + 2 \|J_x f(x, g(x))\|_\infty)$$

Riprendiamo la (2.11). Siano ε e $\eta(\varepsilon)$ i parametri che intervengono nella (2.11). Se $\|h\|_2 < \eta(\varepsilon) / ((1 + 2 \|J_x f(x, g(x))\|_\infty))$ allora, dalla (2.12), segue $\|g(x + h) - g(x)\|_2 \leq \eta(\varepsilon)$ e dalla (2.11) e (2.12) ricaviamo

$$\|g(x + h) - g(x) + J_x f(x, g(x))h\|_2 \leq 2\varepsilon \|h\|_2 (1 + \|J_x f(x, g(x))\|_\infty)$$

che porta alla (2.10) nell'ipotesi $J_y f(x, g(x)) = I_n$. In generale, posto

$$\tilde{f}(x', y') := (J_{y'} f(x', g(x')))^{-1} f(x', y')$$

si ha

$$\tilde{f}(x', g(x')) = 0 \quad \text{e} \quad J_y \tilde{f}(x', g(x')) = I_n$$

E segue la (2.10) nel caso generale. ■

OSSERVAZIONE 2.55 Dal teorema delle funzioni implicate, siccome vale che

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{perognix} \in I$$

e le funzioni coinvolte sono di classe C^1 , dalla regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo che

$$\partial_i f(x, g(x)) + J_y f(x, g(x)) \partial_i g(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Se f ha regolarità maggiore di uno, g eredita la stessa regolarità di f . Le sue derivate successive si ottengono derivando la precedente identità e ricordando la formula di derivazione delle funzioni composte.

TEOREMA 2.56 (della funzione inversa) *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, una funzione di classe C^1 tale che*

$$f(y) = x \quad \text{e} \quad \det[Jf(y_0)] \neq 0 \quad \text{con} y_0 \in A$$

allora esiste un intorno aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ di y_0 tale che $f(A)$ è un aperto, f è invertibile in A e la funzione inversa è di classe C^1 .

DIMOSTRAZIONE. Introduciamo la funzione

$$F(x, y) := f(y) - x \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times A$$

e osserviamo che F è di classe C^1 e verifica

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= f(y_0) - x_0 = x_0 - x_0 = 0 \\ J_y F(x, y) &= Jf(y) \quad \text{daci} \quad \det[J_y F](x_0, y_0) = \det[Jf](y_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Quindi la funzione F verifica tutte le ipotesi del teorema delle funzioni implicate, che abbiamo dimostrato nelle pagine precedenti, nel punto $(x_0, y_0) = (f(y_0), y_0)$, per cui sappiamo che esistono due insiemi aperti B , intorno di x_0 , e I , intorno di y_0 , e una funzione $g : B \rightarrow I$ suriettiva di classe C^1 , tali che

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{perognix} \in B$$

Notiamo inoltre che

$$F(x, g(x)) = f(g(x)) - x = 0 \quad \text{quindi} \quad f(g(x)) = x$$

dunque la funzione g è la funzione inversa di f , cioè $g(x) = f^{-1}(x)$. Si noti che, dal teorema di derivazione delle funzioni composte, possiamo ricavare anche

$$\begin{aligned} J(f^{-1})(x) &= Jg(x) = -[J_y F(x, g(x))]^{-1} J_x F(x, g(x)) \\ &= -[Jf(g(x))]^{-1} J(x) = -[Jf(g(x))]^{-1} I_n = -[Jf(g(x))]^{-1} \end{aligned}$$

Tale relazione generalizza l'espressione della derivata della funzione inversa che si incontra usualmente nei testi di analisi delle funzioni di una variabile reale. ■

2.7 massimi e minimi vincolati

Per risolvere completamente il problema della ricerca del massimo e del minimo di una funzione f in un compatto K dobbiamo studiare il comportamento della funzione sulla frontiera di K cioè sul vincolo ∂K .

OSSERVAZIONE 2.57 Un caso relativamente semplice da studiare è quando si ha a che fare con $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 in A , aperto del piano contenente K , compatto di \mathbb{R}^2 tale che $\partial K = \bigcup_{k=1}^N \gamma_k$ dove $\gamma_k = \phi_k([a_k, b_k])$ è il sostegno di una curva regolare di parametrizzazione $\phi_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^2$ per ogni $k = 1, \dots, N$. I punti di massimo e minimo assoluti della funzione f ristretta sulla frontiera di K sono da cercarsi tra i punti di giunzione dei tratti regolari della frontiera di K o tra i punti stazionari delle funzioni $f(\phi_k) : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^2$, cioè

$$P_{1k} = \phi_k(a_k), \quad P_{2k} = \phi_k(b_k), \quad \dots \quad P_{ik} = \phi_k(t_i)$$

per ogni t_i tale che $\frac{d}{dt} f(\phi_k(t)) \Big|_{t=t_i} = 0$, per $k = 1, \dots, N$.

OSSERVAZIONE 2.58 Salendo di dimensione possiamo pensare che avere a che fare con un vincolo Σ sostegno di una superficie regolare di parametrizzazione $\phi(u)$ (con $u \in R \subseteq \mathbb{R}^2$) contenuto in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ insieme aperto e con una funzione $f \in C^1(A)$. Cercare i punti critici vincolati della funzione f su Σ equivale a studiare la funzione composta $F(u) = f(\phi(u))$ con $u \in R$ e a identificare i punti critici di quest'ultima.

Dal teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo che

$$\nabla F(u) = \nabla f(\phi(u)) J\phi(u)$$

Quindi il gradiente della funzione vincolata ∇F è nullo non appena il gradiente libero ∇f appartiene al nucleo della matrice jacobiana della parametrizzazione ϕ . E il nucleo di $J\phi$ è sempre non banale, in quanto ϕ è un'applicazione da \mathbb{R}^2 a valori in \mathbb{R}^3 , quindi ha nucleo almeno di dimensione 1.

In generale parametrizzare il vincolo, come fatto in questo caso e nel precedente, è un metodo che diventa sempre più difficile da applicare al crescere della dimensione e del numero di componenti regolari che formano il vincolo, quindi è necessario introdurre qualche idea nuova.

Se la frontiera di K è della forma $\partial K = \{x \in A : g(x) = 0\}$, per cercare gli estremi di f sul vincolo ∂K (cioè gli estremi vincolati) è utile conoscere il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che fornisce dei possibili candidati (si noti che non possiamo applicare il teorema di Fermat perché ∂K non è mai un aperto!).

TEOREMA 2.59 (dei moltiplicatori di J.L. Lagrange) Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 , definite in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $\mathcal{M} = \{x \in A : g(x) = 0\}$ e $x_0 \in \mathcal{M}$ tale che $\nabla g(x_0) \neq 0$ (cioè x_0 è punto regolare per il vincolo). Allora $x_0 \in \mathcal{M}$ è un estremo relativo (massimo o minimo) vincolato di f (rispetto al vincolo \mathcal{M}) se è un punto critico libero della funzione lagrangiana

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x) \quad (x, \lambda) \in A \times \mathbb{R}$$

cioè esiste λ_0 tale che la coppia (x_0, λ_0) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

In particolare la tesi equivale a chiedere che la matrice di ordine $2 \times n$

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_n f(x_0) \\ \partial_1 g(x_0) & \dots & \partial_n g(x_0) \end{pmatrix}$$

abbia rango 1, cioè che i due vettori gradiente siano paralleli in un punto $x_0 \in \mathcal{M}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia, per esempio, $\partial_n g(x_0) \neq 0$. Per il teorema delle funzioni implicite sappiamo che \mathcal{M} può essere visto, localmente, come grafico di una funzione $h : B \rightarrow \mathbb{R}$, con $B = B(x'_0, r) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_0 = (x'_0, x_{0,n})$, definita implicitamente dalla relazione

$$g(x', h(x')) = 0 \quad \text{per ogni } x' \in B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

Sia $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B(x'_0, r)$ la parametrizzazione di una curva regolare tale che $\phi(0) = x'_0$, allora vale che $P(t) = (\phi(t), h(\phi(t)))$ è la parametrizzazione regolare di una curva su \mathcal{M} passante per x_0 .

Poiché x_0 è un punto critico vincolato di f e $g \equiv 0$ sul vincolo segue

$$0 = \frac{d}{dt} f(P(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j f(P(0)) \phi'_j(0) + \partial_n f(P(0)) \frac{d}{dt} h(P(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot s$$

$$0 = \frac{d}{dt} g(P(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j g(P(0)) \phi'_j(0) + \partial_n g(P(0)) \frac{d}{dt} h(P(t)) \Big|_{t=0} = \nabla g(x_0) \cdot s$$

con $s = (\phi'(0), \nabla h(x'_0) \cdot \phi'(0))$. Quindi abbiamo ricavato che i vettori $\nabla f(x_0)$ e $\nabla g(x_0)$ verificano alcune relazioni di ortogonalità. Siccome possiamo scegliere ϕ in modo che $\phi'(0) = e_i$ con $i = 1, \dots, (n-1)$ entrambi i vettori soddisfano almeno $(n-1)$ condizioni indipendenti di perpendicolarità, ed essendo vettori di \mathbb{R}^n questo equivale a dire che sono paralleli (o proporzionali, come si preferisce). ■

In generale, nel caso di ottimizzazione su più vincoli di equazioni $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$, si può provare il seguente enunciato

TEOREMA 2.60 (dei moltiplicatori di J.L. Lagrange con più vincoli) Siano $f, g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ (con $i = 1, \dots, k, k < n$) funzioni di classe C^1 , $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\mathcal{M} = \{x : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, k\}$. Sia $x_0 \in \mathcal{M}$ tale che la matrice jacobiana di ordine $k \times n$

$$Jg(x_0) = \left(\frac{\partial_j g_i(x_0)}{\partial_j} \right)_{ij} \quad i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, n$$

abbia rango massimo k , cioè x_0 deve essere un punto di regolarità per il vincolo. Ciò equivale a richiedere che i vettori $\nabla g_j(x_0)$, per $j = 1, \dots, k$, siano linearmente indipendenti.

Allora $x_0 \in \mathcal{M}$ è un estremo relativo (massimo o minimo) vincolato di f (con vincolo \mathcal{M}) se è un punto critico libero della funzione lagrangiana

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1, \dots, k} \lambda_i g_i(x) \quad (x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \in A \times \mathbb{R}^k$$

cioè esiste un vettore λ_0 tale che (x_0, λ_0) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda Jg(x) = \sum_{i=1, \dots, k} \lambda_i \nabla g_i(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Ciò equivale a richiedere che la matrice di ordine $(k+1) \times n$

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x_0) \\ \nabla g_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_n f(x_0) \\ \partial_1 g_1(x_0) & \dots & \partial_n g_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_k(x_0) & \dots & \partial_n g_k(x_0) \end{pmatrix}$$

abbia rango k .

3 MISURA E INTEGRAZIONE

3.1 La misura di Lebesgue

La teoria dell'integrazione secondo Lebesgue trattata nelle sezioni 3.1-3.5 è stata presa dal testo di E. Giusti [12]. Per le dimostrazioni dei risultati che abbiamo solamente richiamato rimandiamo gli studenti interessati a questo testo.

Nel seguito chiameremo iperrettangolo o iperintervallo in \mathbb{R}^n il prodotto cartesiano di n intervalli, cioè un insieme del tipo

$$I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

definiamo, in modo naturale, la misura di un iperrettangolo nel seguente modo

$$m_n(I) = m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

in modo da generalizzare la formula per il calcolo della misura di un usuale rettangolo. Ovviamente ogni iperrettangolo è individuato dagli iperpiani

$$\{x_1 = a_1\} \quad \{x_1 = b_1\} \quad \{x_2 = a_2\} \quad \{x_2 = b_2\} \quad \dots \quad \{x_n = a_n\} \quad \{x_n = b_n\}$$

Un'unione di iperpiani del tipo $\{x_j = c_k^{(j)}\}$, con $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, N$, verrà detto **reticolo**. Un reticolo \mathcal{P} divide \mathbb{R}^n in un numero finito di iperrettangoli più un numero finito di insiemi illimitati.

Chiameremo **plurirettangolo** l'unione di un numero finito di iperrettangoli, se $Y = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$ è un plurirettangolo determinato da un reticolo allora vale

$$m(Y) = m(I_1) + \dots + m(I_N)$$

Ci asterremo dal farlo, ma è possibile provare che la misura di un plurirettangolo non dipende dal reticolo che lo individua, inoltre tale misura non varia se il reticolo viene raffinato aggiungendo altri iperpiani!

In generale due plurirettangoli Y e Z possono essere identificati dall'unione degli iperrettangoli di uno stesso reticolo, da cui segue che $Y \cup Z$ è ancora un plurirettangolo e che

$$m(Y \cup Z) \leq m(Y) + m(Z)$$

In particolare se $Y \cap Z = \emptyset$ allora

$$m(Y \cup Z) = m(Y) + m(Z)$$

A questo punto possiamo introdurre la definizione di misura di Lebesgue limitatamente ad alcune importanti classi di insiemi.

DEFINIZIONE 3.1 *Dati A un insieme aperto e K un insieme compatto $A, K \subseteq \mathbb{R}^n$, poniamo*

$$m(A) = \sup \{m(Y) : Y \text{ plurirettangolo, } Y \subseteq A\}$$

$$m(K) = \inf \{m(Y) : Y \text{ plurirettangolo, } Y \supseteq K\}$$

OSSERVAZIONE 3.2 È possibile che $m(A) = +\infty$, in ogni caso se A è limitato, quindi contenuto in un iperrettangolo, allora vale sempre che $m(A) < +\infty$. Si può definire in maniera equivalente la misura dei compatti K

$$m(K) = \inf \{m(Y) : Y \text{ plurirettangolo, } \text{int}Y \supseteq K\}$$

dove con $\text{int}Y$ si indica la parte interna di Y .

La precedente definizione ci permette di considerare degli insiemi arbitrari e di introdurre i seguenti concetti

DEFINIZIONE 3.3 *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo i concetti di **misura esterna** e **misura interna** (rispettivamente) di un generico insieme nel seguente modo*

$$\overline{m}(E) = \inf \{m(A) : A \text{ aperto, } A \supseteq E\}$$

$$\underline{m}(E) = \sup \{m(K) : K \text{ compatto, } K \subseteq E\}$$

OSSERVAZIONE 3.4 In realtà la misura interna potrebbe essere "dedotta" dalla sola misura esterna, in modo da dover introdurre un solo oggetto, nel seguente modo: dato un iperrettangolo R contenente E , si pone

$$\underline{m}(E) = m(R) - \overline{m}(R \setminus E)$$

È possibile mostrare che tale definizione non dipende dalla scelta di R e che la misura interna così definita verifica tutti i precedenti enunciati, ma non seguiremo questo approccio, cercando di fornire una presentazione meno generale ma più costruttiva e chiara (almeno si spera...).

PROPOSIZIONE 3.5 *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vale*

$$(3.1) \quad \underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$$

DIMOSTRAZIONE. Siano K e A , rispettivamente, un compatto e un aperto tali che $K \subset E \subset A$. Sia R un plurirettangolo tale che $K \subset R \subset A$ (si può dimostrare che esiste sempre un tale R). Dalla definizione 3.1 segue che

$$m(K) \leq m(A)$$

per ogni compatto $K \subset E$ e aperto $A \supset E$. La diseguaglianza continuerà a valere per l'estremo inferiore sugli aperti e l'estremo superiore sui compatti cioè la tesi. ■

OSSERVAZIONE 3.6 Sia A un aperto. Dalla definizione si ha che $m(A) = \overline{m}(A)$. Inoltre, dato che i plurirettangoli sono insieme compatti, si avrà

$$\begin{aligned} m(A) &= \sup \{m(Y) : Y \text{ plurirettangolo}, Y \subseteq A\} \\ &\leq \sup \{m(K) : K \text{ plurirettangolo}, Y \subseteq A\} = \underline{m}(A) \stackrel{(3.1)}{\leq} \overline{m}(A) \end{aligned}$$

Segue che $m(A) = \overline{m}(A) = \underline{m}(A)$. Analogamente per i compatti K si ha che $m(K) = \overline{m}(K) = \underline{m}(K)$.

DEFINIZIONE 3.7 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **misurabile secondo Lebesgue** (semplicemente **misurabile**, nel seguito) se la sua misura esterna ed interna sono finite e coincidono, e si pone

$$m(E) = \overline{m}(E) = \underline{m}(E)$$

e con $m(E)$ indichiamo la misura di Lebesgue n -dimensionale dell'insieme E .

Dall'osservazione precedente si ha che gli insiemi aperti limitati e i compatti di \mathbb{R}^n sono misurabili. Dalla definizione di misura di un insieme segue che

TEOREMA 3.8 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un aperto A_ε ed un compatto K_ε , con $K_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$ e $m(A_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) < \varepsilon$.

TEOREMA 3.9 Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora vale che $\overline{m}(E \cup F) \leq \overline{m}(E) + \overline{m}(F)$. Inoltre se $E \cap F = \emptyset$ vale anche $\underline{m}(E \cup F) \geq \underline{m}(E) + \underline{m}(F)$.

TEOREMA 3.10 Siano $E_1, \dots, E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi misurabili a due a due disgiunti. Posto $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ si ha che E è misurabile e vale

$$m(E) = \sum_{i=1}^k m(E_i)$$

DIMOZIONE. Sia $k = 2$. Dato che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, dal teorema 3.9 si ha

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

Se $k > 2$ si procede per induzione. ■

TEOREMA 3.11 Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi misurabili, allora risultano misurabili gli insiemi $E \cup F$, $E \cap F$ e $E \setminus F$.

DIMOZIONE. Essendo i due insiemi E ed F misurabili sappiamo che esistono due aperti A, A' e due compatti K, K' tali che $K \subseteq E \subseteq A$, $K' \subseteq F \subseteq A'$ e $m(A \setminus K), m(A' \setminus K') < \varepsilon/2$. Osserviamo che $A \setminus K$ e $A' \setminus K'$ sono misurabili perché sono aperti.

Consideriamo gli insiemi aperti $A \setminus K'$ e $A' \setminus K$ e i compatti $K \setminus A'$ e $K' \setminus A$. Si ha

$$K \setminus A' \subset K \setminus F \subset E \setminus F \subset A \setminus F \subset A \setminus K'$$

$(A \setminus K') \setminus (K \setminus A')$ è un aperto; inoltre

$$(A \setminus K') \setminus (K \setminus A') \subset (A \setminus K) \cup (A' \setminus K')$$

da cui segue che

$$m((A \setminus K') \setminus (K \setminus A')) \leq m(A \setminus K) + m(A' \setminus K') < \varepsilon$$

Applichiamo il teorema 3.8 con $K_\varepsilon = K \setminus A'$ e $A_\varepsilon = A \setminus K'$. Per costruzione $K_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ e, dato che

$$m(A_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) = m(A_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$$

otteniamo la misurabilità di $E \setminus F$.

La misurabilità di $E \cap F$ segue dalla relazione $E \cap F = E \setminus (E \setminus F)$.

Infine la misurabilità di $E \cup F$ segue dal teorema 3.10 e dalla relazione

$$E \cup F = (E \cap F) \cup (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$$

con $E \cap F, E \setminus F, F \setminus E$ misurabili e disgiunti. ■

OSSERVAZIONE 3.12 Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ sono due insiemi misurabili, dai precedenti risultati segue che

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F \setminus E)$$

siccome vale che $F = (F \setminus E) \cup (F \cap E)$ e che $(F \setminus E) \cap (F \cap E) = \emptyset$, abbiamo anche che

$$m(F) = m(F \setminus E) + m(F \cap E)$$

da cui ricaviamo che

$$m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(F \cap E)$$

LEMMA 3.13 Sia $\{A_i\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^n , posto $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ vale

$$m(A) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Se gli aperti sono inscatolati, cioè $A_i \subseteq A_{i+1}$ per ogni indice i , allora risulta

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} m(A_i)$$

PROPOSIZIONE 3.14 *Sia $\{E_i\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , posto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ vale*

$$\overline{m}(E) = \overline{m}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{m}(E_i)$$

Inoltre se gli insiemi sono a due a due disgiunti risulta

$$\underline{m}(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \underline{m}(E_i)$$

PROPOSIZIONE 3.15 *Sia $\{E_i\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi inscatolati (cioè $E_i \subseteq E_{i+1}$ per ogni i), posto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ vale*

$$\overline{m}(E) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \overline{m}(E_i)$$

TEOREMA 3.16 (additività numerabile della misura di Lebesgue) *Sia $\{E_i\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n a due a due disgiunti. Posto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ si supponga che $\overline{m}(E) < +\infty$, allora vale*

$$m(E) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

TEOREMA 3.17 (subadditività numerabile della misura di Lebesgue) *Sia $\{E_i\}$ una collezione numerabile di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n . Posto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, si supponga che $\overline{m}(E) < +\infty$, allora vale*

$$m(E) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Se $E_i \subseteq E_{i+1}$ per ogni indice i , allora risulta

$$m(E) = \lim_{i \rightarrow +\infty} m(E_i)$$

OSSERVAZIONE 3.18 *Dal precedente enunciato segue un interessante risultato. Siano E_1, E_2, E_3, \dots un'infinità numerabile di insiemi aventi misura nulla, allora abbiamo che la loro unione E è ancora un insieme misurabile di misura nulla.*

Siccome un punto ha misura di Lebesgue nulla segue che ogni insieme numerabile ha misura nulla. In particolare \mathbb{Q} , l'insieme dei numeri razionali, come ogni suo sottoinsieme, ha misura nulla.

OSSERVAZIONE 3.19 L'insieme di Cantor, introdotto dal matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918), si ottiene per svuotamenti reiterati dell'intervallo $[0, 1]$. Al primo passo si divide $[0, 1]$ in tre intervalli di uguale lunghezza e si elimina quello medio aperto cioè $(1/3, 2/3)$. Si ottiene

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \quad \text{con} \quad m(C_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Si applica la stessa procedura agli intervalli $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ cioè si dividono ambedue in tre intervalli uguali e si elimina quello intermedio aperto. Si ottiene

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \quad \text{con} \quad m(C_2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Iterando questo procedimento si costruisce una successione di insiemi C_n inscatolati cioè $C_{n+1} \subset C_n$. Si definisce l'insieme di Cantor

$$C = \bigcap_{n \geq 1} C_n$$

L'insieme C ha le seguenti proprietà:

- i. C è chiuso perché ogni C_n è chiuso
- ii. C è non vuoto (infatti contiene $0, 1$ ma non solo....)
- iii. C non contiene nessun intervallo
- iv. C ha misura nulla. Infatti il suo complementare ha misura 1 dato che al primo passo si toglie un intervallo di ampiezza $1/3$, al secondo passo si tolgono due intervalli di ampiezza $1/3^2$, ..., al passo n si tolgono 2^{n-1} intervalli di ampiezza 3^n e così via. Dunque

$$m([0, 1] \setminus C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{8}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

v. C ha tanti punti quanti l'intervallo $[0, 1]$ cioè ha la potenza del continuo. Questo esempio ci mostra che gli insiemi di misura nulla non sono solo quelli numerabili.

vi. ogni punto di C è un punto di accumulazione

vii. C non è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan.

OSSERVAZIONE 3.20 Sia E un insieme misurabile. Allora E ha misura nulla se e solo se la misura esterna di E è nulla cioè, per ogni $\epsilon > 0$ è possibile trovare un aperto A_ϵ con $E \subset A_\epsilon$, tale che $m(A) < \epsilon$.

Finora abbiamo introdotto il concetto di misurabilità per insiemi le cui misure esterne ed interne sono uguali e finite, a questo punto discuteremo il concetto di misurabilità per insiemi di misura infinita.

DEFINIZIONE 3.21 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **misurabile** se per ogni $r > 0$ l'insieme $E \cap B(O, r)$ è misurabile, cioè se per ogni r

$$\underline{m}(E \cap B(O, r)) = \overline{m}(E \cap B(O, r))$$

e si definisce

$$(3.2) \quad m(E) = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(E \cap B(O, r))$$

Il limite (3.2) esiste sempre perchè la successione $m(E \cap B(O, r))$ è monotona crescente. Tale limite potrebbe essere $+\infty$.

La definizione appena enunciata ci dice che \mathbb{R}^n è misurabile, quindi, poiché $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$, abbiamo che il complementare di un insieme misurabile è misurabile e siccome gli aperti sono misurabili risultano misurabili anche i chiusi!

Tutti i risultati finora enunciati (additività, subadditività numerabile etc.) restano veri anche per insiemi misurabili (non solo di misura esterna finita).

OSSERVAZIONE 3.22 La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è molto ampia: contiene l'unione numerabile di insiemi misurabili, contiene gli aperti e i chiusi di \mathbb{R}^n . È spontaneo chiedersi se tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono misurabili. La risposta è negativa ma la costruzione di tali insiemi è laboriosa. Un interessante esempio è stato fornito dal matematico italiano Giuseppe Vitali (1875-1932). Vitali dimostra un risultato più forte: ogni insieme misurabile secondo Lebesgue, con misura positiva, contiene un sottoinsieme che non è misurabile. Di questa questione però non ce ne interesseremo.

Enunciamo, senza darne la dimostrazione, il seguente risultato sulla misura prodotto.

TEOREMA 3.23 Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \subseteq \mathbb{R}^k$ due insiemi misurabili, allora l'insieme $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ è misurabile e vale

$$m_{n+k}(E \times F) = m_n(E) m_k(F)$$

3.2 Misura di Lebesgue e misura di Peano-Jordan

Che relazione esiste tra gli insiemi misurabili secondo Lebesgue e gli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan?

DEFINIZIONE 3.24 Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Si definisce misura esterna secondo Peano-Jordan dell'insieme E

$$\overline{m}_{PJ}(E) = \inf\{m(P) : P \text{ plurirettangolo, } P \supseteq E\}$$

si definisce misura interna secondo Peano-Jordan dell'insieme E

$$\underline{m}_{PJ}(E) = \sup\{m(P) : P \text{ plurirettangolo, } P \subseteq E\}$$

Si dice che E è misurabile secondo Peano-Jordan se

$$\overline{m}_{PJ}(E) = \underline{m}_{PJ}(E)$$

Si nota subito che la definizione è analoga a quella di misurabilità secondo Lebesgue, ma con la differenza che gli aperti e i chiusi di Lebesgue sono sostituiti da plurirettangoli. Osserviamo che la misura di un iperrettangolo $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ coincide con la misura dell' iperrettangolo aperto $\text{int} \prod_{j=1}^n (a_j, b_j)$. Ne segue che

$$\underline{m}_{PJ}(E) \leq m(E) \leq \overline{m}(E) \leq \overline{m}_{PJ}(E)$$

cioè se E è misurabile secondo Peano-Jordan allora lo è anche secondo Lebesgue.

∂E è un insieme chiuso e quindi sempre misurabile secondo Lebesgue. Si ha la seguente interessante caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano-Jordan.

TEOREMA 3.25 Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e soltanto se la sua frontiera ∂E ha misura nulla secondo Lebesgue.

ESEMPIO 3.26 L'insieme $E = \mathbb{Q}^2 \cap [0, 1] \times [0, 1]$ è misurabile secondo Lebesgue perché è un insieme numerabile. Non è misurabile secondo Peano-Jordan dato che

$$\underline{m}_{PJ}(E) = 0 \quad \overline{m}_{PJ}(E) = 1$$

Si poteva anche osservare che $\partial E = [0, 1] \times [0, 1]$ e dunque $m(\partial E) = 1 > 0$.

3.3 L'integrale di Lebesgue

DEFINIZIONE 3.27 Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ indicheremo con il simbolo χ_E la sua **funzione caratteristica**, cioè la funzione tale che

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Una funzione ϕ è detta **semplice** se è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$ limitati e misurabili disgiunti a due a due

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{E_i}(x)$$

L'integrale di una funzione semplice ϕ è, per definizione, il numero

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_{i=1}^N \lambda_i m(E_i)$$

È intuitivo che una funzione semplice si può scrivere in più modi come combinazione lineare di funzioni caratteristiche, in ogni caso è possibile dimostrare che il suo integrale non dipende dalla rappresentazione scelta. È altrettanto semplice mostrare che dalla definizione segue che l'integrale di funzioni semplici è un'operazione lineare e monotona, cioè

$$\int [\alpha \phi(x) + \beta \psi(x)] dx = \alpha \int \phi(x) dx + \beta \int \psi(x) dx$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni ϕ, ψ semplici, inoltre se $\psi(x) \leq \phi(x)$, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\int \psi(x) dx \leq \int \phi(x) dx$$

Nel seguito indicheremo l'insieme delle funzioni semplici con il simbolo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sia f una funzione definita su \mathbb{R}^n , limitata e nulla fuori di un compatto e indichiamo con $\mathcal{S}_+(f)$ l'insieme delle funzioni semplici che maggiorano la f , cioè

$$\mathcal{S}^+(f) = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \phi(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n\}$$

analogamente l'insieme

$$\mathcal{S}^-(f) = \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \psi(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n\}$$

raccoglie le funzioni semplici che sono maggiorate dalla funzione f . Si noti che tali insiemi non sono vuoti, visto che la f è limitata ed è nulla fuori di un compatto.

DEFINIZIONE 3.28 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla fuori di un compatto, allora possiamo definire integrale superiore di f il numero

$$\int^+ f(x)dx = \inf \left\{ \int \phi(x)dx : \phi \in \mathcal{S}_+(f) \right\}$$

e integrale inferiore il numero

$$\int^- f(x)dx = \sup \left\{ \int \psi(x)dx : \psi \in \mathcal{S}_-(f) \right\}$$

La funzione f è sommabile secondo Lebesgue (semplicemente sommabile, nel seguito) se i suoi integrali superiore e inferiore coincidono. L'integrale della funzione sommabile f si indica con uno dei seguenti simboli

$$\int f dx \quad \int f(x)dx \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

PROPOSIZIONE 3.29 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla fuori di un compatto, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia sommabile è che esistano due successioni di funzioni semplici $\{\phi_k\} \subseteq \mathcal{S}_+(f)$ e $\{\psi_k\} \subseteq \mathcal{S}_-(f)$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int [\phi_k(x) - \psi_k(x)]dx = 0$$

Questo equivale a dire che esistono i limiti degli integrali delle successioni di funzioni semplici e che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \phi_k(x)dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int \psi_k(x)dx = \int f(x)dx$$

PROPOSIZIONE 3.30 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata e nulla fuori di un compatto, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia sommabile è che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano due funzioni semplici $\phi \in \mathcal{S}_+(f)$ e $\psi \in \mathcal{S}_-(f)$ tali che

$$0 \leq \int [\phi(x) - \psi(x)]dx < \varepsilon$$

Le definizioni introdotte sono formalmente identiche agli analoghi concetti studiati relativamente all'integrale secondo Riemann. L'unica differenza risiede nella classe delle funzioni caratteristiche che generano le funzioni semplici: infatti l'integrale secondo Riemann prevede l'uso di funzioni caratteristiche di intervalli, mentre Lebesgue ha usato la classe più generale degli insiemi misurabili. Segue facilmente che ogni funzione limitata e nulla fuori di un compatto integrabile

secondo Riemann è sommabile. Il viceversa non è vero, infatti l'insieme $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ è misurabile secondo Lebesgue, da cui segue

$$\int \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) dx = m(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$$

però è anche vero che $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ coincide con la funzione di Dirichlet, la quale non è integrabile secondo Riemann. Si ha il seguente fondamentale

TEOREMA 3.31 *Sia f limitata e integrabile secondo Riemann nell'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Peano-Jordan. Allora f è integrabile secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.*

A questo punto della nostra discussione introduciamo un nuovo concetto, ma partiamo da un nuovo insieme numerico: la retta ampliata

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

le operazioni di ordinamento, somma e prodotto vengono estese in maniera naturale (con eccezione della somma $+\infty - \infty$ e dei prodotti $\pm\infty \cdot 0$).

DEFINIZIONE 3.32 *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, f è detta **misurabile** se per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta misurabile l'insieme*

$$F_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$$

Segue dalla definizione che ogni funzione continua è misurabile, visto che gli aperti sono misurabili.

PROPOSIZIONE 3.33 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- i. $F'_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$,
- ii. $F''_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$,
- iii. $F'''_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}$ è misurabile per ogni $t \in \mathbb{R}$,
- iv. f è misurabile.

LEMMA 3.34 *Siano $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni misurabili, allora è misurabile l'insieme*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > g(x)\}$$

Nel seguito indichiamo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni misurabili su tutto lo spazio.

TEOREMA 3.35 *Alcune proprietà delle funzioni misurabili:*

i. *Se $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, allora $(f + g)$ e fg sono misurabili.*

ii. *Se $\{f_k\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ allora sono misurabili le funzioni $m(x) := \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ e $M(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$.*

iii. *Se $\{f_k\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ con $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, allora sono misurabili le funzioni $\underline{h}(x) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ e $\bar{h}(x) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$.*

OSSERVAZIONE 3.36 *Il precedente enunciato possiede alcune interessanti conseguenze. Ponendo $f_{2k+1}(x) = f(x)$ e $f_{2k}(x) = g(x)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, l'affermazione ii. prova che le seguenti funzioni sono misurabili*

$$\underline{h}(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \bar{h}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Inoltre il punto iii. mostra che se una successione di funzioni misurabili converge puntualmente allora tale limite puntuale è una funzione misurabile. In altre parole lo spazio vettoriale delle funzioni misurabili è chiuso rispetto alla convergenza puntuale. In particolare, data f una funzione misurabile, risultano misurabili anche le funzioni

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

dette, rispettivamente, parte positiva e parte negativa della funzione f . Si noti che vale $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ (la parte negativa di una funzione è una funzione non negativa) il che implica che se una funzione f ha le parti positiva e negativa f^+ e f^- misurabili, allora f è misurabile.

TEOREMA 3.37 *Una funzione f è misurabile se e solo se è misurabile il suo sottografico, cioè l'insieme*

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y < f(x)\}$$

Ci domandiamo a questo punto che relazione intercorre tra funzioni misurabili e funzioni sommabili. Un primo risultato afferma che

TEOREMA 3.38 *Sia f una funzione limitata e nulla fuori di un compatto K , allora f è sommabile se e solo se è misurabile.*

Data una funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ possiamo introdurre i seguenti insiemi

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

$$\mathcal{F}'_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < y \leq f(x)\}$$

TEOREMA 3.39 *Sia f una funzione misurabile, limitata e nulla fuori di un compatto K e non negativa, allora gli insiemi \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}'_0 sono misurabili e vale*

$$m_{n+1}(\mathcal{F}_0) = m_{n+1}(\mathcal{F}'_0) = \int f(x) dx$$

A questo punto dobbiamo lavorare un po' per estendere il nostro concetto di integrale che stiamo costruendo. In particolare vogliamo poter considerare insiemi "generici" (non solo compatti) e funzioni non necessariamente limitate.

DEFINIZIONE 3.40 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diremo che f è **sommabile in E** se

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

è una funzione sommabile in \mathbb{R}^n . In tal caso il numero reale $\int f_E dx$ si chiama **integrale di f su E** e si indica con il simbolo

$$\int_E f(x) dx = \int_E f(x) dx_1 \dots dx_n$$

L'integrale su E eredita le proprietà dell'integrale su tutto \mathbb{R}^n discusse precedentemente, opportunamente riscritte. Per esempio, supponendo che E sia misurabile, abbiamo che f è misurabile in E se e solo se è misurabile l'insieme

$$F_t = \{x \in E : f(x) > t\}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare il teorema 3.38 si legge nel seguente modo: sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e limitato e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, allora f è sommabile in E se e solo se è misurabile in E .

Adesso cercheremo di rimuovere l'ipotesi di limitatezza dalle richieste sulla funzione integranda. Cominciamo considerando il caso di funzioni non negative.

DEFINIZIONE 3.41 Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa. Diremo che f è **sommabile in E** se

- i. per ogni $t > 0$ la funzione $T_t(f)(x) = \min\{f(x), t\}$ è sommabile in $E \cap B(O, t)$
- ii. vale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B(O, t)} T_t(f)(x) dx < +\infty$$

Il limite nella precedente formula sarà chiamato **integrale di f esteso ad E** , si noti che la non negatività di f implica la monotonia della funzione

$$F(t) = \int_{E \cap B(O, t)} T_t(f)(x) dx$$

e quindi l'esistenza del limite. Diremo che l'integrale di f su E è infinito quando, soddisfatta la richiesta i., il precedente limite diverge. Si noti che se E ed f sono limitati la definizione introdotta coincide con la precedente definizione, infatti esiste t_0 sufficientemente grande tale che

$$F(t) = \int_E f(x) dx \quad \forall t \geq t_0$$

OSSERVAZIONE 3.42 È possibile mostrare che, supponendo f non negativa e sommabile su E , vale

$$\int_E f(x)dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B(O, r)} T_t(f)(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B(O, r)} T_t(f)(x)dx$$

Vale la seguente generalizzazione del teorema 3.39

TEOREMA 3.43 Una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ non negativa è sommabile su E se e solo se gli insiemi

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

$$\mathcal{F}'_0 = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < y \leq f(x)\}$$

sono misurabili in \mathbb{R}^{n+1} e hanno misura finita, nel qual caso si ottiene

$$\int_E f(x)dx = m_{n+1}(\mathcal{F}_0) = m_{n+1}(\mathcal{F}'_0)$$

A questo punto possiamo introdurre la definizione di integrale per funzioni di segno qualsiasi

DEFINIZIONE 3.44 Diremo che $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è sommabile su E se sono sommabili entrambe le seguenti funzioni non negative

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

e si porrà

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$$

Dalla discussione fin qui fatta possiamo dedurre l'esistenza delle seguenti tre classi di funzioni

- funzioni misurabili su E ,
- funzioni integrabili su E , cioè funzioni misurabili per le quali almeno una tra f^+ e f^- ha integrale finito,
- funzioni sommabili su E , cioè funzioni misurabili per le quali sia f^+ che f^- hanno integrale finito.

Si noti che le tre classi sono inscatolate e che, a differenza delle altre due classi, l'insieme delle funzioni integrabili non è chiuso rispetto all'operazione di somma.

TEOREMA 3.45 Sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sommabile su $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, posto

$$F_{+\infty} = \{x \in E : f(x) = +\infty\} \quad F_{-\infty} = \{x \in E : f(x) = -\infty\}$$

si ha che $m(F_{+\infty}) = m(F_{-\infty}) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione vale che

$$F_{+\infty} = \bigcap_{k \geq 0} F_k$$

il che mostra che l'insieme è misurabile. Per $r > 0$ sia $\chi_r(x)$ la funzione caratteristica dell'insieme $F_{+\infty} \cap B(O, r)$ allora segue che

$$f^+(x) \geq k \chi_r(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

quindi abbiamo che

$$m(F_{+\infty} \cap B(O, r)) = \int \chi_r(x) dx \leq \frac{1}{k} \int_E f^+(x) dx$$

passando al limite per $k \rightarrow +\infty$ si ottiene che $m(F_{+\infty} \cap B(O, r)) = 0$ per ogni $r > 0$, da cui la tesi. Analogamente per $F_{-\infty}$. ■

In seguito diremo che una proprietà vale *quasi ovunque* (e scriveremo q.o.) in E se vale per tutti gli $x \in E$ tranne al più per quelli di un sottoinsieme di E avente misura nulla. Adottando questa convenzione possiamo enunciare il risultato precedente dicendo che una funzione sommabile su E è finita quasi ovunque in E .

PROPOSIZIONE 3.46 *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sommabile e non negativa, allora*

$$\int_E f(x) dx = 0 \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = 0 \quad \text{q.o.} \quad x \in E$$

DIMOSTRAZIONE. Se la funzione è quasi ovunque nulla è immediato mostrare che l'integrale è nullo, quindi concentriamoci nel provare l'implicazione opposta, poniamo

$$F_0 = \{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcap_{k \geq 0} F_{1/k}$$

siccome $f(x) > 1/k$ in $F_{1/k}$ segue che

$$\frac{1}{k} m(F_{1/k}) \leq \int_E f(x) dx = 0$$

quindi abbiamo ottenuto che $m(F_{1/k}) = 0$ per ogni k , da cui segue che $m(F_0) = 0$. ■

3.4 Teoremi di passaggio al limite

Nel capitolo ?? abbiamo visto che, data una successione di funzioni, se si vuole passare al limite sotto segno di integrale bisogna aggiungere un'ipotesi supplementare: la convergenza uniforme della successione di funzioni. Questo risultato è l'unico che si può ottenere nell'ambito dell'integrale di Riemann. Nell'ambito

della teoria di Lebesgue si può passare al limite sotto segno di integrale in ipotesi molto generali. È questa la superiorità e la potenza della teoria di Lebesgue rispetto a quella di Riemann. Un primo risultato interessante è dovuto a Beppo Levi.

TEOREMA 3.47 (della convergenza monotona (B. Levi)) *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni integrabili su un insieme misurabile E tali che*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots \quad \text{q.o. } x \in E$$

posto $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$, vale

$$\int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo gli insiemi

$$\mathcal{F}_{0k} = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < y < f_k(x)\} \quad \mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

Gli insiemi \mathcal{F}_{0k} sono misurabili perché le f_k sono integrabili. Si ha, dalla monotonia,

$$\mathcal{F}_{01} \subseteq \mathcal{F}_{02} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_{0k} \subseteq \dots \quad \mathcal{F}_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{0k}$$

Per il teorema 3.17 anche \mathcal{F}_0 è misurabile e si ha

$$m_{n+1}(\mathcal{F}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{n+1}(\mathcal{F}_{0k})$$

La tesi segue dal teorema 3.43. ■

Un risultato analogo vale per successioni decrescenti.

PROPOSIZIONE 3.48 *Se $\{f_k\}$ è una successione di funzioni non negative, integrabili su un insieme misurabile E , allora*

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) dx$$

TEOREMA 3.49 (lemma di Fatou) *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni integrabili su un insieme misurabile E , tali che $f_k(x) \geq \Phi(x)$ q.o. in E con Φ funzione sommabile in E , allora*

$$(3.3) \quad \int_E \liminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

Analogamente, se $\Psi(x)$ è una funzione sommabile in E e se $f_k(x) \leq \Psi(x)$ q.o. in E . Allora

$$(3.4) \quad \int_E \limsup_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $h_k(x) = f_k(x) - \Phi(x) \geq 0$ per quasi ogni $x \in E$. Definiamo

$$g_j(x) = \inf_{k \geq j} h_k(x)$$

Si ha che $g_j(x)$ è una successione monotona crescente di funzioni integrabili e, se $j \leq k$, allora $g_j(x) \leq h_k(x)$. Per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_E g_j(x) dx \leq \int_E h_k(x) dx \quad \text{per ogni } k \geq j$$

Per $k \rightarrow +\infty$

$$\int_E g_j(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k(x) dx$$

Per $j \rightarrow +\infty$ applichiamo a $g_j(x)$ il teorema di Beppo Levi

$$\int_E \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_E g_j(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E h_k(x) dx$$

Inoltre, dall'essere $g_j(x)$ una successione monotona crescente, si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = \sup_j g_j(x) = \sup_j \inf_{k \geq j} h_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} h_k(x)$$

Segue (3.3). In maniera analoga si prova (3.4). ■

TEOREMA 3.50 (della convergenza dominata (H. Lebesgue)) *Sia h una funzione non negativa e sommabile su un insieme misurabile E e sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni integrabili su E tali che*

$$|f_k(x)| \leq h(x) \quad \text{q.o. } x \in E$$

e

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) \quad \text{q.o. } x \in E$$

Allora f è sommabile e vale

$$(3.5) \quad \int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che $-h(x) \leq f_k(x) \leq h(x)$ per quasi ogni $x \in E$, possiamo applicare il lemma di Fatou

$$\int_E f(x) dx \stackrel{(3.3)}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx \stackrel{(3.4)}{\leq} \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx \leq \int_E f(x) dx$$

cioè la tesi. ■

ESEMPI. Consideriamo la successione di funzioni $f_k(x) = kxe^{-kx}$ con $x \in [0, 1]$. Si ha convergenza puntuale a $f(x) = 0$. La convergenza non è uniforme dato che

$$\sup_{[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} f_k(x) = f_k(1/k) = \frac{1}{e} \not\rightarrow 0$$

quindi non possiamo applicare il teorema di passaggio al limite ???. È possibile invece applicare il teorema 3.50 dato che

$$0 \leq f_k(x) \leq h(x) = e^{-1}$$

e $h(x) = e^{-1}$ è sommabile in $[0, 1]$. Alla luce di questo esempio possiamo dedurre facilmente dal teorema di convergenza dominata il seguente

PROPOSIZIONE 3.51 *Sia E un insieme misurabile con misura finita. Sia f_k una successione di funzioni misurabili in E tali che $|f_k(x)| \leq M$ per quasi ogni $x \in E$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ per quasi ogni $x \in E$. Allora vale (3.5).*

Sia data una funzione $f(x, t)$ definita in $E \times A$, integrabile in E per ogni $t \in A$. Consideriamo la funzione definita da integrale

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

Dal teorema di convergenza dominata è possibile dimostrare importanti proprietà di $F(t)$.

TEOREMA 3.52 *Sia $f(x, t)$ continua in t per quasi ogni $x \in A$ e sia $g(x)$ sommabile in E tale che $|f(x, t)| \leq g(x)$ per ogni $t \in A$ e per quasi ogni $x \in E$. Allora $F(t)$ è continua in A .*

TEOREMA 3.53 (derivazione sotto il segno di integrale) *Sia $f(x, t)$ una funzione sommabile in E per ogni $t \in A$ e di classe $C^1(A)$ per q.o. $x \in E$ e supponiamo che esistano $k+1$ funzioni sommabili in E g_0, g_1, \dots, g_k tali che, per ogni $t \in A$ e per q.o. $x \in E$, risulti*

$$|f(x, t)| \leq g_0(x) \quad |\partial_{t_j} f(x, t)| \leq g_j(x) \quad j = 1, \dots, k$$

Allora $F(t)$ è di classe $C^1(A)$ e vale

$$\partial_{t_j} F(t) = \int_E \partial_{t_j} f(x, t) dx \quad j = 1, \dots, k$$

OSSERVAZIONE 3.54 *La tesi del precedente risultato può essere riscritta come*

$$\partial_{t_j} \int_E f(x, t) dx = \int_E \partial_{t_j} f(x, t) dx$$

OSSERVAZIONE 3.55 *Consideriamo il caso particolare in cui $E \times A = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$. In base al teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, la funzione*

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad t \in (c, d)$$

è una funzione $C^1((c, d))$ e si ha

$$F'(t) = \int_a^b \partial_t f(x, t) dx$$

Supponiamo ora che anche gli estremi d'integrazione dipendano dalla variabile t . Il teorema fondamentale del calcolo integrale si estende alla integrazione secondo Lebesgue: se g è sommabile in (a, b) allora

$$H(t) = \int_a^t g(x) dx$$

è derivabile q.o. in (a, b) e si ha

$$H' = f \quad \text{q.o. in } (a, b)$$

Consideriamo la funzione

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$$

con $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funzione definite in $[c, d]$, a valori in $[a, b]$. Sia

$$\Phi(u, v, t) = \int_u^v f(x, t) dx$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura l'esistenza delle derivate parziali

$$\partial_u \Phi(u, v, t) = -f(u, t) \quad \partial_v \Phi(u, v, t) = f(v, t)$$

Inoltre, per teorema 3.53, esiste

$$\partial_t \Phi(u, v, t) = \int_u^v \partial_t f(x, t) dx$$

Di conseguenza, se $\alpha, \beta \in C^1([c, d])$, applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\alpha(t), \beta(t), t) = \partial_u \Phi(\alpha(t), \beta(t), t) \alpha'(t) + \partial_v \Phi(\alpha(t), \beta(t), t) \beta'(t) \\ &\quad + \partial_t \Phi(\alpha(t), \beta(t), t) \end{aligned}$$

da cui segue

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_t f(x, t) dx + f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t)$$

3.5 Il calcolo degli integrali

In questa sezione ci occupiamo del calcolo effettivo degli integrali. Fondamentale è il teorema di Fubini che ci permette di ridurre il calcolo di un integrale multiplo al calcolo di successivi integrali unidimensionali. Iniziamo considerando il calcolo della misura di insiemi misurabili.

TEOREMA 3.56 *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile del piano. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, siano $E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in E\}$ le sezioni di E con le rette parallele all'asse y , si ha*

$$(3.7) \quad m_2(E) = \int_{\mathbb{R}} m_1(E_x) dx$$

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile dello spazio. Per ogni $z \in \mathbb{R}$, siano $E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in E\}$ le sezioni di E a quota z , si ha

$$m_3(E) = \int_{\mathbb{R}} m_2(E_z) dz$$

Analogamente, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, siano $E_{xy} = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in E\}$, si ha anche

$$m_3(E) = \int_{\mathbb{R}^2} m_1(E_{xy}) dx dy$$

Valgono formule analoghe scambiando il ruolo delle variabili x, y, z .

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a dimostrare la (3.7). Il primo passo consiste nel dimostrare la (3.7) per un aperto A . Sia Y_k una successione di rettangoli inscatolati $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ tali che $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$. Per l'additività numerabile della misura

$$(3.8) \quad m_2(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_2(Y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int m_1(Y_{kx}) dx$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla ovvia validità della (3.7) per i rettangoli. D'altra parte si avrà anche

$$Y_{1x} \subset Y_{2x} \subset \dots \text{ che implica } m_1(Y_{1x}) \leq m_1(Y_{2x}) \leq \dots$$

e

$$A_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_{kx} \text{ che implica } m_1(A_x) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_1(Y_{kx})$$

Siamo nelle condizioni di applicare il teorema di Beppo Levi alla successione $\{m_1(Y_{kx})\}$

$$\int m_1(A_x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int m_1(Y_{kx}) dx$$

che, insieme alla (3.8), conclude questo primo passo.

Il secondo passo consiste nel dimostrare la validità della (3.7) per i compatti K . La dimostrazione è analoga a quella degli aperti con la differenza che bisogna considerare rettangoli inscatolati $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$ che contengono K e $K = \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$.

Terzo passo: consideriamo un insieme misurabile E con misura finita. Per il teorema 3.8 possiamo costruire una successione di aperti A_j e una di compatti K_j tali che

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j \subset E \subset A_j \subset \dots \subset A_2 \subset A_1 \quad \forall j$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m_2(A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} m_2(K_j) = m_2(E)$$

Risulterà $K_{jx} \subset E_x \subset A_{jx}$. Dato che la (3.7) vale per gli aperti e i compatti si ha

$$m_2(A_j) = \int m_1(A_{jx}) dx \quad m_2(K_j) = \int m_1(K_{jx}) dx$$

da cui deduciamo che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int (m_1(A_{jx}) - m_1(K_{jx})) dx = 0$$

Consideriamo la successione di funzioni non negative $f_j(x) = m_1(A_{jx}) - m_1(K_{jx})$. Per costruzione si ha $A_{jx} \setminus K_{jx} \subset A_{j-1,x} \setminus K_{j-1,x}$ da cui segue che $f_j(x) \leq f_{j-1}(x)$ cioè la successione è monotona decrescente. Questo ci consente di applicare il teorema di Beppo Levi e ottenere

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) dx = \int \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) dx = 0$$

Per la proposizione 3.46 si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j(x) dx = 0 \quad \text{ovvero} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} m_1(A_{jx}) = \lim_{j \rightarrow \infty} m_1(K_{jx}) \quad \text{q.o. } x \in \mathbb{R}$$

che, ricordando le relazioni $K_{jx} \subset E_x \subset A_{jx}$, implica la misurabilità di E_x per quasi ogni x .

Ricordando la definizione di integrale superiore e inferiore si ha

$$m_2(K_j) = \int m_1(K_{jx}) dx \leq \int^- m_1(E_x) dx \leq \int^+ m_1(E_x) dx \leq \int m_1(A_{jx}) dx = m_2(A_j)$$

Passando al limite per $j \rightarrow \infty$ si ottiene la (3.7) per insieme di misura finita

Se $m_2(E) = +\infty$, consideriamo l'insieme limitato $E^R = E \cap B(O, R)$. La funzione $m_1(E_x^R)$ è misurabile e quindi anche la funzione $m_1(E_x) = \sup_{R>0} m_1(E_x^R)$ lo è. Per il passo precedente

$$m_2(E^R) = \int m_1(E_x^R) dx \leq \int m_1(E_x) dx$$

la tesi si ottiene per $R \rightarrow \infty$. ■

In seguito indicheremo $m_2(E)$ anche come $\text{area}(E)$ e $m_3(E)$ come $\text{vol}(E)$.

TEOREMA 3.57 (di G. Fubini) *Sia $f(x, y)$ una funzione sommabile in \mathbb{R}^2 , allora*

i. *per q.o. $x \in \mathbb{R}$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è sommabile in \mathbb{R} ,*

ii. *la funzione $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ è sommabile in \mathbb{R} ,*

iii. $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$

La tesi resta vera scambiando il ruolo delle variabili x e y nelle affermazioni precedenti (e anche in dimensioni più alte, con le debite correzioni).

DIMOSTRAZIONE. Sia $f(x, y) \geq 0$. Nel caso generale basterà considerare f^+ e f^- . Per il teorema 3.43 il sottografico della funzione f

$$\mathcal{F}_0 = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 < z < f(x, y)\}$$

è misurabile e

$$m_3(\mathcal{F}_0) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$$

Inoltre, per il teorema 3.56

$$\mathcal{F}_{0x} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathcal{F}_0\} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < f(x, y)\}$$

è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$m_3(\mathcal{F}_0) = \int_{\mathbb{R}} m_2(\mathcal{F}_{0x}) dx$$

La iii. segue tenendo presente che, sempre per il teorema 3.43,

$$m_2(\mathcal{F}_{0x}) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

■

Il teorema di Fubini consente di scambiare l'ordine di integrazione a condizione che si sappia che f è sommabile. Il teorema di Tonelli permette di stabilire la sommabilità di f dall'esistenza di uno degli integrali iterati

TEOREMA 3.58 (di L. Tonelli) *Sia f misurabile in un insieme misurabile E , non negativa per quasi ogni x . Se uno dei tre integrali*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy$$

esiste allora esistono anche gli altri e coincidono.

Se E è un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ e $f(x, y)$ una funzione sommabile in E , dal teorema di Fubini segue

TEOREMA 3.59 (formula di integrazione sui rettangoli) *Sia $f(x, y)$ una funzione sommabile nel rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$. Allora*
i. se per q.o. $x \in [a, b]$ esiste $G(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ allora la funzione $G(x)$ è sommabile in $[a, b]$ e si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b G(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

ii. se per q.o. $y \in [c, d]$ esiste $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ allora la funzione $F(y)$ è sommabile in $[c, d]$ e si ha

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Se è possibile applicare entrambe le formule, per esempio se $f \in C^0(R)$, allora si ottengono le seguenti formule di scambio dell'ordine d'integrazione

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x \in R \\ 0 & x \notin R \end{cases}$$

Per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} f^*(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f^*(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_c^d f^*(x, y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy\end{aligned}$$

Analogamente per la ii. ■

Le due formule significano che il calcolo di un integrale doppio su un rettangolo si riduce al calcolo di due integrali di funzioni di una variabile. La riduzione di un integrale doppio a due integrazioni unidimensionali successive funziona anche per insiemi più generali.

DEFINIZIONE 3.60 *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **normale** rispetto all'asse x se*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con $\alpha(x), \beta(x) \in C^0([a, b]), \alpha(x) < \beta(x)$ (cf. figura 3).

*Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **normale** rispetto all'asse y se*

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

con $\gamma(y), \delta(y) \in C^0([c, d]), \gamma(y) < \delta(y)$ (cf. figura 4).

La frontiera di un dominio normale rispetto ad un asse, per esempio l'asse x , è costituito dall'unione dei grafici di α e β , che sono insiemi di misura nulla perché le funzioni sono continue, e da due segmenti che hanno ugualmente misura nulla. Ne segue che $m(\partial E) = 0$ e quindi i domini normali sono misurabili secondo Peano-Jordan (e quindi secondo Lebesgue).

TEOREMA 3.61 (Formule di integrazione su domini normali) *Sia E un dominio normale rispetto all'asse x . Se f è sommabile in E allora*

$$(3.9) \quad \iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

Se, invece, E è un dominio normale rispetto all'asse y allora

$$(3.10) \quad \iint_E f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$$

DIMOSTRAZIONE. Come nel caso dell'integrazione sui rettangoli, la tesi segue applicando il teorema di Fubini alla funzione

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

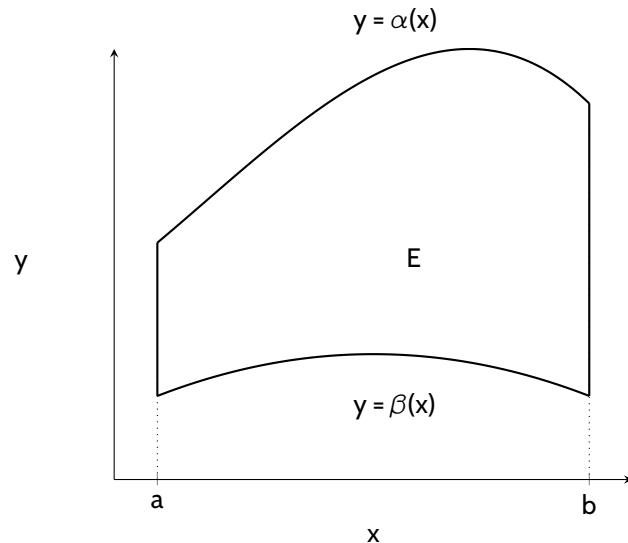


Figura 3: Dominio normale rispetto all'asse x

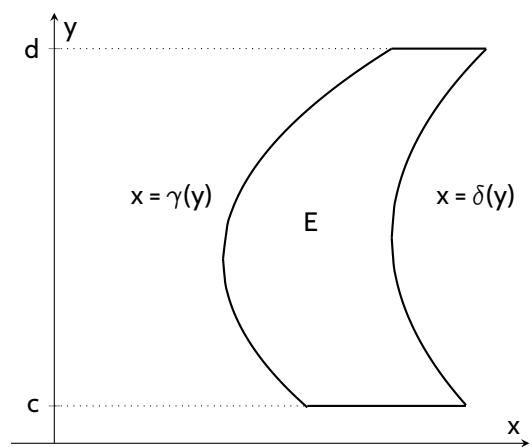


Figura 4: Dominio normale rispetto all'asse y

OSSERVAZIONE 3.62 Consideriamo il triangolo $T = \{(x, y) | a \leq y \leq x \leq b\}$. Possiamo pensare T come un insieme normale rispetto all'asse x con $\alpha(x) = a$ e $\beta(x) = x$ oppure come un dominio normale rispetto all'asse y con $\gamma(y) = y$ e $\delta(y) = b$. Applicando le formule (3.9) e (3.10) si ottiene la seguente formula nota come **formula di inversione di Dirichlet**

$$(3.11) \quad \iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$$

Il teorema di Fubini ammette una generalizzazione a integrali multipli.

DEFINIZIONE 3.63 Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice **normale** rispetto all'asse z se

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \quad h(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

con $h, g \in C^0(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. D altro non è che la proiezione di E sul piano xy . In maniera analoga si danno le definizioni di domini normali rispetto all'asse x o y .

∂E è costituito dai grafici delle superfici $z = h(x, y)$ e $z = g(x, y)$, e dai lati di una superficie cilindrica, che hanno tutti misura nulla. Ne segue che $m(\partial E) = 0$ e l'insieme E è misurabile.

TEOREMA 3.64 (Formule di integrazione su domini normali) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio rispetto all'asse z . Se f è sommabile in E allora

$$(3.12) \quad \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{h(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z) dz$$

La (3.12) è detta anche **formula di integrazione per fili**. Se D è a sua volta un dominio normale rispetto ad un asse, allora per il calcolo dell'integrale esteso a D si può ricorrere alla (3.9) o (3.10). Valgono formule analoghe permutando le variabili x, y, z .

Concludiamo questa sezione con un teorema che si ottiene dal teorema 3.56

TEOREMA 3.65 Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile delimitato dai piani $z = a$ e $z = b$ con $a < b$. Fissato $z \in [a, b]$, sia

$$E_z = \{(x, y) | (x, y, z) \in E\}$$

la proiezione di E sul piano a quota z . Se f è sommabile in E allora

$$(3.13) \quad \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{E_z} f(x, y, z) dx dy$$

La (3.13) è nota come **formula di integrazione per strati o sezioni**.

4 ANALISI INTEGRALE

Scelta della notazione sulle coordinate

4.1 integrali lungo curve

Sia $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare e $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare definita su un aperto A contenente il supporto della curva, cioè tale che $\gamma = x([a, b]) \subseteq A$. Supponiamo che f sia continua. Allora possiamo definire l'integrale di linea (o integrale curvilineo di prima specie) nel seguente modo

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(x(t)) \|x'(t)\| dt$$

Se $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in [a, b]$, si può scrivere

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \left[|x'_1(t)|^2 + |x'_2(t)|^2 + |x'_3(t)|^2 \right]^{1/2} dt$$

Per ogni f, g funzioni scalari definite in $A \subseteq \mathbb{R}^3$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ curve regolari il cui supporto è contenuto in A e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti proprietà

i. linearità: $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds$,

ii. additività: $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$,

iii. se due curve sono equivalenti, cioè $\gamma_1 \sim \gamma_2$, vale $\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds$.

Sottolineiamo il fatto che l'integrale curvilineo della funzione $f \equiv 1$ rappresenta esattamente la lunghezza della curva γ .

Se interpretiamo γ come un filo materiale con densità lineare di massa $m : \gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 0$, allora l'integrale curvilineo

$$M = \int_{\gamma} m ds = \int_a^b m(x(t)) \|x'(t)\| dt$$

rappresenta la massa totale del filo. Il centro di massa o baricentro del filo ha coordinate $B = (B_1, B_2, B_3)$, dove vale

$$B_1 = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x_1 m ds = \frac{1}{M} \int_a^b x_1(t) m(x(t)) \|x'(t)\| dt \quad B_2 = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x_2 m ds = \frac{1}{M} \int_a^b x_2(t) m(x(t)) \|x'(t)\| dt \quad B_3 = \frac{1}{M} \int_{\gamma} x_3 m ds = \frac{1}{M} \int_a^b x_3(t) m(x(t)) \|x'(t)\| dt$$

Il momento di inerzia di γ rispetto ad una retta r è

$$I_r = \int_{\gamma} d^2(p, r) m(p) ds$$

dove la funzione $d(p, r) = \min_{q \in r} \|p - q\|$ è la distanza del punto p dalla retta r .

Sia $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare di estremi $P_0 = x(a)$ e $P_1 = x(b)$ e sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo definito su un aperto A contenente il supporto della curva. Allora possiamo definire l'integrale curvilineo (di seconda specie)

$$(4.1) \quad \int_{\gamma} F \cdot T ds = \int_a^b F(x(t)) \cdot x'(t) dt$$

dove T è il versore tangente alla curva, orientata nel verso che va da P_0 a P_1 . L'integrale curvilineo di seconda specie rappresenta il lavoro W che il campo F compie per spostare una particella da P_0 a P_1 lungo γ . La presenza del versore tangente T indica la dipendenza dall'orientazione della curva.

Se γ è una curva chiusa si parla di circuitazione del campo F (lungo γ) e si usa il simbolo

$$\oint_{\gamma} F \cdot T ds$$

4.2 campi vettoriali e forme differenziali

Sia $F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$ (nel seguito supporremo sempre che $A \subseteq \mathbb{R}^3$ sia un aperto connesso). Al campo vettoriale F possiamo associare la seguente espressione formale

$$\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

che chiameremo 1-forma differenziale, diremo le funzioni F_1, F_2, F_3 coefficienti della forma differenziale. Viceversa ad ogni forma differenziale possiamo associare un campo vettoriale che ha per componenti i coefficienti della forma. Quindi in seguito parleremo indifferentemente di campo vettoriale F o della 1-forma differenziale ω . L'insieme delle forme differenziali (con coefficienti di classe $C^1(A)$) costituisce uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali.

Si definisce l'integrale curvilineo di ω lungo γ

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$$

L'integrale curvilineo di ω non è altro che l'integrale curvilineo di seconda specie del campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$ lungo γ .

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \omega_1, \omega_2$ forme differenziali e γ_1, γ_2 curve regolari a tratti abbiamo

i. lineartà: $\int_{\gamma_1} (\alpha \omega_1 + \beta \omega_2) = \alpha \int_{\gamma_1} \omega_1 + \beta \int_{\gamma_1} \omega_2,$

ii. additività: $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega,$

iii. se due curve sono equivalenti vale $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$, se le curve hanno lo stesso orientamento e $\int_{\gamma_2} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega$ se hanno orientamento opposto.

ESEMPIO 4.1 Il campo di forze gravitazionale generato da un corpo puntiforme di massa m posto nell'origine, che agisce su una particella puntiforme di massa M posta nel punto (x, y, z) è dato da

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{GMm}{r^3} (x_1, x_2, x_3) \quad \text{dove } r = \|x\| = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}$$

G è la costante di gravitazione universale. Sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare (o regolare a tratti) di rappresentazione parametriche $\phi(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Il lavoro compiuto per spostare una particella lungo ϕ dall'estremo $\phi(a)$ all'estremo $\phi(b)$ è dato da

$$W = \int_a^b F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = -GMm \int_a^b \frac{x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t) + x_3(t)x_3'(t)}{[x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)]^{3/2}} dt = GMm \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{1}{[x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)]^{1/2}} dt = GMm \left[\frac{1}{\|\phi(b)\|} - \frac{1}{\|\phi(a)\|} \right]$$

Segue che il lavoro non dipende dalla particolare curva ma solo dalle posizioni iniziale e finale! Un'altra importante conseguenza è che il lavoro lungo una curva chiusa, è sempre 0, cioè la circuitazione è sempre nulla.

Alla luce di questo esempio ci poniamo le seguenti questioni.

Domanda 1. Data ω (ovvero dato F) quali condizioni garantiscono che l'integrale lungo un cammino orientato dipenda **soltanto** dagli estremi della traiettoria e non dal cammino percorso?

Domanda 2. Data ω (ovvero dato F) quando si ha $\oint_{\gamma} \omega = 0$, o meglio $\oint_{\gamma} F \cdot T ds = 0$, dove γ è una curva chiusa?

DEFINIZIONE 4.2 Sia ω una forma differenziale

$$\omega = F_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

di classe $C^1(A)$ in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto connesso. Se esiste una funzione $U \in C^2(A)$ tale che $dU = \omega$, cioè

$$(4.2) \quad \partial_1 U = F_1 \quad \partial_2 U = F_2 \quad \partial_3 U = F_3$$

diremo che ω è esatta. La funzione U è detta una primitiva di ω . Se ω è esatta, cioè vale $\nabla U = F$, si dice che F è un campo conservativo e la funzione U è detta un potenziale di F .

OSSERVAZIONE 4.3 Se U è una primitiva per ω allora, dato che A è connesso, tutte le possibili primitive sono della forma $U + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 4.4 Se ω è esatta in A vale che

$$\int_{\gamma} \omega = U(\phi(b)) - U(\phi(a))$$

dove $\phi : [a, b] \rightarrow A$ è una qualsiasi parametrizzazione regolare di γ .

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di integrale di seconda specie, dalle relazioni in (4.2) e usando la formula di derivazione delle funzioni composte possiamo ricavare

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (F_1(\phi(t))\phi'_1(t) + F_2(\phi(t))\phi'_2(t) + F_3(\phi(t))\phi'_3(t))dt = \int_a^b [\partial_1 U(\phi(t))\phi'_1(t) + \partial_2 U(\phi(t))\phi'_2(t) + \partial_3 U(\phi(t))\phi'_3(t)]dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\phi(t))dt = U(\phi(b)) - U(\phi(a))$$

il che conclude la dimostrazione. ■

DEFINIZIONE 4.5 Si definisce rotore di F , e si indica $\text{rot}(F)$ oppure con $\nabla \wedge F$, il campo vettoriale

$$(\partial_2 F_3(x) - \partial_3 F_2(x), \partial_3 F_1(x) - \partial_1 F_3(x), \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))$$

Esso coincide con il determinante simbolico della matrice

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad \text{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1(x) & F_2(x) & F_3(x) \end{pmatrix}$$

Il campo F si dice irrotazionale se $\text{rot}(F) = 0$.

OSSERVAZIONE 4.6 Sia $\omega = F_1(x_1, x_2)dx_1 + F_2(x_1, x_2)dx_2$ una forma differenziale definita in $A \subseteq \mathbb{R}^2$. È possibile considerare il campo vettoriale (in \mathbb{R}^3) corrispondente, cioè il campo vettoriale $F = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), 0)$ e si ha

$$\text{rot}(F) = (0, 0, \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))$$

F è irrotazionale in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ovvero ω è chiusa, se

$$(4.3) \quad \partial_1 F_2(x_1, x_2) = \partial_2 F_1(x_1, x_2) \quad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in A$$

DEFINIZIONE 4.7 In generale, data una 1-forma differenziale $\omega = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$, diremo che ω è chiusa se vale che

$$\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x) \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j$$

In $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto connesso consideriamo

$$F(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3))$$

un campo vettoriale di classe $C^1(A)$ ed

$$\omega = F_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

la forma differenziale associata. Vale la seguente corrispondenza tra i due linguaggi introdotti

- i. ω è esatta se e solo se F è conservativo,
- ii. ω è chiusa se e solo se F è irrotazionale,
- iii. U è una primitiva di ω se e solo se U è un potenziale di F .

TEOREMA 4.8 *Sia ω una forma differenziale*

$$\omega = F_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

di classe $C^1(A)$ in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i. ω è esatta, cioè esiste $U \in C^2(A)$ tale che $\nabla U = (F_1, F_2, F_3)$,
- ii. per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 che hanno gli stessi estremi vale

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \quad \text{cioè} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot T ds = \int_{\gamma_2} F \cdot T ds$$

- iii. per ogni curva chiusa γ vale

$$\oint_{\gamma} \omega = 0 \quad \text{cioè} \quad \oint_{\gamma} F \cdot T ds = 0$$

DIMOZIONE. La strategia della dimostrazione consiste nel provare che sono equivalenti le affermazioni ii e iii e, in un secondo momento che ii, è equivalente ad i. Cominciamo mostrando che i implica ii. Sia γ il sostegno di una curva chiusa di parametrizzazione regolare $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, possiamo scegliere due punti $p, q \in \gamma$ e considerare la curva chiusa come composta di due cammini differenti, $\gamma_1(p, q)$ e $\gamma_2(p, q)$ aventi p come punto iniziale e q come punto finale. Per ipotesi vale

$$\int_{\gamma_1(p, q)} \omega = \int_{\gamma_2(p, q)} \omega$$

quindi, sfruttando la proprietà di additività dell'integrale, abbiamo che

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1(p, q)} \omega + \int_{\gamma_2(q, p)} \omega = \int_{\gamma_1(p, q)} \omega - \int_{\gamma_2(p, q)} \omega = 0$$

Viceversa supponiamo che valga iii e consideriamo due curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 aventi p e q come estremi. Concatenando i due cammini in modo da percorrere prima γ_1 e poi γ_2 (il secondo in verso opposto) otteniamo γ_* un cammino chiuso regolare a tratti. Allora vale

$$0 = \oint_{\gamma_*} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

con cui abbiamo provato l'equivalenza tra le affermazioni ii e iii.

Adesso possiamo provare l'equivalenza tra i e ii, se supponiamo sia vera i, ii segue molto facilmente, infatti sia γ un generico cammino che connette p e q avente parametrizzazione $\phi : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^3$ con $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$, allora possiamo scrivere

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b [F_1(\phi(t))\phi'_1(t) + F_2(\phi(t))\phi'_2(t) + F_3(\phi(t))\phi'_3(t)] dt = \int_a^b \nabla U(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\phi(t)) dt = U(\phi(b)) - U(\phi(a)) = U(q) - U(p)$$

la tesi segue dall'arbitrarietà della curva. Per concludere la dimostrazione mostriamo che ii implica i, fissiamo un punto $p \in A$ e definiamo il seguente campo scalare

$$U(x, y, z) = \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è un cammino da P al generico punto $(x_1, x_2, x_3) \in A$. Notiamo subito che, siccome l'integrale è indipendente dal particolare percorso (dipende solo dagli estremi per ipotesi), la funzione è ben definita. A questo punto dobbiamo solo mostrare che il gradiente di U è il campo vettoriale dei coefficienti della forma differenziale, quindi indichiamo con s il segmento di parametrizzazione $(x_1 + ht, x_2, x_3)$, con $t \in [0, 1]$, e calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{U(x_1 + h, x_2, x_3) - U(x_1, x_2, x_3)}{h} = \frac{1}{h} \int_s^h \omega = \frac{1}{h} \int_0^1 F(x_1 + ht, x_2, x_3) \cdot (h, 0, 0) dt = \frac{1}{h} \int_0^1 F_1(x_1 + ht, x_2, x_3) h dt = \frac{1}{h} \int_0^h F_1(x_1 + w, x_2, x_3) dw = F_1(x_1 + \xi(h), x_2, x_3)$$

passando al limite per h che tende a 0, ricordando che $\xi(h) \rightarrow 0$ e che F_1 è di classe C^1 segue

$$\partial_1 U(x_1, x_2, x_3) = F_1(x_1, x_2, x_3)$$

ripetendo il ragionamento per le altre componenti del gradiente di U si può concludere che $\nabla U = F$. ■

OSSERVAZIONE 4.9 Il teorema 4.8 ci fornisce una caratterizzazione dei campi conservativi. Una conseguenza è che il campo gravitazionale è conservativo e i suoi potenziali in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ sono dati da

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{GMm}{[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

TEOREMA 4.10 Se ω è di classe $C^1(A)$ (cioè i coefficienti F_1, F_2, F_3 sono funzioni in $C^1(A)$) e se ω è esatta allora ω è chiusa. Nel linguaggio dei campi vettoriali, se F è di classe $C^1(A)$ e se F è conservativo allora F è irrotazionale.

DIMOSTRAZIONE. È immediata conseguenza del fatto che, se $U \in C^2(A)$, per il teorema di Schwarz si ha $\text{rot}(\nabla(U)) = 0$. ■

OSSERVAZIONE 4.11 La condizione di irrotationalità è solo una condizione necessaria ma non sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo. Infatti, si consideri la forma differenziale $\omega \in C^1(A)$, dove $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$, così definita

$$\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 \quad \text{ovvero il campo vettoriale} \quad F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0 \right)$$

Si verifica facilmente che

$$\partial_1 F_2(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \partial_2 F_1(x) \quad \partial_1 F_3(x) = \partial_3 F_1(x) = \partial_2 F_3(x) = \partial_3 F_2(x) = 0$$

quindi ω è chiusa in tutto A . Però ω non è esatta perché non è verificata la condizione iii del teorema 4.8. Basta calcolare la circuitazione lungo la circonferenza di parametrizzazione

$$\gamma : \quad x(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi] \quad \text{per cui vale} \quad \int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = 2\pi \neq 0$$

La condizione di irrotationalità diventa sufficiente se si fanno ulteriori ipotesi su A . Fondamentale è introdurre gli aperti semplicemente connessi.

La definizione di insieme semplicemente connesso richiama concetti topologici che non vengono trattati in questo corso. Per questo diamo una definizione intuitiva.

DEFINIZIONE 4.12 *Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se è connesso e se ogni curva semplice chiusa (anche detta curva di Jordan) è frontiera di un insieme limitato interamente contenuta in A .*

OSSERVAZIONE 4.13 La precedente definizione equivale a richiedere che l'insieme A non ha buchi.

Il piano \mathbb{R}^2 privato di una retta non è semplicemente connesso perché non è connesso. Non sono semplicemente connessi in \mathbb{R}^2 il piano privato di un punto oppure una corona circolare; il piano \mathbb{R}^2 privato di una semiretta, i semipiani, i campi circolari, i campi rettangolari sono semplicemente connessi in \mathbb{R}^2 .

DEFINIZIONE 4.14 *Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice semplicemente connesso se è connesso e se ogni curva semplice chiusa (anche detta curva di Jordan) è il bordo di una superficie interamente contenuta in A .*

In \mathbb{R}^3 non si può dire che un insieme semplicemente connesso non ha buchi. Infatti, in \mathbb{R}^3 è semplicemente connesso lo spazio privato di un punto oppure lo spazio privato di un disco o di una sfera piena. Lo spazio \mathbb{R}^3 privato di una retta non è semplicemente connesso.

OSSERVAZIONE 4.15 Le precedenti definizioni equivalgono a richiedere che ogni curva di Jordan possa essere deformata, con continuità, e contratta in un punto senza "uscire" da A ovvero senza mai toccare i punti del complementare di A .

DEFINIZIONE 4.16 *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice stellato rispetto ad un suo punto $p \in A$ se per ogni $x \in A$ il segmento \overline{xp} è interamente contenuto nell'insieme A .*

OSSERVAZIONE 4.17 Si noti che

- se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso, allora è stellato rispetto ogni suo punto,
- se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato, allora è semplicemente connesso.

TEOREMA 4.18 (DI J.H. POINCARÉ) *Sia ω una forma differenziale*

$$\omega = F_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

di classe $C^1(A)$ in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto stellato rispetto a un suo punto. Allora ω è esatta se e solo se è chiusa, oppure F è conservativo se e solo se è irrotazionale.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo subito che se ω è una forma differenziale esatta allora è sempre anche una forma chiusa, quindi possiamo limitarci a provare l'implicazione logica inversa, mostrando l'esistenza di una funzione potenziale della forma differenziale.

Supponiamo che A sia un aperto stellato rispetto a un suo punto che, per semplicità, supponiamo sia l'origine O . Sia γ_p il cammino di parametrizzazione $\phi(t) = t(x_1, x_2, x_3)$, con $t \in [0, 1]$, che unisce O al generico punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$, si noti che tale cammino è interamente contenuto nell'aperto, grazie all'ipotesi che A sia stellato. A questo punto introduciamo la funzione

$$U(x_1, x_2, x_3) = \int_{\gamma_x} \omega = \int_0^1 F(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_0^1 F(t(x_1, x_2, x_3)) \cdot (x_1, x_2, x_3) dt = \int_0^1 [x_1 F_1(t(x_1, x_2, x_3)) + x_2 F_2(t(x_1, x_2, x_3)) + x_3 F_3(t(x_1, x_2, x_3))] dt$$

Dobbiamo provare che U è un potenziale di ω , quindi calcoliamo le sue derivate parziali. È possibile scambiare le operazioni di derivazione e di integrazione (cf. teorema 3.53 di derivazione sotto segno di integrale che è stato discusso nella sezione 3.4) da cui otteniamo che

$$\partial_1 U(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 [F_1(t(x_1, x_2, x_3)) + tx_1 \partial_1 F_1(t(x_1, x_2, x_3)) + tx_2 \partial_1 F_2(t(x_1, x_2, x_3)) + tx_3 \partial_1 F_3(t(x_1, x_2, x_3))] dt$$

Ora grazie all'ipotesi che ω è chiusa, cioè che il campo vettoriale F ha rotore nullo, abbiamo che

$$\partial_1 F_2(x_1, x_2, x_3) = \partial_2 F_1(x_1, x_2, x_3) \quad \partial_1 F_3(x_1, x_2, x_3) = \partial_3 F_1(x_1, x_2, x_3)$$

e ricordando il teorema di derivazione di funzioni composte e il teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere che

$$\partial_1 U(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 [F_1(t(x_1, x_2, x_3)) + tx_1 \partial_1 F_1(t(x_1, x_2, x_3)) + tx_2 \partial_2 F_1(t(x_1, x_2, x_3)) + tx_3 \partial_3 F_1(t(x_1, x_2, x_3))] dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t F_1(t(x_1, x_2, x_3))] dt = F_1(x_1, x_2, x_3)$$

Reiterando il ragionamento appena fatto per le altre derivate parziali abbiamo la conclusione $\nabla U = F$. ■

La dimostrazione del teorema di Poincaré è costruttiva in quanto fornisce un metodo per costruire i potenziali U di un campo vettoriale irrotazionale in un aperto stellato. Vedremo negli esercizi che è anche possibile costruire tali potenziali partendo direttamente dalle relazioni $\partial_1 U = F_1$, $\partial_2 U = F_2$ e $\partial_3 U = F_3$, con successive integrazioni.

Nel prossimo capitolo dimostreremo che il teorema di Poincaré vale in ipotesi più generali, cioè per insiemi semplicemente connessi. Sussiste infatti il seguente

TEOREMA 4.19 *Sia ω una forma differenziale*

$$\omega = F_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + F_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + F_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

di classe $C^1(A)$ in $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto semplicemente connesso. Allora ω è esatta se e solo se è chiusa (oppure F è conservativo se e solo se è irrotazionale).

Come procediamo se ω è chiusa in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ connesso ma non semplicemente connesso? Supponiamo che sia $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$ e scegliamo una curva regolare (o regolare a tratti) chiusa, che gira intorno alla lacuna. Se

$$\oint_{\gamma} \omega = \begin{cases} = 0 & \text{allora } F \text{ è conservativo in } A \\ \neq 0 & \text{allora } F \text{ non è conservativo in } A \end{cases}$$

Se, in A , prendiamo in esame la forma

$$\omega = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

possiamo verificare che ω è chiusa dato che

$$\partial_1 F_2 = \partial_1 \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{4x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \partial_2 \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \partial_2 F_1$$

Calcoliamo la circuitazione di ω lungo la circonferenza di centro O e raggio 1, contenuta nel piano $\{x_3 = 0\}$, avente equazioni parametriche

$$x(\vartheta) = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta), 0) \quad \text{con } \vartheta \in [0, 2\pi]$$

e ricaviamo che

$$\oint_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} [2\cos(\vartheta)(-\sin(\vartheta)) + 2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)] d\vartheta = 0$$

Ne segue che ω è esatta in $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}$ ed è possibile verificare che le sue primitive sono $U(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

4.4 Area di una superficie e integrali su superfici

Quando abbiamo definito la lunghezza di una curva regolare γ , abbiamo definito $L(\gamma)$ come l'estremo superiore della lunghezza di tutte le possibili poligonalì inscritte nella curva. Si potrebbe pensare di seguire lo stesso procedimento per le superfici cioè di considerare tutte le possibili superfici poliedriche (per esempio a facce triangolari) inscritte nella superficie e quindi di definire l'area come l'estremo superiore delle aree delle superfici poliedriche inscritte. Questo procedimento non funziona, infatti anche per superfici molto semplici questo estremo superiore può essere $+\infty$ cioè si presenta il fenomeno di Schwarz. Per un esempio vedi [?, p.488] o [?, p.202]. Sostituiamo le superfici poliedriche inscritte con le superfici poliedriche appoggiate sulla superficie e definiamo l'area di una superficie regolare come l'estremo inferiore dell'area delle superfici poliedriche tangenti alla superficie. Per il calcolo dell'area di una superficie regolare sussiste il seguente

DEFINIZIONE 4.20 (area di una superficie regolare) *Sia $x : K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia Σ il suo sostegno. L'area della superficie è data da*

$$(4.5) \quad \text{Area}(\Sigma) := \iint_K |\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)| du_1 du_2 \quad \text{o equivalentemente} \quad \text{Area}(\Sigma) := \iint_K \sqrt{EG - F^2} du_1 du_2$$

Se Σ ha equazione cartesiana $x(u) = (u_1, u_2, f(u))$, $u \in K$, allora

$$(4.6) \quad \text{Area}(\Sigma) = \iint_K \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx_1 dx_2$$

Diamo un significato intuitivo alla formula (4.6). Consideriamo una superficie in forma cartesiana $x(u) = (u_1, u_2, f(u))$, con $u \in K$. Suddividiamo K in K_1, \dots, K_n domini privi di punti interni in comune e sia $u_i \in \text{int}(K_i)$. A tale suddivisione corrisponde una suddivisione della superficie in superfici Σ_i con $p_i = (u_i, f(u_i)) \in \Sigma_i$. Indichiamo con Π_i la porzione di piano tangente $T_{p_i}(\Sigma)$ alla superficie nel punto p_i che si proietta su Σ_i . Detto α_i l'angolo formato tra il versore $e_3 = (0, 0, 1)$ e $\partial_1 x \wedge \partial_2 x$ si ha

$$\text{Area}(\Pi_i) = \text{Area}(\Sigma_i) \cos \alpha_i \quad \text{ovvero} \quad du_1 du_2 = \cos(\alpha_i) d\sigma$$

da cui segue che

$$\cos(\alpha_i) = n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(u_i)|^2}}$$

Come conseguenza si ottiene che

$$d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2} du$$

che mostra come $\sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2}$ sia un fattore di proiezione locale per le aree. Sia γ una curva regolare semplice contenuta nel piano $\{x_2 = 0\}$, di equazioni parametriche

$$(x_1, x_3) = (x_1(t), x_3(t)) \quad t \in [a, b]$$

con $x_1(t) > 0$ in (a, b) . La rotazione di γ di un angolo θ_0 intorno all'asse x_3 genera una superficie di equazioni parametriche

$$(4.7) \quad x(t, \theta) = (x_1(t, \theta), x_2(t, \theta), x_3(t, \theta)) = (x_1(t) \cos(\theta), x_1(t) \sin(\theta), x_3(t)) \quad (t, \theta) \in [a, b] \times [0, \theta_0]$$

La superficie Σ in (4.7) è detta superficie di rotazione. Si noti che Σ è una superficie regolare dato che

$$\begin{aligned} \partial_1 x(t, \theta) &= (x'_1(t) \cos(\theta), x'_1(t) \sin(\theta), x'_3(t)) \\ \partial_2 x(t, \theta) &= (-x_1(t) \sin(\theta), x_1(t) \cos(\theta), 0) \\ [\partial_1 x \wedge \partial_2 x](t, \theta) &= (-x_1(t)x'_3(t) \cos(\theta), -x_1(t)x'_3(t) \sin(\theta), x_1(t)x'_3(t)) \\ \|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\|^2 &= x_1(t) [(x'_1(t))^2 + (x'_3(t))^2] > 0 \quad \text{per } (t, \theta) \in (a, b) \times (0, \theta_0) \end{aligned}$$

Applicando la (4.5) si trova che l'area della superficie di rotazione Σ è data da

$$(4.8) \quad \text{Area}(\Sigma) = \theta_0 \int_a^b x(t) [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt$$

Dalla (4.8) e dalla definizione di baricentro di una curva si ha

TEOREMA 4.21 (di Guldino per le superfici di rotazione) *L'area della superficie di rotazione Σ in (4.7) è data dal prodotto della lunghezza della curva γ per la lunghezza del cammino percorso dal baricentro.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti possiamo riscrivere la (4.8) nel seguente modo

$$\text{Area}(\Sigma) = \theta_0 \int_{\gamma} x ds = \theta_0 B_1 L(\gamma) \quad \text{dove} \quad B_1 = \frac{1}{L(\gamma)} \int_{\gamma} x ds$$

con B_1 che rappresenta la distanza del baricentro dall'asse di rotazione e $L(\gamma)$ che indica la lunghezza di γ . ■

ESEMPIO 4.22 Facendo ruotare una circonferenza intorno ad una retta che non la interseca, si ottiene una superficie chiamata toro. Detta d la distanza del centro della circonferenza dalla retta, e detto R il raggio della circonferenza, si ricava che l'area della superficie del toro è $4\pi^2 dR$. Oppure una sfera di raggio R è ottenuta facendo ruotare una semicirconferenza di raggio R intorno al suo diametro. Quindi ricaviamo che l'area della sfera è data da $2\pi \cdot 2R/\pi \cdot \pi R = 4\pi R^2$.

Introduciamo ora un cambiamento di coordinate

$$u(s) = (u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)) \quad s = (s_1, s_2) \in S \subseteq \mathbb{R}^2$$

e supponiamo che

- i. $u \in C^1(\text{int}(S), \mathbb{R}^2)$,
- ii. $\det[J_u] = \det \begin{bmatrix} \partial_1 u_1(s) & \partial_2 u_1(s) \\ \partial_1 u_2(s) & \partial_2 u_2(s) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{per ogni } s \in \text{int}(S)$,
- iii. l'applicazione u è una corrispondenza biunivoca tra S e $T = \text{Im}(S)$.

Allora la superficie

$$x(s) = (x_1(u(s)), x_2(u(s)), x_3(u(s))) \quad s \in S$$

è ancora una superficie regolare. È importante osservare che l'area di una superficie risulta essere invariante per cambiamenti di coordinate.

Sia $x : K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia Σ il suo sostegno. Se $h(x) = h(x_1, x_2, x_3)$ è una funzione reale definita su Σ , si definisce integrale di superficie di h su Σ la seguente quantità

$$\iint_{\Sigma} h(x) d\sigma = \iint_K h(x(u_1, u_2)) \|\partial_1 x(u_1, u_2) \wedge \partial_2 x(u_1, u_2)\| du_1 du_2$$

Anche gli integrali di superficie non dipendono dalla rappresentazione parametrica della superficie. Se Σ ha equazione cartesiana $(u_1, u_2, f(u_1, u_2))$, con $u \in K$, allora l'integrale di superficie è dato da

$$(4.9) \quad \iint_{\Sigma} h(x) d\sigma = \iint_K h(u_1, u_2, f(u_1, u_2)) \left[1 + |\nabla f(u_1, u_2)|^2 \right] du_1 du_2$$

4.5 Baricentro e momento d'inerzia di una superficie

Sia $x : K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $\Sigma = x(K)$ il suo sostegno. Sia $\delta : \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la densità superficiale di una massa distribuita su Σ . Allora possiamo definire

$$m = \iint_{\Sigma} \delta(x) d\sigma$$

la massa totale della superficie. Il centro di massa, o baricentro, della superficie è il punto B dato da

$$B = \frac{1}{m} \left(\iint_{\Sigma} x_1 \delta(x) d\sigma, \iint_{\Sigma} x_2 \delta(x) d\sigma, \iint_{\Sigma} x_3 \delta(x) d\sigma \right)$$

Il momento d'inerzia di Σ rispetto rispetto alla retta r è

$$\iint_{\Sigma} d^2(x) \delta(x) d\sigma$$

con $d(x) := d(x, r)$ distanza del punto x dalla retta r .

4.6 Superfici orientabili e flussi

La scelta di n o $-n$ come versore normale positivo alla superficie regolare Σ corrisponde a scegliere una "faccia" della superficie, quella su cui punta n , che chiameremo faccia positiva.

DEFINIZIONE 4.23 Una superficie regolare $x : K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con sostegno Σ si dice orientabile se per ogni curva chiusa $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con sostegno $\gamma \subset \Sigma$ si ha $n(\Phi(a)) = n(\Phi(b))$. Una superficie regolare orientabile si dice orientata se è stata scelta una delle due direzioni del versore normale che chiameremo normale positiva. La faccia dalla quale esce il versore normale positivo è la faccia positiva.

In altre parole, una superficie Σ è orientabile se il versore normale $n(p)$ varia con continuità su Σ ; o anche, una superficie è orientabile se possiede due facce (che posso colorare con colori diversi). La sfera o la superficie laterale di un cilindro sono superfici orientabili. Si capisce bene il concetto di superficie orientabile se si conosce un esempio di superficie non orientabile. Il più famoso è il nastro di Möbius (cf. figura 15): immaginiamo di partire da $p_0 \in \Sigma$ e di muoverci lungo il meridiano centrale. Dopo un giro ci troviamo in p_0 ma sul lato opposto!

DEFINIZIONE 4.24 Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ la chiusura di un aperto connesso. Si definisce superficie regolare con bordo una superficie regolare $x : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva in tutto K , la cui matrice jacobiana ha rango 2 in tutto K . L'insieme dei punti di Σ descritto dal punto $p = x(u)$ quando u descrive la frontiera ∂K di K si dice bordo di Σ , relativamente alla parametrizzazione x , e si indica con $\partial_x \Sigma$. Con la scrittura $\partial \Sigma = \cap_x \partial_x \Sigma$ si indica la parte della superficie che è bordo rispetto a qualunque parametrizzazione della superficie, tale insieme è il bordo della superficie Σ .

Una superficie orientata Σ induce un'orientazione positiva sul bordo $\partial \Sigma$: diremo che $\partial \Sigma$ è orientato positivamente se un osservatore posto sulla faccia positiva di Σ che percorre $\partial \Sigma$ nel verso positivo lascia Σ alla sua sinistra. Il contorno così orientato viene indicato con $+\partial \Sigma$ o $\partial^+ \Sigma$.

Se Σ ha rappresentazione parametrica $x : K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ biunivoca tra K e Σ allora $x(\partial K) = \partial \Sigma$. Nel caso della semisfera $\Sigma : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0$, il bordo coincide con il cerchio massimo $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$. Se scegliamo come faccia positiva quella esterna allora l'orientamento positivo su $\partial \Sigma$ è quello antiorario se visto dall'alto.

DEFINIZIONE 4.25 Una superficie regolare è chiusa se è priva di bordo.

La sfera, il toro o un ellissoide sono superfici chiuse.

TEOREMA 4.26 Una superficie è connessa, chiusa e orientabile se e solo se è frontiera di un aperto connesso limitato di \mathbb{R}^3 .

Per le superfici chiuse, connesse e orientabili vale un teorema analogo a quello di Jordan per le curve: suddividono lo spazio \mathbb{R}^3 in due parti, una limitata (interno della superficie) e una non limitata (esterno della superficie).

L'otre di Klein è un esempio famoso di superficie chiusa, non orientabile, perché non è frontiera di un aperto connesso limitato di \mathbb{R}^3 .

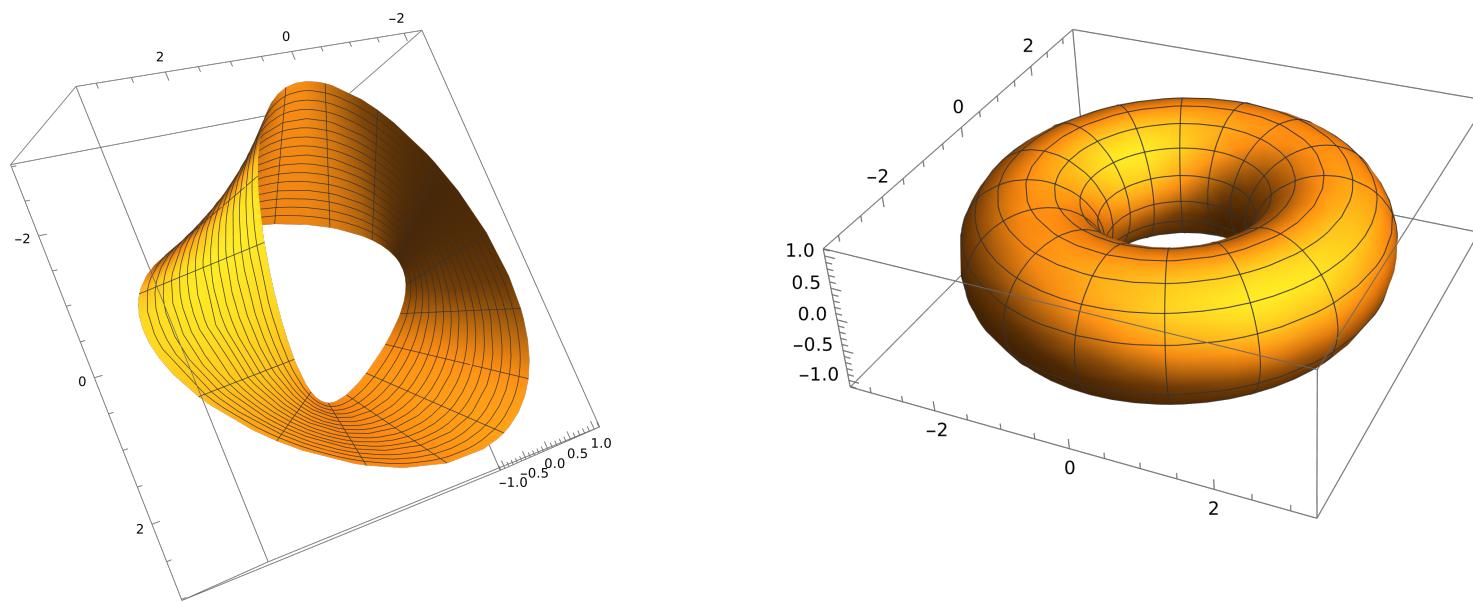


Figura 15: Nastro di Möbius e Toro

Sia $\mathbf{F}(x) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3))$ un campo vettoriale di classe $C^0(A)$, sia $x: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientabile con sostegno $\Sigma \subseteq A$. Sia n il versore normale alla superficie. L'integrale di superficie

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

si chiama flusso Φ_{Σ} del campo \mathbf{F} attraverso Σ nella direzione n . Il flusso è invariante per cambi di parametrizzazione equivalenti e cambia segno se cambia il verso di n . Ricordando che $n = \frac{\partial_1 x \wedge \partial_2 x}{\|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\|}$ si ricava

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \iint_K \mathbf{F}(x(u)) \cdot (\partial_1 x \wedge \partial_2 x) du_1 du_2$$

5 ANALISI VETTORIALE

In questo capitolo presentiamo i risultati che, tradizionalmente, costituiscono i principali risultati che vanno sotto il nome di analisi vettoriale. La trattazione è decisamente lacunosa, rispetto ad un testo tradizionale e per la difficoltà dei concetti da affrontare e per alcune idee ostiche che compaiono in alcune dimostrazioni. Per una presentazione più organica e completa rimandiamo ai molti e ottimi testi citati in bibliografia, in ogni caso desideriamo evidenziare la presenza (alla fine del capitolo) di alcuni risultati interessanti che, usualmente, non sono inclusi in un libro di analisi matematica, ma che possono arricchire ed essere utili.

5.1 Analisi vettoriale nel piano

TEOREMA 5.1 (FORMULE DI GAUSS-GREEN (G. GREEN)) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera regolare a tratti e A, B due funzioni di classe $C^1(A)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto contenente \bar{D} , allora vale*

$$(5.1) \quad \int_D \partial_1 B(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} B(x_1, x_2) dx_2 \quad \int_D \partial_2 A(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\partial^+ D} A(x_1, x_2) dx_1$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema supponendo che sia possibile descrivere il dominio nei seguenti due modi, cioè che esistano quattro funzioni continue e di classe C^1 a tratti tali che

$$D = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (a, b), c(x_1) < x_2 < d(x_1)\} = \{(x_1, x_2) : a(x_2) < x_1 < b(x_2), x_2 \in (c, d)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Per dimostrare la tesi verificheremo direttamente l'uguaglianza degli integrali che compaiono in (5.1). Cominciamo dal primo integrale in due dimensioni. Grazie alle proprietà del dominio D e alle formule di riduzione degli integrali possiamo scrivere che

$$\int_D \partial_1 B(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_c^d \left[\int_{a(x_2)}^{b(x_2)} \partial_1 B(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 = \int_c^d [B(b(x_2), x_2) - B(a(x_2), x_2)] dx_2$$

e, analogamente, vale

$$\int_D \partial_2 A(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left[\int_{c(x_1)}^{d(x_1)} \partial_2 A(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 = \int_a^b [A(x_1, d(x_1)) - A(x_1, c(x_1))] dx_1$$

L'integrale di linea richiede un po' di lavoro in più, infatti dobbiamo scrivere una parametrizzazione, regolare a tratti e correttamente orientata, del bordo. Per

quanto abbiamo ipotizzato su D possiamo affermare che $\partial^+ D = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i = \bigcup_{i=1}^4 \eta_i$ dove gli archi regolari sono descritti dalle seguenti parametrizzazioni

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \{\phi_1(t) = (t, c(t)) : t \in [a, b]\} & \phi'_1(t) &= (1, c'(t)) \\
 \gamma_2 &= \{(b, t) : t \in [c(b), d(b)]\} & \phi'_2(t) &= (0, 1) \\
 \gamma_3 &= \{\phi_3(t) = (-t, d(-t)) : t \in [-b, -a]\} & \phi'_3(t) &= (-1, -d'(-t)) \\
 \gamma_4 &= \{\phi_4(t) = (a, -t) : t \in [-d(a), -c(a)]\} & \phi'_4(t) &= (0, -1) \\
 \eta_1 &= \{\psi_1(t) = (t, c) : t \in [a(c), b(c)]\} & \psi'_1(t) &= (1, 0) \\
 \eta_2 &= \{\psi_2(t) = (b(t), t) : t \in [c, d]\} & \psi'_2(t) &= (b'(t), 1) \\
 \eta_3 &= \{\psi_3(t) = (-t, d) : t \in [-b(d), -a(d)]\} & \psi'_3(t) &= (-1, 0) \\
 \eta_4 &= \{\psi_4(t) = (a(-t), -t) : t \in [-d, -c]\} & \psi'_4(t) &= (-a'(-t), -1)
 \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di integrale di linea di una forma differenziale abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial^+ D} A(x_1, x_2) dx_1 &= \sum_i \int_{\gamma_i} A(x_1, x_2) dx_1 = \int_a^b A(t, c(t)) dt - \int_{-b}^{-a} A(-t, d(-t)) dt = \int_a^b A(t, c(t)) dt + \int_b^a A(s, d(s)) ds = \int_a^b [A(t, c(t)) - A(t, d(t))] dt \\
 \int_{\partial^+ D} B(x_1, x_2) dx_2 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\eta_i} B(x_1, x_2) dx_2 = \int_c^d B(b(t), t) dt - \int_{-d}^{-c} B(a(-t), -t) dt = \int_c^d B(b(t), t) dt + \int_d^c B(a(t), t) dt = \int_c^d [B(b(t), t) - B(a(t), t)] dt
 \end{aligned}$$

le ultime relazioni scritte completano la dimostrazione delle formule (5.1). ■

TEOREMA 5.2 (DEL ROTORE (G.G. STOKES)) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio aperto con frontiera regolare a tratti e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale definito su un aperto A contenente D , allora vale*

$$\int_D [\text{rot}(F)]_3 dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} [F \cdot T](x_1, x_2) ds$$

DIMOSTRAZIONE. Come noto vale

$$\text{rot}(F) = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = (0, 0, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

quindi la terza componente del vettore rotore è $[\text{rot}(F)]_3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$. Grazie alle formule (5.1) (pensando $B = F_2$ e $A = F_1$) possiamo scrivere

$$\int_D [\text{rot}(F)]_3 dx_1 dx_2 = \int_D (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = \int_{\partial^+ D} [F \cdot T](x_1, x_2) ds$$

e l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di integrale di linea, quindi l'affermazione è provata. ■

TEOREMA 5.3 (DELLA DIVERGENZA (J.C.F. GAUSS)) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio aperto con frontiera regolare a tratti e $\mathbf{F} \in C^1(A, \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale definito su un aperto A contenente D , allora*

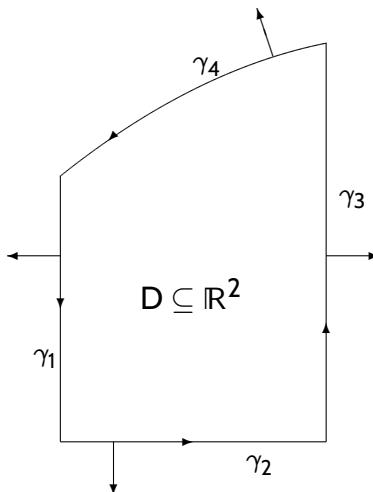
$$(5.2) \quad \int_D \operatorname{div}(\mathbf{F})(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} [\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}](x_1, x_2) ds$$

DIMOSTRAZIONE. Anche il teorema della divergenza segue dalle formule di Gauss-Green, infatti ponendo $(B, A) = \mathbf{F}$ le (5.1) sommate ci permettono di scrivere

$$\int_D \operatorname{div}[\mathbf{F}](x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_D [\nabla \cdot \mathbf{F}](x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_D (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial^+ D} F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \int_{\partial^+ D} (-F_2, F_1) \cdot (T_1, T_2) ds = \int_{\partial^+ D} (F_1, F_2) \cdot (-T_2, T_1) ds = \int_{\partial^+ D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

visto che la normale uscente da D , cioè il vettore \mathbf{n} , può essere ottenuto dal vettore \mathbf{T} , il versore tangente alla frontiera ∂D percorsa in senso antiorario, tramite una rotazione di $\pi/2$ in senso orario. \blacksquare

DIMOSTRAZIONE. Includiamo a questo punto della discussione una dimostrazione alternativa del teorema della divergenza nel piano. Per raggiungere lo scopo considereremo un dominio particolarmente semplice descritto dal seguente disegno.



Mettiamo qualche puntino sulle i: innanzitutto supponiamo che la frontiera del dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sia una curva chiusa semplice, unione di quattro curve di classe

C^1 aventi le seguenti parametrizzazioni:

$$\gamma_1 = \{(a, -t), t \in [-d(a), -c]\}$$

$$\gamma_2 = \{(t, c), t \in [a, b]\}$$

$$\gamma_3 = \{(b, t), t \in [c, d(c)]\}$$

$$\gamma_4 = \{(-t, d(-t)), t \in [-b, -a]\}$$

con $d \in C^1[a, b]$ funzione strettamente crescente tale che $d(x_1) \geq c$.

Osserviamo subito che D è un dominio normale rispetto ad entrambe le variabili e che possiede un solo "lato" non rettilineo: γ_4 . Le varie frecce rappresentate nel disegno indicano i versori normali esterni al dominio su γ_i , $i = 1, \dots, 4$, e il verso antiorario di percorrenza del bordo ∂D , come espresso anche dalle parametrizzazioni dei singoli cammini. Entriamo nel vivo della seconda dimostrazione ricordando la definizione di alcuni oggetti che useremo. Scrivendo il campo vettoriale per esteso $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ possiamo scrivere la sua divergenza per esteso nel seguente modo

$$\operatorname{div}(F(x_1, x_2)) = (\nabla \cdot F(x_1, x_2)) = \partial_1 F_1(x_1, x_2) + \partial_2 F_2(x_1, x_2)$$

Inoltre possiamo scrivere i versori n_i ($i = 1, \dots, 4$), le normali uscenti dal dominio sui tratti che compongono la frontiera ∂D . Dal disegno segue immediatamente che

$$n_1 = (-1, 0) \quad n_2 = (0, -1) \quad n_3 = (1, 0)$$

Il calcolo di n_4 è leggermente più elaborato, poiché $\gamma_4 = \{(-t, d(-t)), t \in [-b, -a]\}$, sappiamo calcolare facilmente il versore tangente alla curva che si scrive nel seguente modo

$$T_4 = \frac{(-1, -d'(-t))}{\sqrt{1 + |d'(-t)|^2}}$$

a questo punto si ottiene il versore normale alla curva semplicemente scambiando le componenti e cambiandone di segno una nel seguente modo

$$n_4 = \frac{(-d'(-t), 1)}{\sqrt{1 + |d'(-t)|^2}}$$

ci si può convincere che sia la scelta giusta provando a ragionare sulla figura precedente o scrivendo la matrice relativa alla rotazione di $\pi/2$ in senso orario. A questo punto possiamo cominciare a scrivere per esteso gli integrali coinvolti in (5.2). Usando il fatto che D è un dominio normale rispetto ad entrambe le direzioni degli assi coordinati e le proprietà di additività dell'integrale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \cdot F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_D (\partial_1 F_1(x_1, x_2) + \partial_2 F_2(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_D \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_D \partial_2 F_2(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{d(x_1)} \partial_2 F_2(x_1, x_2) dy \right) dx_1 + \int_c^{d(a)} \left(\int_a^b \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 + \int_{d(a)}^{d(b)} \left(\int_{d^{-1}(x_2)}^b \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \end{aligned}$$

Si noti, nell'ultimo passaggio, l'uso della funzione d^{-1} , l'inversa di d , per scrivere l'integrale di $\partial_1 F_1$ integrando prima in x_1 e poi in x_2 .

Ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale, le proprietà di additività e usando la sostituzione $y = d(x)$ nell'ultimo termine, otteniamo le seguenti relazioni

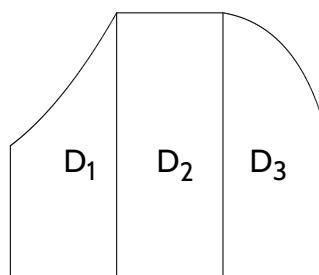
$$\begin{aligned}
 \int_D \operatorname{div}(F(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 &= \int_a^b (F_2(x_1, d(x_1)) - F_2(x_1, c)) dx_1 + \int_c^{d(a)} (F_1(b, x_2) - F_1(a, x_2)) dx_2 + \int_{d(a)}^b \int_{d^{-1}(x_2)}^b \partial_1 F_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
 &= \int_a^b -F_2(x_1, c) dx_1 + \int_c^{d(a)} F_1(b, x_2) dx_2 + \int_c^{d(a)} -F_1(a, x_2) dx_2 + \int_a^b F_2(x_1, d(x_1)) dx_1 + \int_{d(a)}^b (F_1(b, x_2) - F_1(d^{-1}(x_2), x_2)) dx_2 \\
 &= \int_a^b -F_2(x_1, c) dx_1 + \int_c^{d(b)} F_1(b, x_2) dx_2 + \int_c^{d(a)} -F_1(a, x_2) dx_2 + \int_a^b (F_2(x_1, d(x_1)) - F_1(x_1, d(x_1)) d'(x_1)) dx_1
 \end{aligned}$$

A questo punto procediamo con l'integrale curvilineo. Ricordando la definizione di integrale di linea e che ∂D è unione di 4 curve regolari, possiamo scrivere le seguenti uguaglianze.

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} (F(x_1, x_2) \cdot n) ds &= \int_{-d(a)}^{-c} -F_1(a, -t) dt + \int_a^b -F_2(t, c) dt + \int_c^{d(b)} F_1(b, t) dt + \int_{-b}^{-a} \frac{-F_1(-t, d(-t)) d'(-t) + F_2(-t, d(-t))}{(1 + |d'(-t)|^2)^{1/2}} (1 + |d'(-t)|^2)^{1/2} dt \\
 &= \int_c^{d(a)} -F_1(a, s) ds + \int_a^b -F_2(t, c) dt + \int_c^{d(b)} F_1(b, t) dt + \int_a^b (F_2(s, d(s)) - F_1(s, d(s)) d'(s)) ds
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche il cambio di variabile $s = -t$ in alcuni degli integrali di linea (si ricordi che gli integrali di linea che non coinvolgono il versore tangente non cambiano di segno cambiando parametrizzazione). Dal confronto delle uguaglianze ottenute segue la tesi. ■

OSSERVAZIONE 5.4 Dopo aver provato il teorema (per ben due volte!) possiamo fare alcune semplici osservazioni. Il caso di un triangolo è un caso particolare dell'enunciato provato, basta considerare la funzione d affine con $d(a) = c$. Si noti che nella dimostrazione abbiamo fatto uso dell'invertibilità di d : se d non è strettamente crescente (o decrescente) è possibile ugualmente usare la dimostrazione precedente spezzando il dominio in maniera opportuna, come nel disegno che segue.



In generale vogliamo ricondurci, in qualche modo, al caso trattato nel teorema 5.3 e per farlo procediamo nel seguente modo. Consideriamo tutti i punti $\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$ della frontiera di D che delimitano i vari tratti di classe C^1 e tracciamo le rette parallele agli assi coordinati passanti per ognuno dei punti p_i . In questo

modo abbiamo tracciato un reticolo irregolare sul nostro dominio, e D resta suddiviso in rettangoli interni e sottodomini con tratti curvilinei. Osserviamo che il teorema della divergenza vale su tutti questi nuovi sottodomini ottenuti, nel caso siano dei rettangoli o dei domini come quelli considerati nei precedenti disegni (si veda la proposizione 5.3). Poiché l'integrale della divergenza è la somma degli integrali sui sottodomini (per l'additività dell'integrale), mentre nei vari integrali curvilinei di flusso si elidono tutti i contributi "interni", la tesi è provata, almeno per tutti i domini del piano per cui si sappia fare la divisione descritta sopra.

A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per generalizzare il teorema di Poincaré agli aperti semplicemente connessi del piano.

TEOREMA 5.5 *Sia F un campo vettoriale di classe $C^1(A, \mathbb{R}^2)$ definito in un aperto A semplicemente connesso. Allora F è conservativo se e solo se è irrotazionale in A .*

DIMOSTRAZIONE. La condizione necessaria segue dal teorema 4.10. Occorre provare la condizione sufficiente che è equivalente a provare che, per ogni curva regolare a tratti, chiusa e semplice γ , risulta

$$\int_{\gamma} F \cdot T ds = 0$$

e applicare il teorema 4.8 che caratterizza i campi conservativi. Fissata γ , sia $D \subset A$ il dominio limitato che ha γ come frontiera. Tale dominio esiste perché A "non ha buchi". L'esistenza di D può essere dimostrata rigorosamente e questo risultato prende il nome di teorema di Jordan. Supponiamo che γ abbia orientamento antiorario. Dal teorema di Stokes

$$\int_{\gamma} F \cdot T ds = \int_{\partial^+ D} F \cdot T ds = \int_D [\text{rot}(F)]_3 dx_1 dx_2 = 0$$

e l'ultimo integrale vale zero perché F è irrotazionale. ■

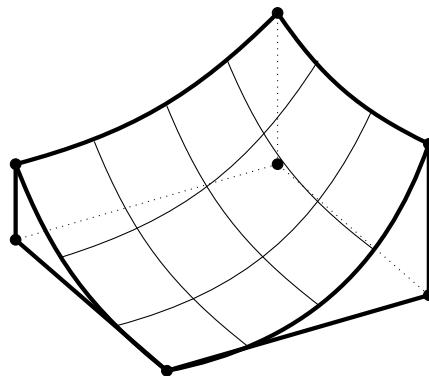
5.2 Analisi vettoriale nello spazio

Adesso possiamo enunciare il teorema della divergenza nella sua versione più generale.

TEOREMA 5.6 (DELLA DIVERGENZA (DI M.V. OSTROGRADSKIJ E J.C.F. GAUSS)) *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera di classe C^1 a tratti e sia F un campo vettoriale di classe $C^1(A; \mathbb{R}^n)$ con A un aperto contenente la chiusura di D , allora vale*

$$(5.3) \quad \int_D \text{div}[F](x) dx = \int_D \nabla \cdot F(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial D} (F \cdot n)(x) d\sigma$$

DIMOSTRAZIONE. da scrivere ■



OSSERVAZIONE 5.7 Se Σ il sostegno di una superficie regolare con rappresentazione parametrica $x : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $x(u) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ biunivoca tra D e Σ allora $x(\partial D) = \partial \Sigma$. Se $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$ è una rappresentazione parametrica della frontiera ∂D allora $x(\gamma(t))$ è una rappresentazione parametrica del bordo $\partial \Sigma$.

TEOREMA 5.8 (DEL ROTORE (DI G.G. STOKES)) *Sia (x, D) una superficie regolare semplice di classe C^2 di sostegno $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale definito su un aperto A tale che $\Sigma \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$, allora vale*

$$\int_{\Sigma} [\operatorname{rot}(F) \cdot n](x) d\sigma = \int_{\partial^+ \Sigma} (F \cdot T)(x) ds$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione consiste essenzialmente nello scrivere per esteso i due integrali che compaiono nella tesi, usare attentamente il teorema di derivazione delle funzioni composte, e verificare la loro uguaglianza, grazie al teorema di Stokes nel piano precedentemente provato (teorema 5.2). Cominciamo con l'integrale di superficie

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [\operatorname{rot}(F) \cdot n] d\sigma &= \int_D \operatorname{rot}(F)(x(u)) \cdot (\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)) du \\ &= \int_D [\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1] \cdot (\partial_1 x_2 \partial_2 x_3 - \partial_1 x_3 \partial_2 x_2, \partial_1 x_3 \partial_2 x_1 - \partial_1 x_1 \partial_2 x_3, \partial_1 x_1 \partial_2 x_2 - \partial_2 x_1 \partial_1 x_2) du \\ &= \int_D (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)(\partial_1 x_2 \partial_2 x_3 - \partial_1 x_3 \partial_2 x_2) + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)(\partial_1 x_3 \partial_2 x_1 - \partial_1 x_1 \partial_2 x_3) + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)(\partial_1 x_1 \partial_2 x_2 - \partial_2 x_1 \partial_1 x_2) du \end{aligned}$$

adesso affrontiamo l'integrale di linea, assumendo di avere la seguente parametrizzazione regolare del bordo $\partial^+ D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, con $t \in [a, b]$. Dall'osservazione 5.7 sappiamo che $x(\gamma(t))$ è una parametrizzazione regolare a tratti del bordo di Σ , quindi, ricordando la definizione di integrale di linea, il

teorema di Schwarz e il teorema 5.2, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial^+ \Sigma} (F \cdot T_x) ds &= \int_{\partial^+ \Sigma} F(x(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} x(\gamma(t)) dt = \int_a^b F(x(\gamma(t))) \cdot (\nabla x_1(\gamma(t)) \cdot u'(t), \nabla x_2(\gamma(t)) \cdot u'(t), \nabla x_3(\gamma(t)) \cdot u'(t)) dt \\
 &= \int_a^b (F(x(\gamma(t))) \cdot (\partial_1 x_1(\gamma(t)), \partial_1 x_2(\gamma(t)), \partial_1 x_3(\gamma(t))), F(x(\gamma(t))) \cdot (\partial_2 x_1(\gamma(t)), \partial_2 x_2(\gamma(t)), \partial_2 x_3(\gamma(t))), 0) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_{\partial^+ D} (F \cdot \partial_1 x, F \cdot \partial_2 x, 0) \cdot T_\gamma ds = \int_D \text{rot}(F \cdot \partial_1 x, F \cdot \partial_2 x, 0) \cdot e_3 du = \int_D [\partial_1(F \cdot \partial_2 x) - \partial_2(F \cdot \partial_1 x)] du \\
 &= \int_D [\partial_1(F_1 \partial_2 x_1 + F_2 \partial_2 x_2 + F_3 \partial_2 x_3) - \partial_2(F_1 \partial_1 x_1 + F_2 \partial_1 x_2 + F_3 \partial_1 x_3)] du \\
 &= \int_D [\nabla F_1 \partial_1 x_1 \partial_2 x_1 + F_1 \partial_{12} x_1 + \nabla F_2 \partial_1 x_1 \partial_2 x_2 + F_2 \partial_{12} x_2 + \nabla F_3 \partial_1 x_1 \partial_2 x_3 + F_3 \partial_{12} x_3 - \nabla F_1 \partial_2 x_3 - F_1 \partial_{12} x_1 - \nabla F_2 \partial_2 x_1 \partial_1 x_2 - F_2 \partial_{12} x_2 - \nabla F_3 \partial_2 x_1 \partial_1 x_3 - F_3 \partial_{12} x_3] du \\
 &= \int_D [(\partial_1 F_1 \partial_1 x_1 + \partial_2 F_1 \partial_1 x_2 + \partial_3 F_1 \partial_1 x_3) \partial_2 x_1 + (\partial_1 F_2 \partial_1 x_1 + \partial_2 F_2 \partial_1 x_2 + \partial_3 F_2 \partial_1 x_3) \partial_2 x_2 + (\partial_1 F_3 \partial_1 x_1 + \partial_2 F_3 \partial_1 x_2 + \partial_3 F_3 \partial_1 x_3) \partial_2 x_3 \\
 &\quad - (\partial_1 F_1 \partial_2 x_1 + \partial_2 F_1 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_1 \partial_2 x_3) \partial_1 x_1 - (\partial_1 F_2 \partial_2 x_1 + \partial_2 F_2 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_2 \partial_2 x_3) \partial_1 x_2 - (\partial_1 F_3 \partial_2 x_1 + \partial_2 F_3 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_3 \partial_2 x_3) \partial_1 x_3] du \\
 &= \int_D [\partial_2 F_1 \partial_1 x_1 \partial_2 x_1 + \partial_3 F_1 \partial_1 x_3 \partial_2 x_1 + \partial_1 F_2 \partial_1 x_1 \partial_2 x_2 + \partial_3 F_2 \partial_1 x_3 \partial_2 x_2 + \partial_1 F_3 \partial_1 x_1 \partial_2 x_3 + \partial_2 F_3 \partial_1 x_2 \partial_2 x_3 - \partial_2 F_1 \partial_2 x_1 \partial_1 x_1 \\
 &\quad - \partial_3 F_1 \partial_2 x_3 \partial_1 x_1 - \partial_1 F_2 \partial_2 x_1 \partial_1 x_2 - \partial_3 F_2 \partial_2 x_3 \partial_1 x_2 - \partial_1 F_3 \partial_2 x_1 \partial_1 x_3 - \partial_2 F_3 \partial_2 x_2 \partial_1 x_3] du
 \end{aligned}$$

confrontando con l'integrale calcolato precedentemente abbiamo la tesi. ■

TEOREMA 5.9 (Alcune identità utili) Date $u, w \in C^2(\Omega)$ e $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ valgono le seguenti identità

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \Delta w(x) dx &= \int_{\partial \Omega} \partial_n w d\sigma \\
 \int_{\Omega} u \text{div}(F) dx &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial \Omega} u F \cdot n d\sigma \\
 \int_{\Omega} u \Delta w dx &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx + \int_{\partial \Omega} u \partial_n w d\sigma \\
 \int_{\Omega} [u \Delta w - w \Delta u] dx &= + \int_{\partial \Omega} [u \partial_n w - w \partial_n u] d\sigma
 \end{aligned}$$

TEOREMA 5.10 Siano A un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^3 e F un campo vettoriale di classe $C^1(A, \mathbb{R}^3)$. Allora F è conservativo se e solo se è irrotazionale.

6 equazioni differenziali

In questo capitolo riportiamo alcuni enunciati (non tutti completi di dimostrazione) relativi alla teoria di base delle equazioni differenziali ordinarie, tale presentazione della teoria è largamente lacunosa: di fatto contiene i soli risultati le cui dimostrazioni vengono presentate a lezione. Uno qualsiasi dei testi indicati in bibliografia è sicuramente necessario per una visione organica e completa dello studio delle equazioni differenziali ordinarie.

Nella seconda sezione discutiamo in dettaglio un certo numero di esercizi con i quali intendiamo rivisitare parte della teoria o accennare a qualche risultato più avanzato (alcune delle metodologie presentate hanno validità molto più ampia di quella del singolo esercizio in esame). Infine, nella terza parte, proponiamo alcuni risultati classici relativi all'equazione di Poisson, cioè ad una delle più "semplici" equazioni alle derivate parziali.

6.1 esistenza (ed unicità) di soluzioni

In questi appunti vogliamo studiare il problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, ovvero il seguente problema differenziale

$$(6.1) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove la funzione u è l'incognita del problema, mentre f , u_0 e t_0 sono noti. In particolare vogliamo provare che (6.1) possiede un'unica soluzione (ovviamente se alcune ipotesi sono verificate!) e di tale importante risultato forniremo due differenti dimostrazioni.

Cominciamo con alcuni risultati tecnici utili alla dimostrazione del nostro teorema di esistenza ed unicità.

PROPOSIZIONE 6.1 *Sia f una funzione continua, allora u è soluzione di classe C^1 di (6.1) se e solo se u è una soluzione continua della seguente equazione integrale*

$$(6.2) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che u sia una soluzione di classe C^1 di (6.1), allora per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)ds = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds$$

da cui segue la tesi.

Viceversa se u è una soluzione continua di (6.2) abbiamo che f composta con u è ancora una funzione continua e, sempre per il teorema fondamentale del calcolo integrale, segue che u è di classe C^1 essendo una primitiva di una funzione continua, inoltre abbiamo che

$$u(t_0) = u_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, u(s))ds = u_0 \quad \text{e} \quad u'(t) = \frac{d}{dt} \left[u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds \right] = f(t, u(t))$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

TEOREMA 6.2 (T.H. GRONWALL) *Siano c una costante reale non negativa e $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue e non negative tali che*

$$v(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \right| \quad \forall t \in (a, b)$$

Allora

$$v(t) \leq ce^{|U(t,t_0)|} \quad \text{dove} \quad U(t, t_0) = \int_{t_0}^t u(s)ds$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo osservando che la funzione $U(t, t_0)$ è la primitiva della funzione continua u nulla in $t = t_0$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale garantisce l'esistenza di una tale funzione. Consideriamo $t > t_0$ e poniamo

$$z(t) = c + \left| \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \right| = c + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$$

a causa della non negatività di u e v . Dalla precedente definizione, dalla continuità delle funzioni integrande e dall'ipotesi segue che

$$z'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)z(t)$$

il che implica che

$$\frac{d}{dt} [z(t)e^{-U(t, t_0)}] = e^{-U(t, t_0)}[z'(t) - z(t)] \leq 0$$

Dunque abbiamo provato che $z(t)e^{-U(t, t_0)}$ è una funzione non crescente, da questa informazione ricaviamo che

$$z(t)e^{-U(t, t_0)} \leq z(t_0) = c$$

da cui la tesi. Il caso $t < t_0$ si prova (più o meno) in maniera analoga. ■

TEOREMA 6.3 (DELLE ITERAZIONI SUCCESSIVE (C.E. PICARD & E.L. LINDELÖF)) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto con $(t_0, u_0) \in A$ e $f \in C(A, \mathbb{R})$. Siano $r_1, r_2 > 0$ due costanti reali tali che il rettangolo $R = [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2]$ sia contenuto nell'aperto A e che esista $L > 0$ tale che

$$|f(t, u) - f(t, w)| \leq L|u - w|$$

per ogni $t \in [t_0 - r_1, t_0 + r_1]$ e $u, w \in [u_0 - r_2, u_0 + r_2]$.

Posto $M = \max_R |f(t, u)|$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che il problema di Cauchy (6.1) possiede un'unica soluzione $u \in C^1[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, con $\varepsilon = \min\{r_1, r_2/M\}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo provato precedentemente che (6.1) è equivalente all'equazione integrale (6.2), sfrutteremo questa caratterizzazione per dimostrare l'esistenza del problema differenziale mostrando l'esistenza di un unico punto fisso dell'equazione integrale. La strategia che seguiremo consiste nei seguenti passi

- l'equazione integrale (6.2) permette di costruire una successione per ricorrenza di soluzioni approssimate,
- la successione definita converge uniformemente ad una funzione, soluzione di (6.2),
- la soluzione trovata è l'unica soluzione del problema di Cauchy (6.1).

i. Definiamo una successione di funzioni per ricorrenza, nel seguente modo

$$\begin{cases} u_0(t) = u_0 \\ u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_k(s))ds \end{cases}$$

e cerchiamo di studiarne le proprietà salienti usando dei ragionamenti per induzione. Prima di tutto dobbiamo mostrare che le funzioni u_k sono tutte definite su uno stesso intervallo non vuoto, su cui studieremo le proprietà di convergenza della successione. Per fare questo dovremo (eventualmente) restringere R in modo da essere sicuri che il grafico di tutti i termini della successione viva in uno stesso rettangolo, sempre centrato nel punto (t_0, u_0) , interamente contenuto in A . Osserviamo subito che

$$|u_1(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq M\varepsilon$$

quindi $|u_1(t) - u_0| \leq r_2$ se $\varepsilon = \min\{r_1, r_2/M\}$, cioè restingendo (solo se necessario) un po' il rettangolo R . Se pensiamo che la precedente diseguaglianza valga per u_k , cioè che $|u_k(t) - u_0| \leq r_2$ per ogni $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ segue che

$$|u_{k+1}(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq M\varepsilon$$

perché stiamo supponendo che il grafico di u_k si trovi in R , e poiché tutti i termini della successione (per induzione) verificano la stessa diseguaglianza, abbiamo provato che tutte le funzioni della successione sono definite in $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, con $\varepsilon = \min\{r_1, r_2/M\}$.

ii. Per provare la convergenza della successione di funzioni proveremo la seguente maggiorazione

$$(6.3) \quad |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq M \frac{L^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

per induzione. Osserviamo subito che (6.3), per $k = 0$, si riduce a

$$|u_1(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_0)| ds \leq M|t - t_0|$$

ed è vera per il conto precedente. Per provare il passo induttivo ragioniamo come segue

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t M \frac{L^{k-1} |s - t_0|^k}{k!} ds = M \frac{L^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

(si noti che nella terza diseguaglianza abbiamo usato l'ipotesi induttiva). A questo punto possiamo provare che la successione converge, mostrando che converge totalmente la serie degli incrementi successivi. Infatti vale

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \sum_{j=1}^k (u_{j+1}(t) - u_j(t))$$

allora, grazie alla (6.3), abbiamo che

$$\|u_{k+1} - u_k\|_\infty = \sup_{|t - t_0| \leq \varepsilon} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq M \frac{L^k \varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}$$

il che ci permette di ottenere che

$$\|u_{k+p} - u_k\|_\infty \leq \|u_{k+p} - u_{k+p-1}\|_\infty + \dots + \|u_{k+1} - u_k\|_\infty \leq \frac{M}{L} \sum_{j=k}^{k+p} \frac{(L\varepsilon)^{j+1}}{(j+1)!} \leq \frac{M}{L} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{(L\varepsilon)^{j+1}}{(j+1)!}$$

essendo la serie convergente la sua coda è infinitesima per $k \gg 1$, quindi la successione è di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_\infty)$ con $X = C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, che è uno spazio metrico completo, quindi possiamo concludere che esiste $\bar{u} \in X$ tale che

$$\|u_k - \bar{u}\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

per concludere che \bar{u} è soluzione di (6.2) (e quindi di (6.1)) dobbiamo mostrare che si può passare al limite nella formulazione integrale, sappiamo che

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) ds$$

e che

$$u_{k+1}(t) \rightarrow \bar{u}(t) \quad \text{per ogni } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$$

inoltre vale

$$0 \leq \left| \int_{t_0}^t [f(s, u_k(s)) - f(s, \bar{u}(s))] ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s)) - f(s, \bar{u}(s))| ds \leq \int_{t_0}^t L |u_k(s) - \bar{u}(s)| ds \leq L \|u_k - \bar{u}\|_\infty |t - t_0| \leq L\varepsilon \|u_k - \bar{u}\|_\infty$$

e siccome la successione converge uniformemente, per $k \rightarrow +\infty$, troviamo che

$$\bar{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{u}(s)) ds$$

e l'esistenza di (almeno) una soluzione è provata.

iii. L'unicità della soluzione è una conseguenza del teorema di Gronwall (teorema 6.2): supponiamo che esistano u e w due soluzioni distinte dell'equazione differenziale

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

con f funzione lipschitziana (di costante L) nella seconda variabile e che soddisfano il dato iniziale

$$u(t_0) = u_0 \quad w(t_0) = w_0$$

Possiamo applicare il teorema 6.2 alla funzione $h(t) = |u(t) - w(t)| \geq 0$. Infatti vale

$$h(t = |u(t) - w(t)|) = \left| (u_0 - w_0) + \int_{t_0}^t [f(s, u(s)) - f(s, w(s))] ds \right| \leq |u_0 - w_0| + L \int_{t_0}^t |u(s) - w(s)| ds = |u_0 - w_0| + L \left| \int_{t_0}^t h(s) ds \right|$$

quindi segue che

$$|u(t) - w(t)| \leq |u_0 - w_0| e^{L|t-t_0|}$$

Quest'ultima diseguaglianza prova il problema di Cauchy (6.1) (con l'ipotesi di lipschitzianità) possiede un'unica soluzione, infatti se $u(0) = w(0)$ seguirebbe che $0 \leq |u(t) - w(t)| \leq |u_0 - w_0| e^{L|t-t_0|} = 0$, cioè $u(t) = w(t)$ per ogni t !

La precedente diseguaglianza mostra anche che soluzioni aventi dato iniziale "vicino" evolvono restando "ragionevolmente" vicine, infatti se $|u_0 - w_0| \leq \varepsilon$ otteniamo che $0 \leq |u(t) - w(t)| \leq \varepsilon e^{L|t-t_0|}$. Quindi la soluzione dipende con continuità dal dato iniziale. ■

A questo punto inseriamo una seconda versione del teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy.

TEOREMA 6.4 (A.L. CAUCHY & R.O.S. LIPSCHITZ) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto con $(t_0, u_0) \in A$ e $f \in C(A, \mathbb{R})$. Siano $r_1, r_2 > 0$ due costanti reali tali che il rettangolo $R = [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times [u_0 - r_2, u_0 + r_2]$ sia contenuto nell'aperto A e che esista $L > 0$ tale che*

$$|f(t, u) - f(t, w)| \leq L|u - w|$$

per ogni $t \in [t_0 - r_1, t_0 + r_1]$ e $u, w \in [u_0 - r_2, u_0 + r_2]$ (per brevità nel seguito diremo che f è una funzione lipschitziana nella seconda variabile).

Posto $M = \max |f(t, u)|$ in R , allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che il problema di Cauchy (6.1) possiede un'unica soluzione $u \in C^1(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, con $\varepsilon < \min\{r_1, r_2/M, 1/L\}$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione consiste essenzialmente nel provare che la formulazione integrale (6.2) ha un'unica soluzione. Introduciamo lo spazio metrico

$$X = \{u \in C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] : \sup |u(t) - u_0| \leq r_2\}$$

dotato della distanza dell'estremo superiore, cioè

$$d(u, w) = \sup |u(t) - w(t)| \quad \text{per ogni } u, w \in X$$

Questo spazio metrico è completo perché è un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo.

Adesso consideriamo la seguente applicazione definita su X

$$z = T(w) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds$$

Naturalmente z è una funzione continua e vale

$$|z(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, w(s))| ds \leq M|t - t_0| < M\varepsilon < r_2$$

cioè $z \in X$, il che significa che T manda X in sé stesso.

A questo punto il teorema si riduce a provare che T ha un unico punto fisso, e la tesi segue dal provare che T è una contrazione (si veda il teorema ??). Siano $v, w \in X$ e $y = T(v)$, $z = T(w)$, allora possiamo scrivere

$$|y(t) - z(t)| = \left| \int_{t_0}^t [f(s, v(s)) - f(s, w(s))] ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - f(s, w(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |v(s) - w(s)| ds \leq L \varepsilon d(v, w)$$

Si noti che, nel primo membro, $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ è totalmente arbitrario, quindi passando all'estremo superiore nella diseguaglianza otteniamo

$$\sup |y(t) - z(t)| = d(y, z) \leq L \varepsilon d(v, w)$$

cioè

$$d(y, z) = d(T(v), T(w)) \leq L \varepsilon d(v, w)$$

e, siccome per ipotesi $L \varepsilon < 1$, possiamo affermare che l'operatore T possiede un unico punto fisso, cioè che l'equazione integrale (6.2) ha un'unica soluzione, cioè che (6.1) ha un'unica soluzione e la tesi è provata. ■

I teoremi precedentemente discussi mostrano che, sotto opportune ipotesi, il problema di Cauchy per un'equazione differenziale possiede sempre una sola soluzione. Tale soluzione è, però, una soluzione locale, cioè una soluzione definita in un intervallo la cui ampiezza dipende (essenzialmente) dalle proprietà della funzione f e dagli strumenti impiegati nella dimostrazione. In realtà è spesso possibile prolungare tale soluzione su intervalli di ampiezza maggiore, una soluzione che non è ulteriormente prolungabile viene detta globale o massimale. Gli enunciati che seguono mostrano alcuni risultati sulla prolungabilità (o meno) delle soluzioni locali.

TEOREMA 6.5 Consideriamo il problema di Cauchy (6.1) e sia la funzione f definita in $A = (a, b) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, supponiamo inoltre che per ogni compatto $K \subseteq (a, b)$ esistano due costanti $c_i = c_i(K)$, con $i = 1, 2$, tali che

$$|f(t, u)| \leq c_1 + c_2 |u| \quad \text{per ogni } t \in K \text{ e per ogni } u \in \mathbb{R}$$

Allora la soluzione è prolungabile ad una soluzione definita in tutto (a, b) (si noti che non è richiesto che l'intervallo (a, b) sia limitato).

TEOREMA 6.6 Sia u una soluzione massimale di (6.1) definita su (a, b) . Per ogni compatto $K \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ esiste $\delta = \delta(K) > 0$ tale che per ogni $t \in (a + \delta, b - \delta)$ il punto $(t, u(t))$ non appartiene a K .

TEOREMA 6.7 Sia u una soluzione del problema di Cauchy (6.1) e sia la funzione $f \in C^1(A)$ con $A = (a, b) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, supponiamo che esista $c > 0$ tale che

$$|u(t)| \leq c \quad \text{per ogni } t$$

allora la soluzione è prolungabile ad una soluzione definita in tutto (a, b) .

6.2 Sistemi lineari di equazioni differenziali

In questa sezione ci interesseremo di sistemi lineari, cioè di sistemi di equazioni differenziali del seguente tipo

$$(6.4) \quad x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$$

con $A \in C^0((a, b), M_n(\mathbb{R}))$ e $f \in C^0((a, b), \mathbb{R}^n)$, dove abbiamo $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Osserviamo subito che, per i teoremi provati precedentemente tutte le soluzioni del sistema (6.4) sono globali, cioè hanno come dominio tutto l'intervallo (a, b) . Scriviamo anche il relativo sistema lineare omogeneo

$$(6.5) \quad x'(t) = A(t)x(t)$$

come possiamo dedurre dal risultato che segue, i due sistemi sono strettamente collegati tra di loro.

TEOREMA 6.8 *Siano x e y due soluzioni di (6.4), allora la funzione $(x - y)$ è soluzione del sistema omogeneo (6.5).*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione dell'precedente affermazione è, di fatto, una conseguenza diretta della linearità del sistema e dell'operazione di derivazione, infatti abbiamo

$$(x(t) - y(t))' = x'(t) - y'(t) = A(t)x(t) + f(t) - A(t)y(t) - f(t) = A(t)(x(t) - y(t))$$

il che conclude la prova. ■

Il precedente risultato si rivela di una certa importanza nella risoluzione di sistemi lineari, perché indica la strategia che si è rivelata più efficace nella ricerca di soluzioni, tipicamente la strategia si riconduce a determinare tutte le soluzioni del sistema omogeneo a cui poi aggiungere una qualsiasi soluzione del sistema completo, in questa maniera si ottengono tutte le soluzioni del sistema completo.

DEFINIZIONE 6.9 *Siano $\{x_1, \dots, x_n\} \in C^1(a, b)$ un insieme di n funzioni (non tutte nulle), diremo che tali funzioni sono LINEARMENTE DIPENDENTI se esistono n numeri reali $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$ (non tutti nulli), tali che*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j(t) = \lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in (a, b)$$

Diremo che le funzioni sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se la precedente relazione è vera solo nel caso in cui $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Il prossimo risultato che dimostriamo quantifica, in un certo senso, il numero e la struttura delle soluzioni di un sistema lineare ed omogeneo di equazioni differenziali.

TEOREMA 6.10 *Sia $W = \{x \in C^1((a, b), \mathbb{R}^n) \text{ soluzione di } x'(t) = A(t)x(t)\}$, allora W è un sottospazio vettoriale di dimensione n ed esiste un'applicazione lineare e biettiva tra W e \mathbb{R}^n .*

DIMOSTRAZIONE. La strategia della dimostrazione è decisamente semplice: verificheremo rapidamente che W è uno spazio vettoriale, per poi costruiremo l'applicazione richiesta dalla tesi, di cui mostreremo le proprietà di linearità, iniettività e suriettività.

Per rivelare la struttura di W consideriamo $x, y \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione $\phi(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$, per la proprietà di linearità della derivazione e del prodotto tra matrici otteniamo che

$$\phi'(t) = \lambda x'(t) + \mu y'(t) = \lambda A(t)x(t) + \mu A(t)y(t) = A(t)[\lambda x(t) + \mu y(t)] = A(t)\phi(t)$$

quindi $\phi \in W$, e l'insieme si rivela essere un sottospazio vettoriale di $C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$.

Assegnato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e scelto arbitrariamente $t_0 \in (a, b)$, sia $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e definiamo la seguente applicazione

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\longrightarrow W \\ x_0 &\longmapsto T(x_0)(t) := x(t; t_0, x_0) \end{aligned}$$

Osserviamo subito che l'applicazione è ben posta, visto che sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di Picard e Lindelöf, per cui ad ogni punto x_0 dello spazio possiamo associare un'unica funzione di W . Mostriamo che l'applicazione T è lineare: consideriamo due punti distinti $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ e le relative soluzioni $T(x_0)(t) = x(t; t_0, x_0)$ e $T(x_1)(t) = x(t; t_0, x_1)$. Mostrare che l'applicazione è lineare significa verificare che

$$T(\lambda x_0 + \mu x_1)(t) = \lambda T(x_0)(t) + \mu T(x_1)(t) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$$

Siccome, per la linearità dell'operazione di derivazione, vale

$$[\lambda T(x_0)(t) + \mu T(x_1)(t)]' = \lambda [T(x_0)(t)]' + \mu [T(x_1)(t)]' = \lambda A(t)T(x_0)(t) + \mu A(t)T(x_1)(t) = A(t)[\lambda T(x_0)(t) + \mu T(x_1)(t)]$$

e abbiamo anche che

$$[\lambda T(x_0)(0) + \mu T(x_1)(0)] = \lambda x_0 + \mu x_1$$

possiamo concludere che la funzione $\lambda T(x_0)(0) + \mu T(x_1)(0)$ risolve il sistema differenziale (6.5), quindi appartiene allo spazio vettoriale W , inoltre realizza, come dato iniziale, la combinazione lineare $(\lambda x_0 + \mu x_1)$ e per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy possiamo dedurre che

$$T(\lambda x_0 + \mu x_1)(t) = \lambda T(x_0)(t) + \mu T(x_1)(t)$$

infine l'arbitrarietà dei coefficienti λ, μ e dei punti x_0, x_1 prova la linearità dell'operatore T .

L'unicità della soluzione del problema di Cauchy (o la linearità dell'operatore) implica anche che se $x_0 = 0$ allora $T(0)(t) \equiv 0$ per ogni $t \in (a, b)$ e questa proprietà equivale all'iniettività di T , quindi non resta che provare la suriettività, per poter affermare che abbiamo costruito un isomorfismo tra spazi vettoriali.

Sia $x(t) = x(t; t_0, x_0) \in W$ una soluzione del sistema (6.5), ovviamente esiste una n -pla di scalari $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tale che $x_0 = x(t_0) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, dove i vettori $\{e_1, \dots, e_n\}$ costituiscono la base canonica di \mathbb{R}^n . Allora possiamo considerare in W i vettori $\{T(e_1)(t), \dots, T(e_n)(t)\}$, per definizione sappiamo che risolvono il sistema di equazioni differenziali lineare, e per i precedenti ragionamenti anche ogni loro combinazione lineare, per cui possiamo scrivere

$$\lambda_1 T(e_1)(t) + \dots + \lambda_n T(e_n)(t) = T(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)(t) = T(x_0)(t)$$

e (come prima!) l'unicità della soluzione del problema di Cauchy ci permette di dire che $x(t) = \lambda_1 T(e_1)(t) + \dots + \lambda_n T(e_n)(t) = T(x_0)(t)$ ovvero di provare che T è suirettivo, e quindi un isomorfismo. Si noti che dalla dimostrazione deduciamo anche che

$$\dim(W) = n \quad \text{e che} \quad W = \text{span}\{T(e_1)(t), \dots, T(e_n)(t)\}$$

■

Osserviamo che il precedente risultato mostra che l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale di dimensione pari al numero delle equazioni (o al numero delle funzioni incognite), e abbiamo già osservato che la conoscenza di una qualsiasi soluzione del sistema completo ci permette di ottenere tutte le soluzioni del sistema non omogeneo. In un linguaggio un poco più geometrico possiamo dire che W è uno spazio vettoriale e costituisce la giacitura di uno spazio affine rappresentato dalle soluzioni di (6.4).

Osserviamo anche che, in generale, non siamo in grado di risolvere un sistema di equazioni differenziali lineare, tranne il caso in cui la matrice è a coefficienti costanti, cioè $A(t) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il precedente teorema ci dice che se troviamo n soluzioni del sistema linearmente indipendenti allora abbiamo una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni.

DEFINIZIONE 6.11 Siano $\{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme di n soluzioni del sistema omogeneo (6.5), la matrice che si ottiene affiancando le soluzioni x_i come colonne di una matrice

$$X(t) = (x_1(t) | \dots | x_n(t))$$

viene detta matrice di soluzioni.

DEFINIZIONE 6.12 Un sistema di n soluzioni di (6.5) linearmente indipendenti costituiscono un **SISTEMA FONDAMENTALE** di soluzioni. La matrice di soluzioni composta da un sistema fondamentale viene detta **MATRICE FONDAMENTALE**, se tale matrice verifica la relazione $X(t_0) = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diremo che è una **MATRICE FONDAMENTALE SPECIALE** al tempo t_0 . A volte indicheremo una tale matrice usando la notazione $U(t; t_0)$.

Proviamo alcuni risultati utili,

TEOREMA 6.13 Se $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ sono n soluzioni di (6.5), allora la relativa matrice di soluzioni $X(t)$ risolve la seguente equazione differenziale matriciale

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

Analogamente se si considera una matrice $X(t)$ soluzione della precedente equazione differenziale, ogni sua colonna $x_j(t)$ è soluzione del sistema omogeneo (6.5).

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo risultato segue facilmente dalle definizioni di prodotto tra matrici e tra matrice e vettore (il prodotto riga per colonna, per intenderci) e dal fatto che l'operatore di derivazione lavora su ogni singola componente di una matrice, per linearità. Quindi possiamo scrivere

$$A(t) = [A_{jk}(t)]_{j,k=1,\dots,n} \quad X(t) = [X_{jk}(t)]_{j,k=1,\dots,n} \quad X'(t) = [X'_{jk}(t)]_{j,k=1,\dots,n}$$

da cui segue che

$$[X'_{jk}(t)] = X'(t) = A(t)X(t) = [A_{jk}(t)] [X_{jk}(t)] = \left[\sum_{i=1}^n A_{ji}(t) X_{ik}(t) \right]$$

La relazione ottenuta è la dimostrazione delle affermazioni contenute nella tesi. Infatti nel primo caso è sufficiente pensare che la matrice di soluzioni è costruita affiancando le soluzioni come colonne per cui $X_{jk} = (x_k)_j$ è il j -simo elemento della k -sima soluzione, e osservando che la relazione è soddisfatta per k fissato e resta vera al variare dell'indice. La seconda affermazione segue dal fissare k nella precedente uguaglianza matriciale. ■

TEOREMA 6.14 Una famiglia di soluzioni $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ del sistema omogeneo (6.5) è linearmente dipendente in $C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ se e solo se esiste un tempo $\tau \in (a, b)$ tale che i vettori $\{x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)\}$ sono linearmente dipendenti in \mathbb{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Siano $\tau \in (a, b)$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ (non tutti diversi, ma al contempo non tutti nulli) tali che $\lambda_1 x_1(\tau) + \dots + \lambda_n x_n(\tau) = \mathbf{0}$. Allora, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, possiamo dedurre che la funzione $x(t) = [\lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t)]$ è soluzione di (6.5) e assume come dato iniziale, per $t = \tau$, il vettore nullo, quindi $x(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \in (a, b)$. L'implicazione opposta è semplicemente una riscrittura della condizione di dipendenza lineare per $t = \tau$. ■

TEOREMA 6.15 La matrice fondamentale speciale $U(t; t_0)$ del sistema omogeneo (6.5) è l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ X(t_0) = I_n \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la funzione $x(t) = U(t; t_0)x_0$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue facilmente dalla definizione di matrice fondamentale speciale, infatti essendo fondamentale risolve l'equazione differenziale matriciale, il fatto che $U(t_0; t_0) = X(t_0) = I_n$ è una conseguenza del significato di speciale. Infine l'unicità segue (come sempre) dal teorema di Picard e Lindelöf, visto che il sistema è lineare e quindi il campo vettoriale localmente lipschitziano.

Per provare la seconda parte dell'enunciato è sufficiente effettuare un paio di semplici verifiche. Per definizione

$$x(t) = U(t; t_0)x_0 \quad \text{allora} \quad x(t_0) = U(t_0; t_0)x_0 = I_n x_0 = x_0$$

e anche

$$x'(t) = [U(t; t_0)x_0]' = U'(t; t_0)x_0 = A(t)U(t; t_0)x_0 = A(t)x(t)$$

il che conclude la dimostrazione. ■

PROPOSIZIONE 6.16 *Se $X(t)$ una matrice fondamentale speciale del sistema omogeneo (6.5), allora segue che*

$$U(t; t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

DIMOSTRAZIONE. Anche questa proposizione non è particolarmente difficile da dimostrare, infatti dobbiamo verificare che la matrice $U(t; t_0) = X(t)X^{-1}(t_0)$ risolve l'equazione differenziale matriciale e, ricordando il teorema 6.13, abbiamo

$$U'(t; t_0) = X'(t)X^{-1}(t_0) = A(t)X(t)X^{-1}(t_0) = A(t)U(t; t_0)$$

inoltre vale

$$U(t_0; t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0) = I_n$$

e il ragionamento è concluso. ■

TEOREMA 6.17 (FORMULA DI J.M.C. DUHAMEL) *La soluzione del sistema (6.4)*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $A \in C^0((a, b), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ e $f \in C^0((a, b), \mathbb{R}^n)$ (con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), si può rappresentare tramite la seguente espressione

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds$$

dove X è una qualsiasi matrice fondamentale del sistema omogeneo associato (6.5).

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che, detta $X(t)$ una matrice fondamentale del sistema omogeneo, tutte le soluzioni di (6.5) possono essere descritte dalla seguente formula

$$x_{om}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0$$

in cui abbiamo usato i risultati precedenti per avere una matrice fondamentale speciale ed un'espressione che contenga anche l'informazione del dato iniziale del problema di Cauchy che ci interessa risolvere.

Dunque il problema è completamente risolto se riusciamo a costruire una soluzione del sistema completo con dato iniziale nullo. Per fare questo cerchiamo una soluzione imponendo la seguente forma

$$s(t) = X(t)c(t) \quad \text{da cui} \quad s'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t)$$

ricordando che $X(t)$ è una matrice fondamentale e imponendo che la soluzione del sistema completo abbia questa espressione, otteniamo

$$s'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + f(t)$$

semplificando otteniamo il seguente sistema per il vettore incognito $c(t)$

$$c'(t) = X^{-1}(t)f(t) \quad \text{cioè} \quad c(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

il che conclude la dimostrazione. ■

I risultati raccontati in questo paragrafo sono, per necessità, solo l'essenziale dello studio dei sistemi lineari omogenei, dove essenziale significa lo stretto necessario per affrontare la teoria che sarà presentata nelle pagine che seguiranno. Il lettore interessato può, naturalmente, consultare i testi nella bibliografia per soddisfare la sua sete di sapere.

6.3 Sistemi lineari autonomi

Sappiamo che \mathbb{R}^n è uno spazio di Banach, lo spazio delle applicazioni lineari e limitate (o continue) dello spazio in sé è in genere indicato dal simbolo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, in realtà ogni operatore dello spazio può essere rappresentato tramite una matrice quadrata appartenente allo spazio $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, e nel seguito penseremo sempre gli operatori identificati con una matrice.

OSSERVAZIONE 6.18 Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ e definiamo una successione nello spazio delle matrici nel seguente modo

$$A_j := \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} A^k = A^0 + A + \frac{1}{2} A^2 + \dots + \frac{1}{j!} A^j \quad j \in \mathbb{N}$$

notiamo che si tratta di una successione di Cauchy, infatti vale

$$\|A_j\| = \left\| \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

da cui segue che

$$\|A_j - A_{j+p}\| = \left\| \sum_{k=j}^{j+p} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=j}^{j+p} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

l'ultima sommatoria scritta è la coda di una serie convergente, il cui limite è $e^{\|A\|}$, essendo la maggiorazione indipendente dall'indice j e infinitesima per N che tende a $+\infty$, l'affermazione è provata.

DEFINIZIONE 6.19 Definiamo il limite della successione $\{A_j\}$, introdotta nell'osservazione precedente, come **MATRICE ESPONENZIALE** di A

$$e^A := \lim_{j \rightarrow +\infty} A_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

PROPOSIZIONE 6.20 (PROPRIETÀ DELLA MATRICE ESPONENZIALE) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ e e^A la matrice esponenziale risultante, allora

- i. $e^{O_n} = I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$,
- ii. $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ matrici che commutano (cioè $AB = BA$) allora $e^{A+B} = e^A e^B$,
- iii. la matrice esponenziale e^A è sempre invertibile e $[e^A]^{-1} = e^{-A}$,
- iv. $A, C, C^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora $e^{CAC^{-1}} = C e^A C^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. i. Ricordando la definizione di matrice esponenziale e scrivendola, in particolare, per la matrice nulla O_n otteniamo che

$$O_j = I_n + O_n + \frac{1}{2} O_n^2 + \dots + \frac{1}{j!} O_n^j = I_n \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}$$

il che prova l'affermazione.

ii. Sempre ricorrendo alla definizione di matrice esponenziale, ricordando la formula di Newton delle potenze di un binomio e grazie al fatto che $AB = BA$, possiamo scrivere

$$(A + B)_j = \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} (A + B)^k = \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} A^p B^{k-p} = \sum_{k=0}^j \sum_{p=0}^k \frac{A^p}{p!} \frac{B^{k-p}}{(k-p)!}$$

come prima, passando al limite per $j \rightarrow +\infty$, si ottiene la tesi.

iii. Siccome vale $O_n = A - A$, e siccome A e $-A$ commutano, per il punto ii abbiamo che

$$I_n = e^{O_n} = e^A e^{-A} = e^A [e^A]^{-1}$$

iv. Sempre dalla definizione discende che

$$\begin{aligned} (CAC^{-1})_j &= I_n + (CAC^{-1}) + \frac{1}{2} (CAC^{-1})^2 + \dots + \frac{1}{j!} (CAC^{-1})^j = I_n + (CAC^{-1}) + \frac{1}{2} (CAC^{-1})(CAC^{-1}) + \dots + \frac{1}{j!} (CAC^{-1}) \dots (CAC^{-1}) \\ &= I_n + (CAC^{-1}) + \frac{1}{2} CA^2 C^{-1} + \dots + \frac{1}{j!} CA^j C^{-1} = CI_n C^{-1} + (CAC^{-1}) + \frac{1}{2} CA^2 C^{-1} + \dots + \frac{1}{N!} CA^N C^{-1} \\ &= C \left[I_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \dots + \frac{1}{j!} A^j \right] C^{-1} = CA_j C^{-1} \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

la tesi si ottiene per $j \rightarrow +\infty$. ■

PROPOSIZIONE 6.21 *Sia $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, allora l'operatore e^{At} è derivabile in tutto \mathbb{R} e vale*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

Si noti che e^{At} è la matrice fondamentale speciale (con $t_0 = 0$) del precedente sistema! In generale si ha che $U(t; t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto dimostrato nella proposizione precedente possiamo scrivere

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \left[\frac{e^{Ah} - I}{h} \right] e^{At} = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} A^k h^{k-1} \right] e^{At} = \left[A \left(I + \sum_{j=k-1=1}^{+\infty} A^j h^j \right) \right] e^{At} = [A(I + Mh)] e^{At} \xrightarrow{h \rightarrow 0} A e^{At}$$

quindi il limite del rapporto incrementale esiste e vale la formula della tesi. Si noti che abbiamo usato il fatto che At e Ah sono delle matrici che commutano. ■

TEOREMA 6.22 (FORMA CANONICA DI M.E.C. JORDAN) *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ allora è sempre vero che esiste un cambio di base (indicato con C) tale che $M = CBC^{-1}$ con*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_k \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

con $\lambda_j \in \mathbb{C}$ (gli 1 compaiono solo quando $mg(\lambda_j) < ma(\lambda_j)$). Se $\Im(\lambda_j) \neq 0$ allora esiste un indice i per cui vale $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$.

commenti vari, particolare spiegare la questione del rapporto tra matrici in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e relativa diagonizzazione in blocchi (triangolari in \mathbb{C} , "semi-triangolari" in \mathbb{R}).

LEMMA 6.23 *Data $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, risultano equivalenti le seguenti affermazioni*

- i. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At}\|_{\mathcal{L}} = 0$,
- ii. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ per ogni soluzione del sistema $x'(t) = Ax(t)$.

TEOREMA 6.24 (CRITERIO DI STABILITÀ) *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

- i. $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ per ogni soluzione del sistema $x'(t) = Ax(t)$,
- ii. $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$.

TEOREMA 6.25 (CRITERIO DI LIMITATEZZA) *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora ogni soluzione del sistema $x'(t) = Ax(t)$ è limitata se valgono le seguenti,*

- i. $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$,
- ii. ogni autovalore $\lambda \in \sigma(A)$ con $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ è regolare.

TEOREMA 6.26 (CRITERIO DI INSTABILITÀ) *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

- i. $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$ per (quasi) ogni soluzione non banale del sistema $x'(t) = Ax(t)$,
- ii. $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ per almeno un $\lambda \in \sigma(A)$.

6.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

In questo paragrafo vogliamo tentare di descrivere la dinamica generata da un sistema differenziale lineare planare (cioè un sistema di due equazioni in due incognite), quindi un sistema del tipo

$$x(t) = Ax(t) \quad \text{con } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

La discussione si svolgerà in vari punti, analizzando i differenti modi in cui può presentarsi lo spettro della matrice.

PROPOSIZIONE 6.27 *Data $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ abbiamo che*

i. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ma esiste una base di autovettori (l'autovalore λ ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 2), allora nella opportuna base di \mathbb{R}^2 (quella composta dagli autovettori della matrice) vale $A = CBC^{-1} e$

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1} \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad e \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

ii. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e la molteplicità geometrica vale solo 1, allora nella opportuna base di \mathbb{R}^2 vale $A = CBC^{-1} e$

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1} \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad e \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii. Se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, allora nella opportuna base di \mathbb{R}^2 vale $A = CBC^{-1} e$

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1} \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad e \quad e^{Bt} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE. da scrivere

■

6.5 Sistemi non lineari

In queste pagine intendiamo fornire una traccia di studio riguardo alcuni argomenti affrontati a lezione, di carattere un po' più avanzato, che non sempre sono presenti nei testi didattici. In ogni caso tutti gli argomenti dati per noti sono reperibili nei testi citati in bibliografia (in particolare in [?]). Il protagonista indiscusso delle nostre attenzioni sarà il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie autonome

$$(6.6) \quad x'(t) = f(x(t)) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in (a, b)$$

di volta in volta scriveremo le ipotesi più specifiche sul campo vettoriale $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto), sulla dimensione $n \in \mathbb{N}$ del sistema e sull'intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. In alcuni casi è possibile che le ipotesi possano essere leggermente indebolite, ma eviteremo di accanirci nella ricerca della massima generalità... Osserviamo anche che alcune definizioni della sezione precedente si estendono, senza alcuna fatica, a sistemi di dimensione maggiore, in particolare il concetto di regione positivamente invariante, si punto stabile o instabile per linearizzazione e le definizioni di ω -limite e attrattore. Il lettore è, in ogni caso, invitato a riscrivere le definizioni con la notazione corretta.

DEFINIZIONE 6.28 *Il punto $p \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di equilibrio o punto critico (o anche punto singolare) per il campo vettoriale f se $f(p) = 0$, mentre si dice punto regolare se $f(p) \neq 0$.*

Si noti che i punti critici del campo vettoriale f corrispondono alle soluzioni stazionarie di (6.6), sono esattamente i punti di equilibrio del sistema di equazioni differenziali.

TEOREMA 6.29 (DI RETTIFICABILITÀ LOCALE) *Sia $x_0 \in A$ un punto regolare per $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$, allora esistono un aperto $V \subseteq A$ contenente il punto x_0 ed un diffeomeorfismo ψ tra V e un opportuno intorno W di 0 tale che, per ogni $\xi \in V$, la funzione $z(t) = \psi(x(t, \xi))$ risulta essere l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$(6.7) \quad \begin{cases} z'(t) = e_1 \\ z(0) = \psi(\xi) \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si consulti [?]. ■

TEOREMA 6.30 *Un punto stabile (per linearizzazione) è asintoticamente stabile.*

TEOREMA 6.31 (P. HARTMAN E D.M. GROBMAN) *Sia $x_0 \in A$ un punto singolare per f . Se la matrice jacobiana $Jf(x_0)$ è iperbolica, allora esistono un intorno $V \subseteq A$ del punto x_0 ed un omeorfismo ψ tra V e un opportuno intorno W di 0 tale che, per ogni $\xi \in V$, la funzione $z(t) = \psi(x(t, \xi))$ risulta essere l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$(6.8) \quad \begin{cases} z'(t) = Jf(x_0)z(t) \\ z(0) = \psi(\xi) \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si veda, per esempio, [13]. ■

6.6 Alcuni sistemi planari quadratici

Continuiamo lo studio di alcuni (particolarmente significativi) esempi di sistemi di due equazioni differenziali con campo vettoriale (al più) quadratico studiando i modelli di Lotka-Volterra. Nella sezione successiva, facendo tesoro delle osservazioni fatte, cercheremo di inquadrare lo studio di sistemi planari in un quadro teorico più organico e strutturato, per quanto possibile.

Le equazioni di Lotka-Volterra descrivono un sistema ecologico di interazione tra una specie di predatori e una specie di prede su cui facciamo le seguenti ipotesi:

- i. la preda è l'unica risorsa del predatore, in assenza di prede i predatori tendono all'estinzione;
- ii. la velocità di crescita della popolazione dei predatori è legata alla possibilità di predazione, quindi supponiamo che sia proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori, cioè al prodotto del numero di prede per il numero di predatori;

iii. la velocità con cui diminuisce la popolazione delle prede a causa dei predatori è (come sopra) proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori, cioè alla possibilità di essere predati;

iv. il cibo disponibile per le prede è costante (e positivo) in assenza di predatori, quindi la crescita della popolazione di prede è proporzionale alla popolazione stessa (crescita malthusiana).

Indicando con $x(t)$ il numero di prede e con $y(t)$ il numero di predatori all'istante t , e supponendo di poter operare con funzioni sufficientemente regolari, ci riconduciamo a studiare il seguente sistema planare

$$(6.9) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) = x(t)[a - by(t)] \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) = y(t)[cx(t) - d] \end{cases}$$

Tutti i parametri biologici di proporzionalità coinvolti nel sistema sono positivi, cioè $a, b, c, d > 0$, ma difficilmente misurabili in natura: daltronde è vero che tutti gli ecosistemi reali possiedono una complessità maggiore di quello che descrivono le due equazioni differenziali di sopra...

Ricordiamo che siamo interessati esclusivamente a soluzioni non negative e limitate, cioè tali che esista $M > 0$ per cui siano soddisfatte le disequazioni $0 \leq x(t), y(t) \leq M$ per ogni valore di t , quindi ci interessa la dinamica del sistema ristretta nel primo quadrante del piano.

Cominciamo identificando i punti di equilibrio del sistema, cioè le soluzioni (ci interessano solo quelle non negative, ma non ce ne sono altre) del seguente sistema algebrico

$$\begin{cases} x[a - by] = 0 \\ y[cx - d] = 0 \end{cases} \quad \text{che sono} \quad O = (0, 0) \quad \text{e} \quad E = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right)$$

Chiaramente i due equilibri sono due soluzioni stazionarie del sistema (6.9), O è il sistema in assenza di popolazioni mentre E descrive un sistema in cui c'è coabitazione delle due specie biologiche. Notiamo che, al contrario di quanto visto per le singole equazioni del primo ordine, la conoscenza di soluzioni stazionarie non ci permette di dedurre stime a priori sulle altre soluzioni, questo perché la topologia di \mathbb{R}^2 è più ricca (e complicata) di quella di \mathbb{R} e avere un risultato analogo al teorema della barriera per sistemi (teorema ??) è più difficile.

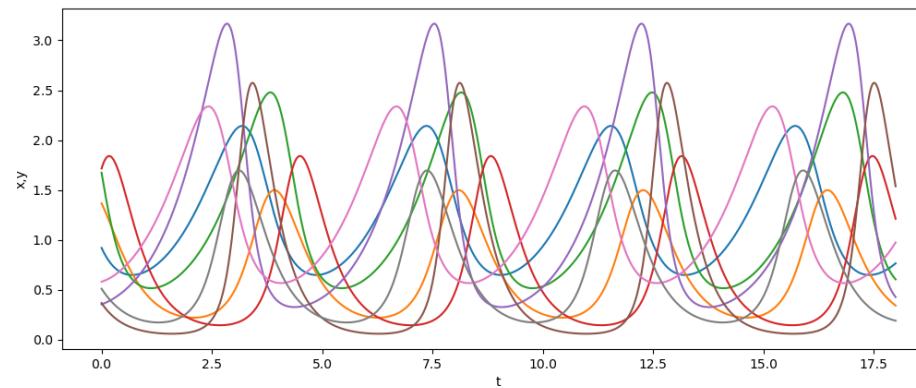
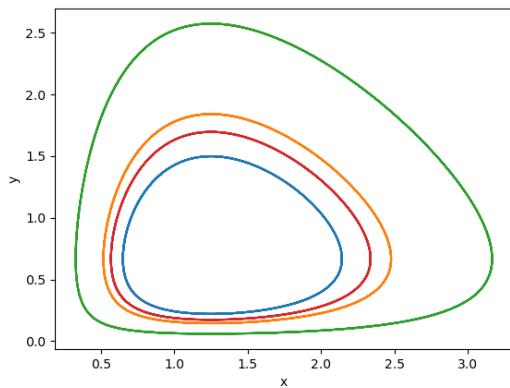
Per studiare la natura dei punti critici trovati calcoliamo la matrice jacobiana del campo vettoriale del sistema nei punti di equilibrio

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{pmatrix} \quad J(O) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \quad J(E) = \begin{pmatrix} 0 & -bd/c \\ ac/b & 0 \end{pmatrix}$$

È immediato accorgersi che O è un punto di sella, visto che la matrice è diagonale e gli autovalori sono discordi, quindi ha un carattere genericamente repulsivo (tranne rispetto alla direzione individuata dal autovettore relativo all'autovalore $-d$, cioè e_2) rispetto alla dinamica del sistema.

$J(E)$ ha due autovalori immaginari (coniugati) puri: per un sistema lineare questo implicherebbe che intorno al punto critico il sistema genera delle traiettorie ellittiche, ma per un sistema non lineare due autovalori immaginari puri non permettono di concludere nulla: il fatto che la parte reale degli autovalori sia nulla rende cruciale l'effetto dei termini di ordine superiore al primo. Per cui non possiamo dire altro, se non che la natura del punto critico deve essere studiata con strumenti più raffinati.

Per il momento effettuiamo alcuni esperimenti numerici, sperando che il calcolatore suggerisca qualcosa di interessante relativamente alla dinamica generata da (6.9). In particolare produciamo alcune orbite e alcuni grafici delle soluzioni del sistema.



Le immagini ottenute sembrano indicare che il sistema generi, più o meno sempre, soluzioni periodiche e, conseguentemente, orbite chiuse nel piano delle fasi, che si svolgono intorno ad un punto di equilibrio che deve essere necessariamente E: questo suggerisce anche che E sia un centro, dinamicamente parlando. Questa osservazione non è in contrasto con quanto detto prima, infatti le orbite non sembrano ellissi, quindi i termini non lineari hanno un ruolo importante nella dinamica del sistema.

Per dimostrare la precedente affermazione possiamo procedere nel seguente modo: consideriamo un generico punto $p \in (0, +\infty)^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ e consideriamo il problema di Cauchy relativo a (6.9) con p come dato iniziale. Osserviamo che, lungo tutti i punti di una traiettoria non stazionaria, almeno una delle due componenti del campo vettoriale tangente deve essere non nulla. Allora, per il teorema della funzione implicita, possiamo supporre che la traiettoria della soluzione sia (intorno a p) il grafico di una funzione $y(x)$, e, per il teorema di derivazione della funzione inversa, possiamo scrivere la seguente equazione a variabili separabili

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y(x)[cx-d]}{x[a-by(x)]} = \frac{y(x)[cx-d]}{x[a-by(x)]} = \frac{\left[\frac{c-d}{x}\right]}{\left[\frac{a-b}{y}\right]} \quad \text{da cui} \quad a\ln(y) - by + d\ln(x) - cx = C_0 \quad (x, y) \in (0, +\infty)^2$$

La relazione ottenuta è l'equazione cartesiana dell'orbita percorsa dalle traiettorie del sistema (6.9), la costante d'integrazione C_0 è determinata scegliendo esplicitamente il punto iniziale p : si noti che le curve ottenute sono ben definite ovunque, questo perché non hanno punti singolari ed è sempre possibile (localmente) poterle descrivere come grafici di funzioni, sempre per il teorema di Dini.

In alternativa è possibile supporre che le orbite siano linee di livello di una funzione $H(x, y) = F(x) + G(y)$ e procedere come segue

$$\frac{d}{dt} [H(x(t), y(t))] = \frac{d}{dt} [F(x(t)) + G(y(t))] = F'(x(t))x'(t) + G'(y(t))y'(t) = F'(x(t))x(t)[a-by(t)] + G'(y(t))y(t)[cx(t) - d] = 0$$

e dal precedente calcolo ricaviamo che, a meno di una costante, deve valere la seguente relazione

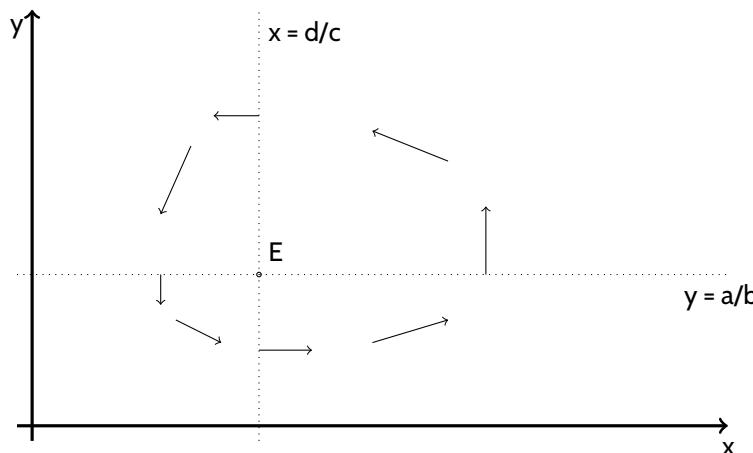
$$F'(x(t)) \frac{x(t)}{[cx(t) - d]} = -G'(y(t)) \frac{y(t)}{[a-by(t)]} = 1$$

da cui possiamo ottenere che

$$F(x) = cx - d \ln(x) \quad \text{e} \quad G(y) = by - a \ln(y) \quad (x, y) \in (0, +\infty)^2$$

riottenendo l'espressione precedente, che descrive analiticamente le curve di livello di H su cui si svolgono le traiettorie del sistema.

Per uno studio più puntuale osserviamo che esistono quattro rette, dette nullocline, lungo le quali una delle componenti del campo vettoriale si annulla: precisamente i due assi e le rette $\{x = d/c\}$ e $\{y = a/b\}$, queste due rette costituiscono il luogo dei punti in cui le orbite hanno vettore tangente orizzontale o verticale e la cui intersezione è il punto critico E . Disegnando alcuni vettori tangenti all'immagine di una soluzione si ottiene un grafico qualitativamente simile al successivo, che dà un'idea del perché le soluzioni abbiano orbita chiusa.



Proviamo a formalizzare i ragionamenti fatti finora: consideriamo il problema di Cauchy relativo a (6.9) con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (p_1, p_2)$ con $p_1 > d/c$ e $p_2 > a/b$, finché la traiettoria resta nel quadrante individuato dalle relazioni $\{x > d/c, y > a/b\}$ abbiamo che $x'(t) < 0$ e $y'(t) > 0$, e da questo ricaviamo che

$$\frac{d}{dt} \ln(x(t)) = \frac{x'(t)}{x(t)} = a - by(t) \leq a - bp_2 = -r < 0 \quad \text{e integrando} \quad \ln(x(t)) - \ln(p_1) \leq -rt$$

esplicitando l'espressione abbiamo che

$$\frac{d}{c} \leq x(t) \leq p_1 e^{-rt}$$

quindi, in tempo finito, x raggiunge il valore d/c e la traiettoria passa nella semistriscia $\{0 < x < d/c, y > a/b\}$. Ripetendo questo argomento è possibile dimostrare che la soluzione ruota, in senso antiorario, intorno ad E e siccome deve muoversi su una curva di livello chiusa della funzione coercitiva H , deve descrivere un'orbita chiusa, percorrendo una traiettoria periodica. Il calcolo precedente ha un'ulteriore implicazione, poiché vale

$$\frac{d}{dt} \ln(x(t)) = a - by(t) \quad \text{e integrando troviamo} \quad \ln(x(t)) - \ln(p_1) = at - b \int_0^t y(s) ds$$

scegliendo $t = \tau$ il periodo della traiettoria, per cui vale $x(\tau) = p_1$, otteniamo la media della popolazione dei predatori $\bar{y} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau y(s)ds = \frac{a}{b}$.

In modo analogo, sfruttando l'altra equazione del sistema, è possibile calcolare la media \bar{x} .

6.7 Sistemi non lineari planari

Consideriamo il sistema planare del primo ordine

$$(6.10) \quad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Classificare il punto di equilibrio O significa determinare se le soluzioni generate dal problema di Cauchy con un dato iniziale vicino al punto critico tendono ad avvicinarsi o meno all'equilibrio. In generale possiamo ragionare nel seguente modo: supponiamo di avere a che fare con un sistema del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

con $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, che possieda un equilibrio $P(x_0, y_0)$. Il fatto che P sia un punto critico del campo vettoriale, cioè un equilibrio del sistema, significa che risolve il sistema di equazioni, $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Sia (x_*, y_*) un dato iniziale tale che $(x_0 - x_*)^2 + (y_0 - y_*)^2 < \varepsilon$ e $x(t), y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy, allora possiamo scrivere

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) = f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0) \simeq \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x(t) - x_0, y(t) - y_0) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) = g(x(t), y(t)) - g(x_0, y_0) \simeq \nabla g(x_0, y_0) \cdot (x(t) - x_0, y(t) - y_0) \end{cases}$$

dove abbiamo approssimato la differenza usando l'espansione in polinomio di Taylor al primo ordine e trascurando gli ordini successivi. Ovviamente questa approssimazione è ragionevole solo per tempi piccoli, cioè fino a quando possiamo pensare la traiettoria vicina all'equilibrio. Introducendo le variabili $\xi(t) = x(t) - x_0$ e $\eta(t) = y(t) - y_0$ il precedente sistema diventa

$$\begin{cases} \xi'(t) = \partial_1 f(x_0, y_0) \xi(t) + \partial_2 f(x_0, y_0) \eta(t) \\ \eta'(t) = \partial_1 g(x_0, y_0) \xi(t) + \partial_2 g(x_0, y_0) \eta(t) \end{cases}$$

o, in notazione matriciale,

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}' = J_{(f,g)}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

Diremo che l'equilibrio P è stabile se $(\xi(t), \eta(t)) \rightarrow P$, e siccome il sistema è lineare è facile verificare che il comportamento asintotico della traiettoria $(\xi(t), \eta(t))$ dipende dagli autovalori di $J_{(f,g)}(x_0, y_0)$. Questa definizione di stabilità non è l'unica presente in letteratura ed è, più precisamente, detta stabilità

per linearizzazione, in particolare vale che l'equilibrio è stabile se gli autovalori della matrice hanno parte reale negativa, altrimenti l'equilibrio può non essere stabile.

Nello studio di equazioni differenziali in una sola incognita è frequente ottenere esistenza di soluzioni globali grazie al teorema della barriera (vedi il teorema ??), cioè tramite una stima a priori che ci assicura che l'immagine della soluzione è contenuta in un insieme della retta reale su cui il secondo membro dell'equazione è globalmente lipschitziano.

Avendo a che fare con sistemi di equazioni differenziali questa idea deve essere rivisitata e opportunamente generalizzata. In particolare vedremo come concetti quali limitatezza delle soluzioni, stime a priori e proprietà di positività delle soluzioni sono differenti sfaccettature di una stessa idea: tutti queste proprietà qualitative di alcune traiettorie dei sistemi richiedono che la soluzione abbia valori in opportuni sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 . Una possibile strategia che dimostra la validità di questo genere di proprietà si basa sul concetto di regione invariante. Nel seguito delle note ci concentreremo (quasi esclusivamente) su sistemi planari.

DEFINIZIONE 6.32 Un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è **POSITIVAMENTE INVARIANTE** per un sistema di equazioni differenziali se ogni soluzione $(x(t), y(t))$ che verifica $(x(t_0), y(t_0)) \in D$ per qualche t_0 è tale che $(x(t), y(t)) \in D$ per ogni $t \geq t_0$.

Analogamente è possibile definire insiemi negativamente invarianti. Un sottoinsieme è invariante se è positivamente e negativamente invariante. L'intersezione e l'unione di insiemi positivamente (o negativamente) invarianti è ancora positivamente (o negativamente) invariante. In quel che segue, siamo interessati all'evoluzione per tempi successivi all'istante iniziale e quindi ci interesseremo solo di insiemi positivamente invarianti.

DEFINIZIONE 6.33 Il luogo dei punti $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ o $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ si dice **NULLOCLINA** del sistema e individua i punti dello spazio in cui il campo f è parallelo ad uno degli assi coordinati. Si noti che le intersezioni di 2 nulloclina (relative alle differenti componenti del vettore f) individuano punti di equilibrio del sistema.

TEOREMA 6.34 (I.O. BENDIXSON E H.C.R. DULAC) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto semplicemente connesso e $(f, g) \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale, se esiste una funzione h di classe $C^1(D)$ tale che

$$\operatorname{div}(h(x, y)f(x, y), h(x, y)g(x, y)) \neq 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in D$$

allora non esistono orbite periodiche di (6.10) contenute nell'aperto D .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che esista un'orbita chiusa semplice $(x(t), y(t))$ di (6.10) con sostegno γ contenuto nell'aperto D . Essendo il dominio semplicemente connesso sappiamo che $\gamma = \partial E$ con $E \subseteq D$ aperto, dal teorema della divergenza segue che

$$\int_E [\partial_1(hf)(x, y) + \partial_2(hg)(x, y)] dx dy = \int_{\partial E} h(f(x, y), g(x, y)) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\gamma} h(x(t), y(t)) (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \cdot \mathbf{n}(t) dt = \int_a^b h(x(t), y(t)) (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t))) \cdot (y'(t), -x'(t)) dt = 0$$

La relazione ottenuta è in contraddizione con le ipotesi, infatti il campo $h(x, y)(f(x, y), g(x, y))$ ha divergenza sempre differente da 0 in D , quindi il suo integrale in E deve risultare o positivo o negativo. ■

DEFINIZIONE 6.35 *Nel seguito chiameremo **ciclo limite** la traiettoria (o orbita) di una soluzione periodica di un sistema di equazioni differenziali.*

TEOREMA 6.36 (J.H. POINCARÉ E I.O. BENDIXSON) *Sia $(f, g) \in C^1(D)$ un campo vettoriale nel piano con punti singolari isolati e supponiamo che $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sia positivamente invariante. Allora le traiettorie determinate dalle soluzioni di (6.10) con dato iniziale in D tendono*

- i. o a un punto singolare,*
- ii. o a un'orbita periodica,*
- iii. o all'unione di punti singolari e di curve (omocline e/o eterocline) che connettono tali punti.*

Noi dimostreremo una versione parziale di questo importante risultato, cioè il seguente enunciato.

TEOREMA 6.37 (J.H. POINCARÉ E I.O. BENDIXSON) *L'orbita descritta da una soluzione periodica di un sistema planare contenuta in un dominio D semplicemente connesso contiene almeno un punto critico.*

DIMOSTRAZIONE. DA SCRIVERE

■