$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{n+\cos^2 n} = 5$$

$$0 \leq \left| \frac{5n}{n+\cos^2 n} - 5 \right| = \left| \frac{\cancel{5n} - \cancel{5n} - 5\cos^2 n}{n+\cos^2 n} \right| = \frac{\overset{\leq 5}{5\cos^2 n}}{n+\cos^2 n} \leq$$

$$\leq \frac{5}{\underbrace{n+\cos^2 n}_{\geq n}} \leq \frac{5}{n} \longrightarrow 0$$

$\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$ per $n\to+\infty$, visto ieri.

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

<u>Def.</u>
- Una succ^{ne} $\{a_n\}$ è <u>limitata superiormente</u> se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{a_n\}$ è <u>limitata inferiormente</u> se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\{a_n\}$ è <u>limitata</u> se è limitata sia superiorm. che inferiorm. o, equivalentemente, se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\{a_n\} \text{ è limitata} \iff \exists M \text{ t.c. } |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ se $|a_n| \leq M$, allora $-M \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ se $B \leq a_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{\quad}$ $|a_n| \leq \max\{|A|, |B|\}$

vedi Laboratorio

$-5 \leq a_n \leq +2 \quad \rightarrow \quad |a_n| \leq 5$

DEF Una succ^{ne} il cui limite vale zero si dice **infinitesima**.

TEOREMA Il prodotto di una successione infinitesima per una succ^{ne} limitata è infinitesimo.

In formule:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ |b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = 0$$

DIM

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n|\,\underbrace{|b_n|}_{\leq M} \leq M|a_n| \longrightarrow 0 \qquad \square$$

+ teor. dei carab.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sin^4(n^2) - 5\cos n}{n^2+2} = 0$$

Infatti $\dfrac{1}{n^2+2} \longrightarrow 0$

(da vedere) $\qquad 0 \leq \dfrac{1}{n^2+2} \overset{n\geq 1}{\leq} \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$

$3\sin^4 n^2 - 5\cos n$ è limitata.

$$|3\sin^4(n^2) - 5\cos n| \overset{\text{dis. triang}}{\leq} |3\sin^4(n^2)| + |5\cos n| \leq$$

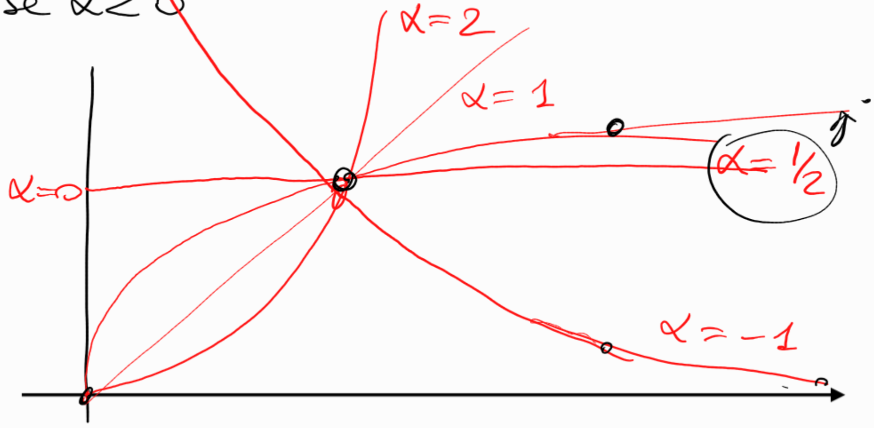
$$\leq 3 + 5 = 8$$

Limiti di potenze.

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

perché $n^0 = 1 \quad \forall n \geq 1$

$f(x) = x^\alpha \quad (x>0)$



$\boxed{\alpha>0}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

Fisso $M>0$, cerco k t.c. $n^\alpha > M \quad \forall n>k$.

$$n^\alpha > M \underset{\boxed{\alpha>0}}{\iff} n > M^{1/\alpha} =: k$$

$\boxed{\alpha<0}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

Fisso $\varepsilon>0$, cerco k t.c. $\quad |n^\alpha| < \varepsilon \ \forall n>k$.

$$|n^\alpha| < \varepsilon \iff n^\alpha < \varepsilon \underset{\alpha<0}{\iff} n > \varepsilon^{1/\alpha} =: k$$

In realtà si può provare che

se $a_n \to +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0. \end{cases}$

Verifichiamo la prima:

$\boxed{\alpha>0}$ Fissiamo $M>0$, voglio mostrare che $(a_n)^\alpha > M$ definitivam.

$(a_n)^\alpha > M \underset{\alpha>0}{\iff} a_n > M^{1/\alpha}$ e questo è vero definitivamente perché $a_n \to +\infty$

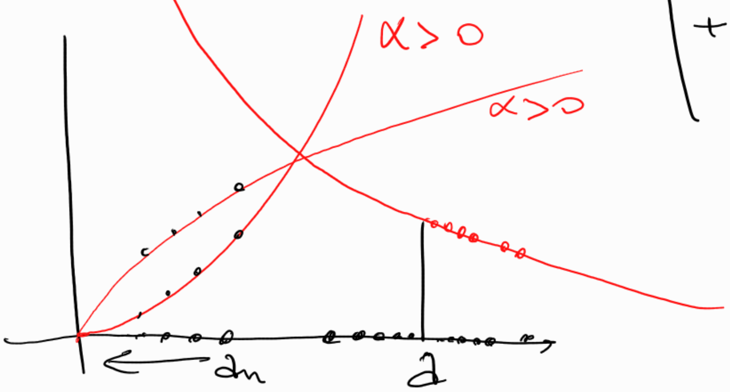
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^4+3n^2+2} = +\infty$$

$$n^4+3n^2+2 \geq n^4 \longrightarrow +\infty$$

$$\Longrightarrow (n^4+3n^2+2)^{1/3} \longrightarrow +\infty$$

Supponiamo ora che $\{a_n\}$ sia una succ^{ne} di numeri positivi che tende a zero.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$



Per es. se $\underline{\alpha>0}$, $a_n \to 0$ $(a_n>0)$ $\Longrightarrow (a_n)^\alpha \to 0$

Fissato $\varepsilon>0$, voglio provare che $(a_n)^\alpha < \varepsilon$ definitivam.

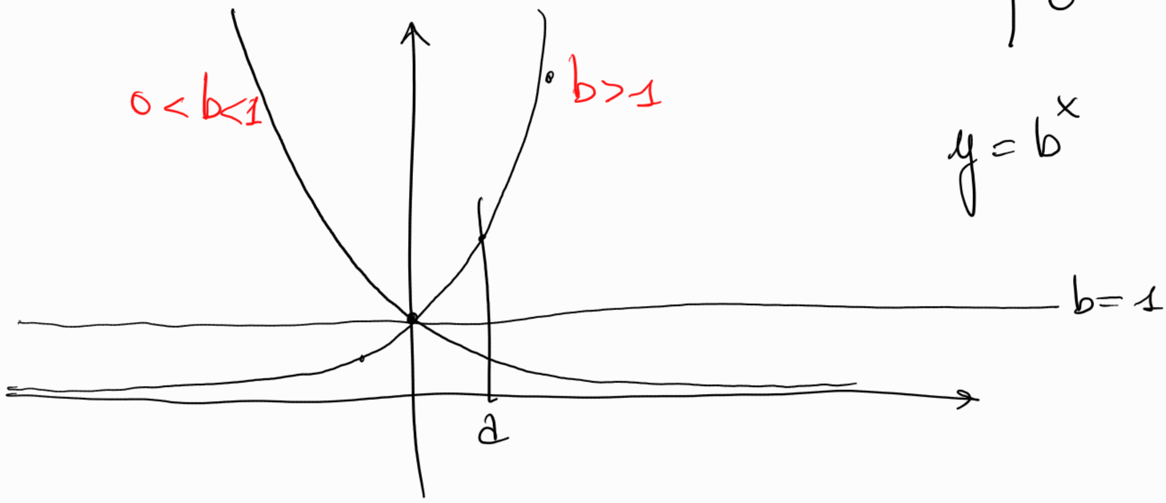
$$(a_n)^\alpha < \varepsilon \underset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} a_n < \varepsilon^{1/\alpha}$$ vero definitivamente perché $a_n \to 0$.

Infine, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (a_n)^\alpha = a^\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$b>0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} \boxed{+\infty \quad \text{se} \quad b>1} \\ 1 \quad \text{se} \quad b=1 \\ 0 \quad \text{se} \quad 0<b<1 \end{cases}$$



Sia $b>1$
$a_n \to +\infty$ Voglio provare $b^{a_n} \to +\infty$.

Fissato $M>0$, voglio verificare che $b^{a_n} > M$ definitivamente

$$b^{a_n} > M \underset{b>1}{\iff} a_n > \log_b M$$ vera def^{te} perché $a_n \to +\infty$

se $0<b<1$
$a_n \to +\infty$ Voglio provare $b^{a_n} \to 0$

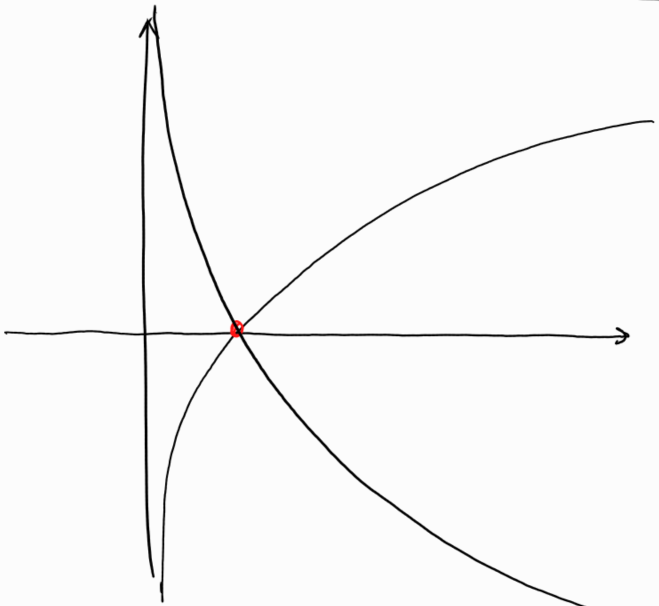
Fissato $\varepsilon>0$, voglio verificare che $|b^{a_n}| < \varepsilon$ def^{te}.

$$|b^{a_n}| < \varepsilon \iff b^{a_n} < \varepsilon \underset{0<b<1}{\iff} a_n > \log_b \varepsilon$$ vero def^{te} perché $a_n \to +\infty$.

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^a \quad \forall b>0$.

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{3}{n}} = 1$$



$y = \log_b x$

Sia $a_n \to +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \log_b a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ -\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$$

Se $a_n > 0$, $a_n \to 0$ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \log_b a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } b>1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \end{cases}$

se $a_n \to a > 0$ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \log_b a_n = \log_b a$ $\quad \forall b>0,\ b\neq 1$

TEOREMA (aritmetica dei limiti)

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$

2) $\lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\ell + \beta m$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(Linearità del limite)

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell m$.

4) se $m \neq 0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}$

5) se $m \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$.