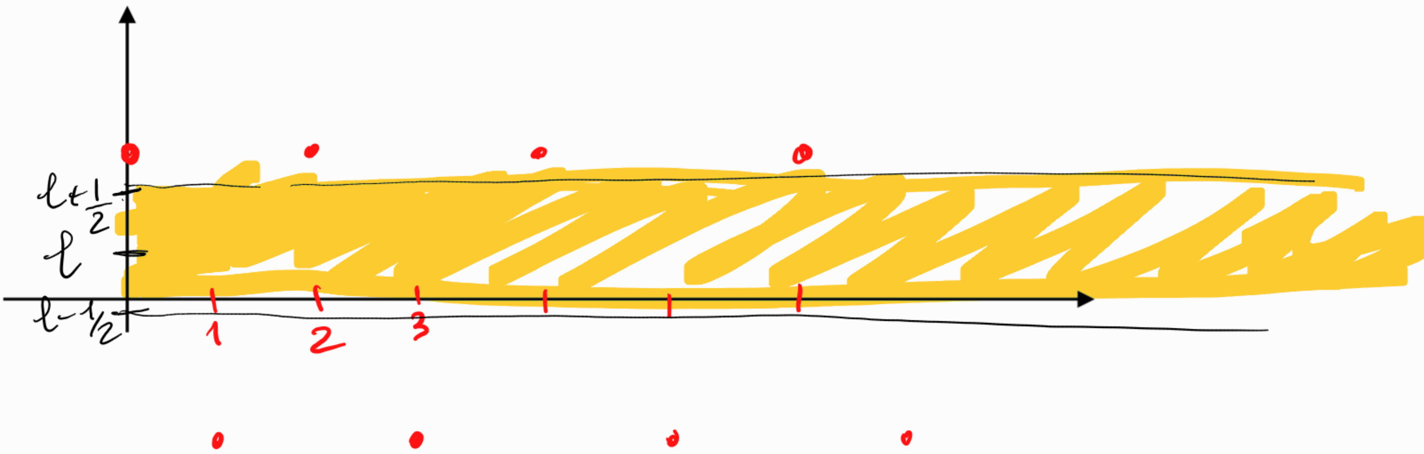
Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, $\{a_n\}$ si dice **convergente**

se $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to -\infty$, $\{a_n\}$ si dice **divergente**

se $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$, $\{a_n\}$ si dice **indeterminata**

Esempi di successioni indeterminate:

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



Mostriamo che $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Supponiamo per assurdo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Non può essere $\ell = \pm\infty$, perché è limitata

Dovrebbe essere $\ell \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > k$

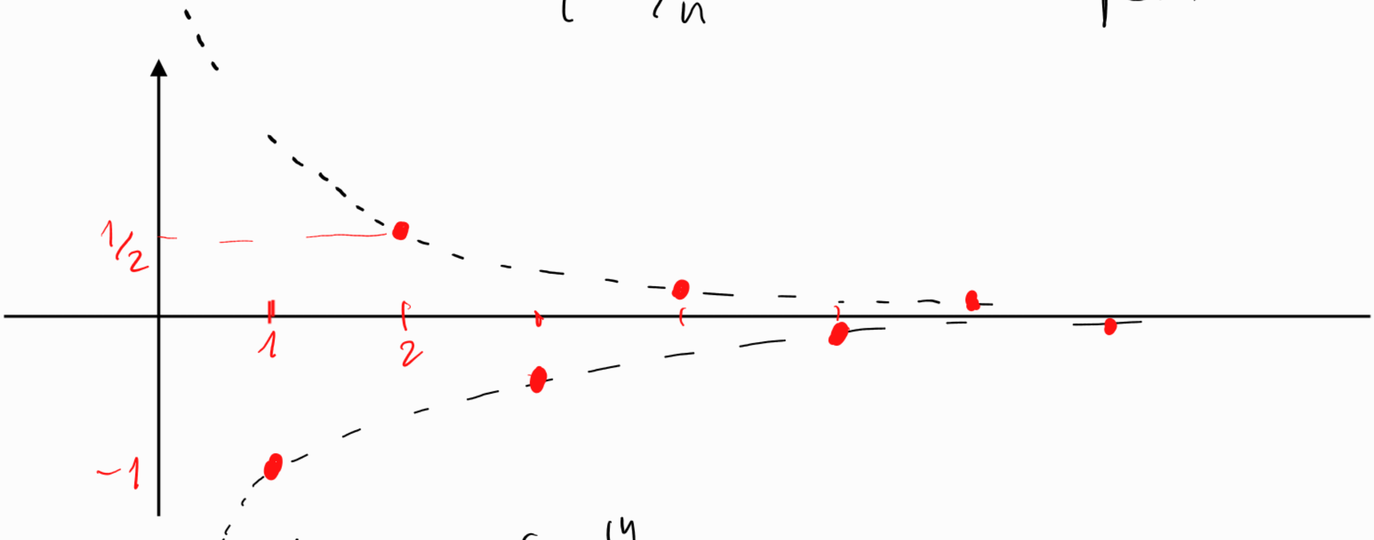
Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, vorrebbe dire che a_n è definitivamente compresa tra $\ell - \frac{1}{2}$ e $\ell + \frac{1}{2}$, un intorno di ampiezza 1.

Ma ciò è assurdo perché a_n prende infinite volte i valori $+1$ e -1, che distano tra loro 2. $\Rightarrow$ Assurdo

$\Rightarrow$ La successione non ha limite.

Consideriamo invece

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} -1/n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 1/n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

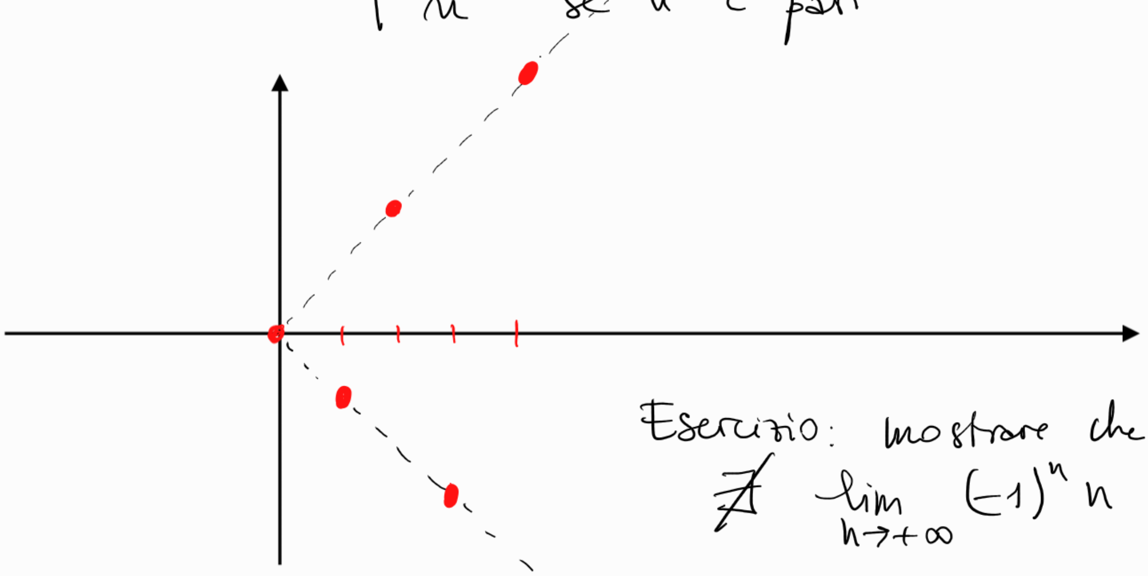


Si mostra che $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$

Fix $\varepsilon > 0$, cerco k t.c. $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n > k$.

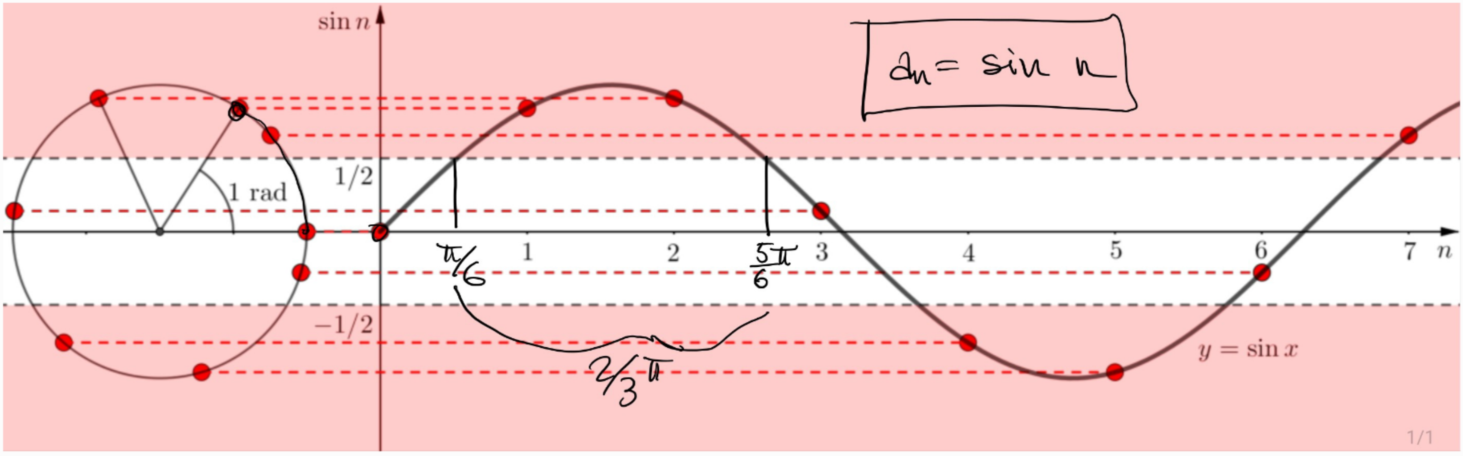
$$\underbrace{\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right|}_{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: k$$

$$a_n = (-1)^n n = \begin{cases} -n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$



Esercizio: mostrare che $\nexists \lim_{n \to +\infty} (-1)^n n$

La successione $a_n = \sin n$ non ha limite, infatti assume infinite volte valori $> 1/2$, e infinite volte valori $< -1/2$. Quindi non può ammettere limite.



Esempio importante:

Sia $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = \begin{cases} +\infty & \text{(caso 1)} \quad \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \text{ (succ}^{\text{ne}}\text{ costante)} \\ 0 & \text{(caso 3)} \quad \text{se } -1<b<1 \\ \nexists & \text{(caso 4)} \quad \text{se } b\le -1. \end{cases}$$

Verifica:

1) se $b>1$, verifichiamo $b^n \to +\infty$.

Fissato $M>0$, cerco k t.c. $b^n > M$ $\forall n>k$.

$$b^n > M \iff n > \log_b M =: k$$

Infatti, se $b>1$, $\log_b x$ è una funz. crescente, quindi

$$x>y \iff \log_b x > \log_b y$$

$\square$

3) se $|b|<1$, cioè $-1<b<1$. $\lim_{n\to+\infty} b^n = 0$. Verifica.

Se $b=0$ è ovvio. (succ$^{\text{ne}}$ costante).

Consideriamo $0<|b|<1$. Fisso $\varepsilon>0$, cerco k t.c.

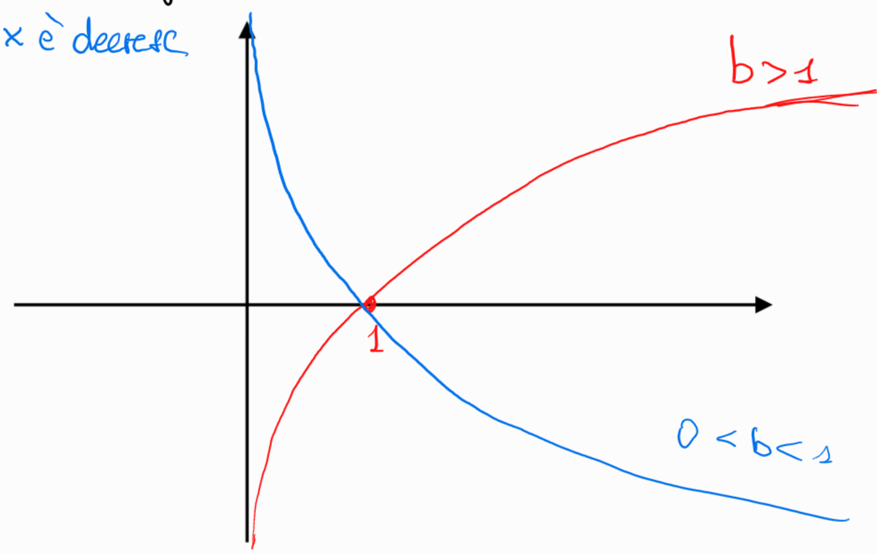
$$|b^n| < \varepsilon$$

$$|b^n| < \varepsilon \iff |b|^n < \varepsilon \iff n > \log_{|b|} \varepsilon =: k$$

$\overset{\shortparallel}{|b|^n}$

N.B. $\log_{|b|} x$ è decresc.

$\log_b x \qquad b>0,\ b\neq 1$



4) se $b \leq -1$,

b^n non ammette limite in quanto assume valori ≥ 1 per n pari e ≤ -1 per n dispari.

Proprietà dei limiti.

Teorema (Unicità del limite)

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Allora $\lim_{n \to +\infty} a_n$, se esiste, è unico.

Dim Supponiamo, per assurdo, che $\exists\, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$ con $\ell_1 \neq \ell_2$ t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_1 \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_2 .$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_1 \Leftrightarrow \forall\, V_1$ intorno di ℓ_1 $a_n \in V_1$ definitivamente

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_2 \Leftrightarrow \forall\, V_2$ " " ℓ_2 $a_n \in V_2$ "

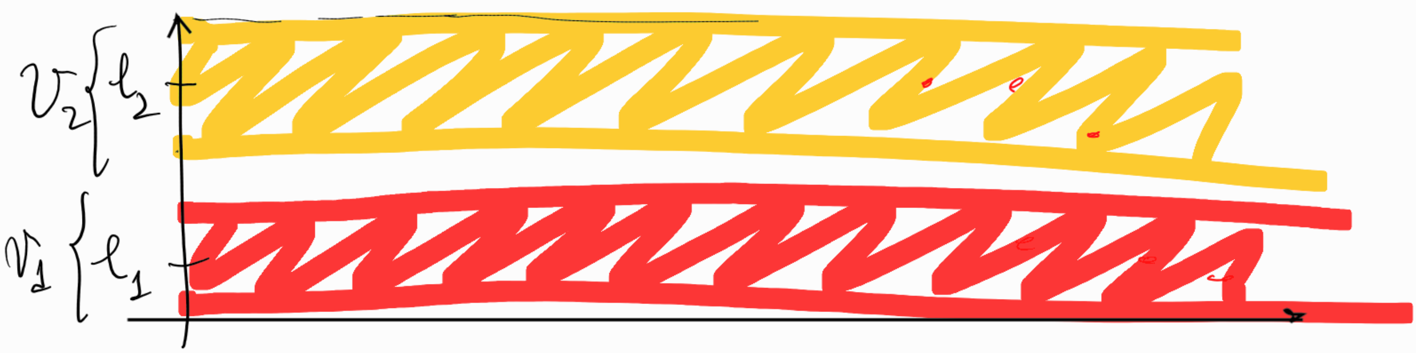
Posso trovare V_1 intorno di ℓ_1 e V_2 intorno di ℓ_2 t.c.

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Scelti tali intorni, dovremmo avere $a_n \in V_1$ definitivam.
$a_n \in V_2$ " .

$\Rightarrow$ definitivamente $a_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$. assurdo. $\square$

Se per es. $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell_1 < \ell_2$



OSS Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$.

Sia $\{\tilde{a}_n\}$ una successione ottenuta da $\{a_n\}$ modificando un numero finito di termini (per es. i primi 1000 termini). Allora $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

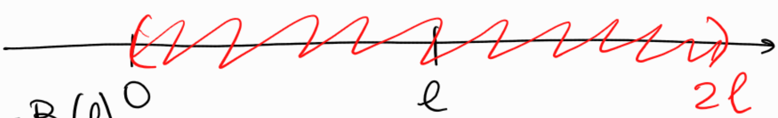
Infatti $a_n = \tilde{a}_n$ definitivamente.

TEOREMA della Permanenza del segno

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in (0,+\infty]$, allora $a_n > 0$ definitivamente
" " $\in [-\infty, 0)$ " $a_n < 0$ "

Dim. Se $\ell \in (0,+\infty]$, esiste un intorno V di ℓ costituito solo da numeri positivi.

Se $\ell \in (0,+\infty)$, prendo



$V = (0, 2\ell) = B_\ell(\ell)$

se $\ell = +\infty$ prendo $V = (0, +\infty]$

Poiché $a_n \in V$ definitivamente, si ha $a_n > 0$ def^{te}. $\square$

OSS A volte si usa nel seguente modo:

Se $a_n \geq 0$ definitivamente
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$
$\Longrightarrow \ell \in [0,+\infty]$

Infatti, se fosse $\ell < 0$, si avrebbe def^{te} $a_n < 0$, contro l'ipotesi.

Attenzione: la seguente implicazione è falsa

$a_n > 0$ def^{te}
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$
$\Longrightarrow \ell > 0$ FALSO.

Infatti $a_n = 1/n > 0$, ma $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Quello che posso dire è che

$a_n > 0$ def^{te}
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$
$\Longrightarrow \ell \geq 0$

Il teorema della permanenza del segno si può usare anche prendendo un altro numero al posto di zero.

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell > 5 \Longrightarrow a_n > 5$ def^{te}

< 3 $a_n < 3$ def^{te}.

Teorema del confronto (dei carabinieri)

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre succ^{ni} t.c.

$\boxed{a_n \leq b_n \leq c_n}$ definitivamente

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Dim.

$$\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{n}} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}$$

Si applica il teor. dei carabinieri $\Rightarrow \frac{\sin n}{n} \to 0$.

OSS Il teorema dei carabinieri viene spesso usato così.

Poiché abbiamo provato che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n - \ell| = 0,$$

per provare questo basterà provare questo

$$0 \leq |a_n - \ell| \leq c_n$$

basterà trovare c_n t.c. valga questa disug. e $c_n \to 0$

Per esempio, ridimostriamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

Dim. teor. carabinieri

Sia $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$. Fissiamo un arbitrario intorno V di ℓ.

Sappiamo che, definitivamente:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \in V \\ c_n \in V \\ a_n \leq b_n \leq c_n \end{array}\right| \Longrightarrow b_n \in V \qquad \square$$

OSS Se $\ell = +\infty$ oppure $\ell = -\infty$, di carabiniere ne basta 1.

TEOREMA "del carabiniere"

Se $a_n \leq b_n$ def^{te}, allora:

1) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

2) se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, " $\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$.

Esempio $\lim_{n\to+\infty} (5-2\cos^2 n)(n^2-1) = +\infty$

OSS
$$n^2-1 \longrightarrow +\infty$$
$$5-2\cos^2 n \geq 3$$

$$(5-2\cos^2 n)(n^2-1) \underset{n\geq 1}{\geq} 3(n^2-1) \longrightarrow +\infty.$$