Intorni di $x \in \mathbb{R}$:

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y-x| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

Intorni di $+\infty$

$(M, +\infty)$ $\qquad M \in \mathbb{R}$

Intorni di $-\infty$

$(-\infty, M)$

Una proprietà $P(n)$ è vera definitivamente se è vera da un certo indice in poi, ossia se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$$P(n) \text{ è vera } \forall n > \bar{n}$$

oppure : $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n > k$.

Voglio definire cosa significa $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$

Per es $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} (n^2-5) = +\infty$.

DEF. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali.

Sia $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Diremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$,

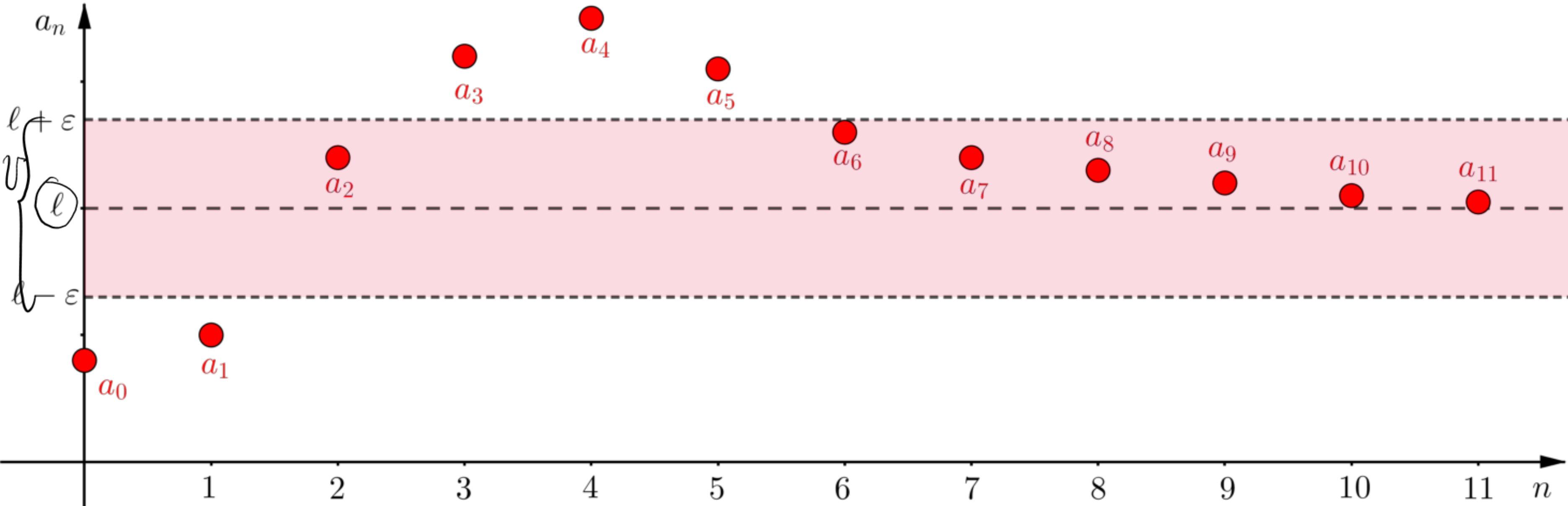
oppure che $a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$ se

$\forall\, U$ intorno di ℓ si ha $a_n \in U$ definitivamente per $n \to +\infty$

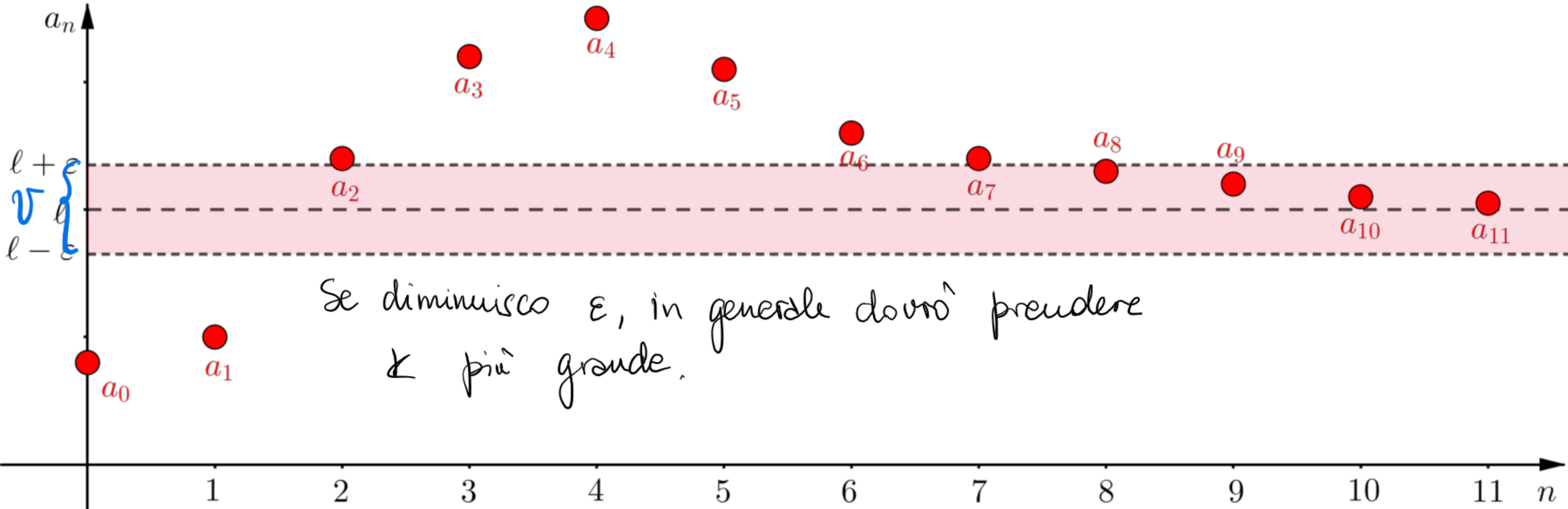
cioè

$\forall\, U$ intorno di ℓ $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \in U$ $\forall n > k$.

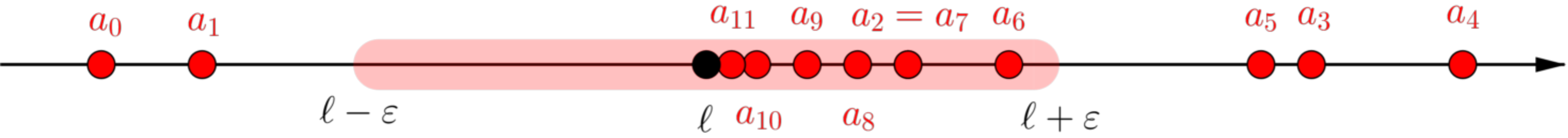
$(\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N})$



a_n
$\ell + \varepsilon$
U
ℓ
$\ell - \varepsilon$
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_9
a_{10}
a_{11}
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
n



Se diminuisco ε, in generale dovrò prendere k più grande.


a_0
a_1
a_{11}
a_9
$a_2 = a_7$
a_6
a_5
a_3
a_4
$\ell - \varepsilon$
ℓ
a_{10}
a_8
$\ell + \varepsilon$

La def^{ne} assume forme differenti se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$.

1° caso: $\ell \in \mathbb{R}$

In questo caso gli intorni U sono della forma $\boxed{(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)}$ con $\varepsilon > 0$. U

La def^{ne} diventa:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } \forall n > k \qquad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

oppure

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } \forall n > k \qquad |a_n - \ell| < \varepsilon$

(in generale k dipende da ε)

Esempio: Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, devo trovare $k \in \mathbb{R}$ t.c. $\boxed{\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon}$ $\forall n > k$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} = k$$

OSS Se verifichiamo la condizione per un certo $\varepsilon_0 > 0$, cioè che $\exists k$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon_0 \quad \forall n > k$, questo k va bene anche per gli ε più grandi di ε_0.

Quindi basta controllare la definizione per ogni ε t.c. $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ con $\varepsilon_0 > 0$ scelto come vogliamo.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{4 - \frac{3}{n}} = 2 \qquad \text{Verifica}$$

← ben definita per $n \in \mathbb{N}_+$

$\forall \varepsilon > 0$, cerco k t.c. $\boxed{\left|\sqrt{4 - \frac{3}{n}} - 2\right| < \varepsilon}$ $\forall n > k$

$$\Big|\underbrace{\underbrace{\sqrt{4-\tfrac{3}{n}}}_{\to 2}-2}_{\to 0}\Big|<\varepsilon \iff 2-\sqrt{4-\tfrac{3}{n}}<\varepsilon$$

$$\iff \underbrace{2-\varepsilon}<\sqrt{4-\tfrac{3}{n}}$$

Per la discussione precedente, posso supporre $0<\varepsilon\leq 2$

$\Rightarrow \quad 2-\varepsilon\geq 0.$

(posso elevare al quadrato)

$$\iff \cancel{4}+\varepsilon^2-4\varepsilon<\cancel{4}-\frac{3}{n}$$

$$\iff \frac{3}{n}<4\varepsilon-\varepsilon^2=\varepsilon(4-\varepsilon)>0$$

$$\iff n>\frac{3}{4\varepsilon-\varepsilon^2}=k.$$

<u>OSS</u> L'ordine dei quantificatori è importante:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\ell\in\mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{R}:\ |a_n-\ell|<\varepsilon\quad\forall n>k$$

(corretta)

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\ell\in\mathbb{R} \iff \exists k\in\mathbb{R}\ \text{t.c.}\ |a_n-\ell|<\varepsilon\quad\forall n>k\ \forall\varepsilon>0$$

errata

Supponiamo di "sbagliare" il limite, per es vogliamo "provare" che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{4}$$

$\forall\varepsilon>0$ cerco k t.c. $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon\quad\forall n>k.$

Se prendo $\varepsilon=\frac{1}{8}$, dovrei trovare k t.c.

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{8} \qquad \forall n > k.$$

OSS $\frac{1}{n} - \frac{1}{4} < 0$ per $n > 4$

Supponiamo $n > 4$, la diseq^ne^ diventa

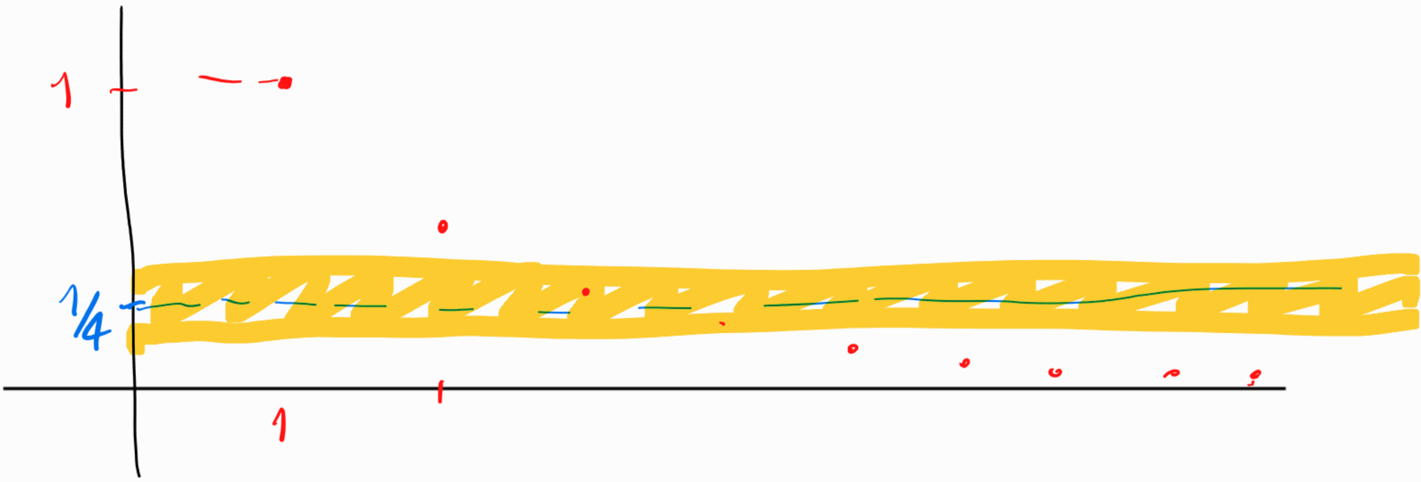
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{n} < \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{n}$$

$$n < 8$$

Quindi la cond^ne^ è <u>falsa</u> per n grande



OSS 1 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n - \ell| = 0$

(1) (2)

(1) $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > k$

(2) $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k$ t.c. $\big||a_n - \ell| - \cancel{0}\big| < \varepsilon \quad \forall n > k$

$\qquad = |a_n - \ell|$

OSS 2

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} (c a_n) = c\ell$$

Dim

Caso $c=0 \Rightarrow$ banale $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

caso $c \neq 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ cerco k t.c. $|ca_n - c\ell| < \varepsilon \quad \forall n > k$

$$|ca_n - c\ell| = |c(a_n - \ell)| = |c|\,|a_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon_1 > 0$$

vero def^{te} perché $a_n \to \ell$.

Secondo caso: $\ell = +\infty$

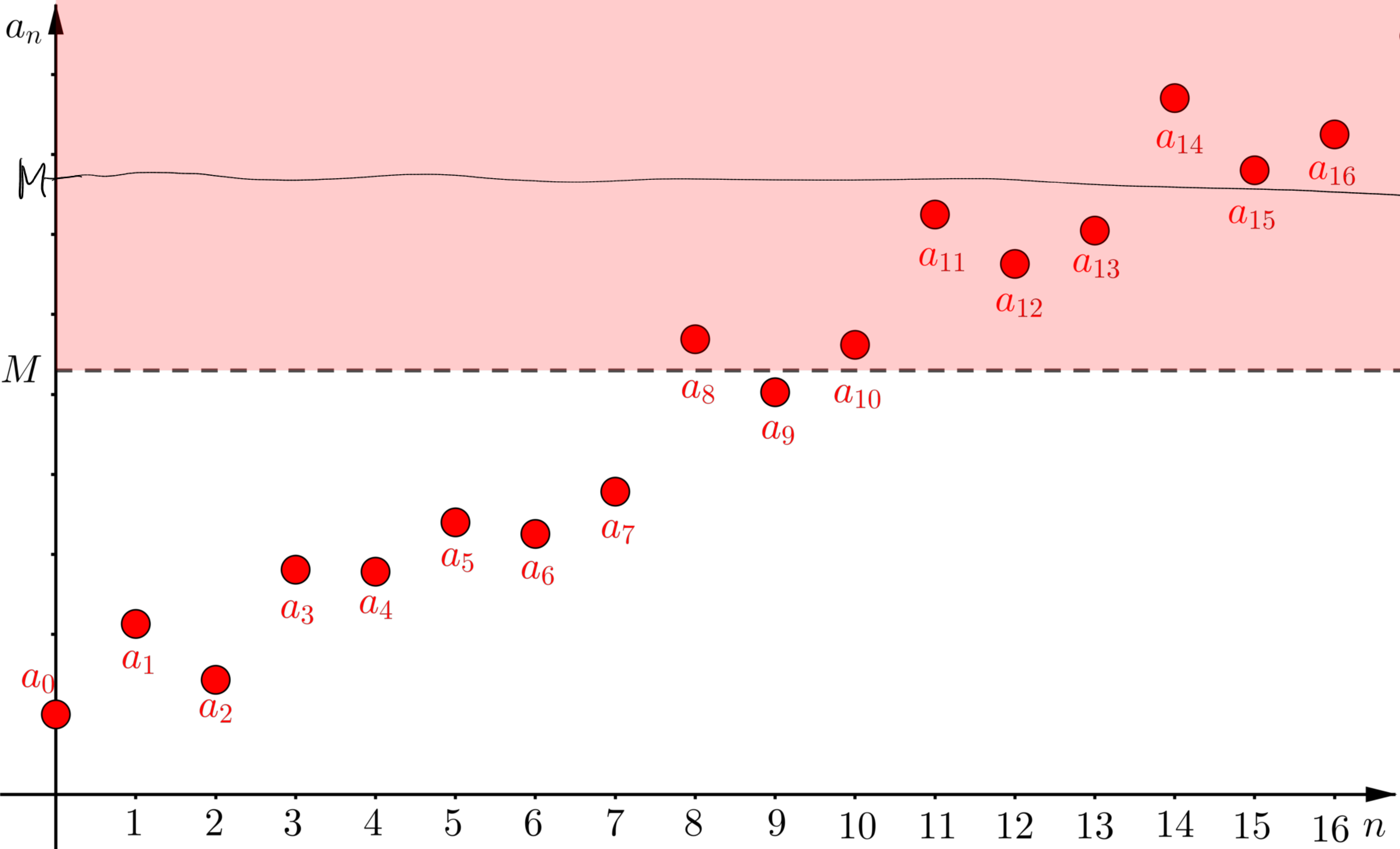
In questo caso gli intorni sono della forma $(M, +\infty]$ con $M \in \mathbb{R}$.

La def^{ne} diventa

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists k \text{ t.c. } a_n > M \quad \forall n > k$$

(OSS: k in generale dipende da M)

OSS. Se ho verificato la cond^{ne} per un certo M_0, essa è automaticamente verificata, con lo stesso k per tutti gli $M < M_0$



a_n
M
M
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8
a_9
a_{10}
a_{11}
a_{12}
a_{13}
a_{14}
a_{15}
a_{16}
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 n

Quindi basta verificare la cond^{ne} $\forall M \geq M_0$, dove M_0 è scelto da noi

Per es. possiamo prendere $M>0$.

La def^{ne} diventa

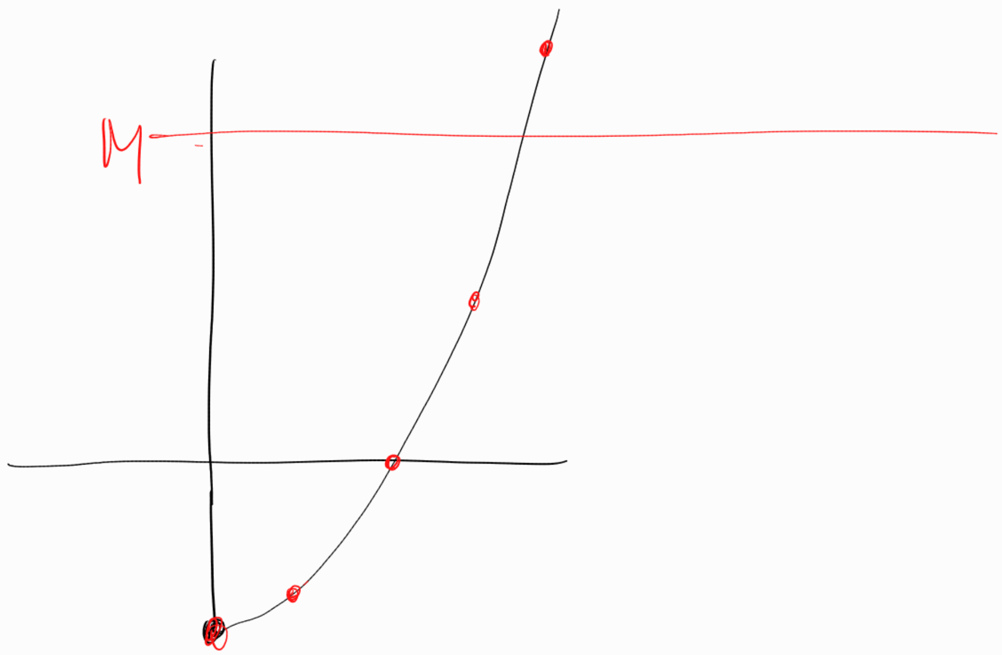
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall M>0 \quad \exists k \text{ t.c. } a_n > M \quad \forall n>k.$$

<u>ESEMPIO</u> Verifichiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (n^2-4) = +\infty$$

Fix $M>0$, cerco k t.c. $n^2-4>M$ $\forall n>k$

$$n^2-4>M \iff n^2 > 4+M \iff n > \sqrt{4+M} = k$$



Verifichiamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^4-5n} = +\infty$.

Fissato $M>0$, cerco k t.c. $\sqrt[3]{n^4-5n} > M$ $\forall n>k$.

$$\sqrt[3]{n^4-5n} > M \iff n^4-5n > M^3$$

$$\underbrace{n^4-5n} = n\underbrace{(n^3-5)}_{\substack{\geq \\ 3}} \underset{\boxed{n\geq 2}}{\geq} 3n > M^3$$

≥ 3 se $n \geq 2$

$\boxed{n\geq 2} \Leftrightarrow n>1$

$$\boxed{n > \frac{M^3}{3}}$$

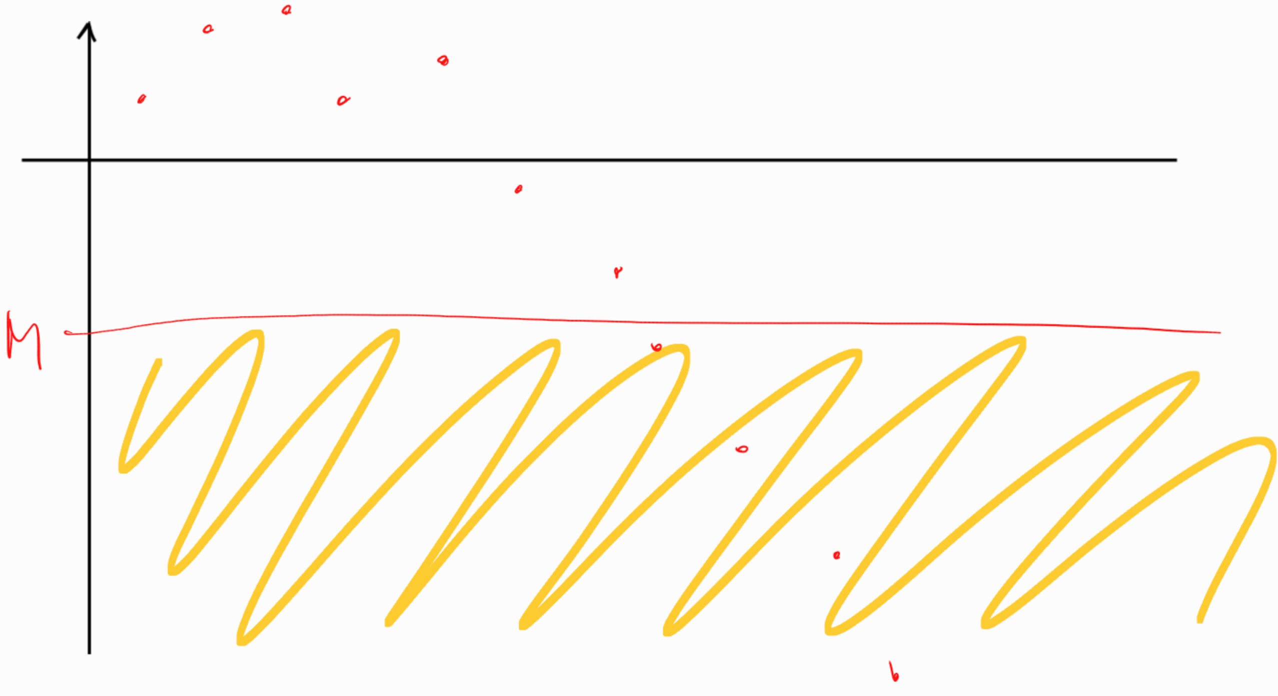
Prendo $k = \max\left\{1, \frac{M^3}{3}\right\}$

se $n > k \Rightarrow \begin{cases} n > 1 \\ n > \frac{M^3}{3} \end{cases}$

Terzo caso: $\ell = -\infty$.

Gli intorni di $-\infty$ sono della forma $[-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists k \text{ t.c. } a_n < M \quad \forall n > k.$$



Si capisce che basta verificare la condizione
$\forall M < M_0$, dove M_0 lo scegliamo noi!
Per esempio, possiamo prendere valori negativi, che chiamo $-M$, con $M>0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall M>0 \ \exists k \text{ t.c. } a_n < -M \quad \forall n > k}$$

Verifichiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n^2 - n^4) = -\infty$.

Fisso $M>0$, cerco k t.c. $2n^2 - n^4 < -M \quad \forall n > k$.

$$n^4 - 2n^2 > M$$

$n > 1$

$$n^4 - 2n^2 = n^2(n^2-2) \geq 2n^2 > M$$

$\underset{2}{\text{VI}}$ $(n \geq 2)$

$n > \sqrt{\frac{M}{2}}$

$$K = \max\left\{1, \sqrt{\frac{M}{2}}\right\}$$

$n^2 - 2 \geq 2$ $\qquad$ n^2

$n^2(n^2-2) \geq 2n^2$