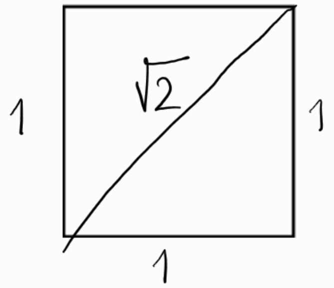
$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n},\ m,n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\} \longleftrightarrow$ Sviluppi decimali finiti o periodici che non terminano per $\bar{9}$

$1 = \cancel{0,\bar{9}}$ $\qquad$ $0,25 = \cancel{0,24\bar{9}}$

Problema: I numeri razionali non permettono di risolvere alcuni semplici problemi.



Non esiste alcun numero razionale q t.c. $q^2 = 2$.
(o, se si preferisce, $\sqrt{2}$ non è razionale)

Per assurdo, supponiamo che esista $q = \frac{m}{n}$ t.c. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

Posso sempre supporre m, n primi tra loro (e quindi non entrambi pari).

$$m^2 = \underbrace{2n^2}_{\text{pari}} \Rightarrow m^2 \text{ pari} \Rightarrow m \text{ pari} \Rightarrow m = 2k \quad \text{con } k \text{ intero}$$

$$\Downarrow$$

$$4k^2 = 2n^2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{2k^2}_{\text{pari}} = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari} \qquad \text{assurdo}$$

Il concetto di numeri razionali non è sufficiente a risolvere semplici problemi algebrici. Bisogna "ampliare" i razionali.

Un modo di introdurre i reali è quello di considerare tutti gli sviluppi decimali

$$\mathbb{R} = \{ \pm \text{ sviluppi decimali qualsiasi (finiti, periodici, non periodici) } \}$$

$\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$, ma contiene anche molti altri numeri, i più famosi dei quali sono:

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \qquad \{a_k\} = \{3, 1, 4, 1, 5, \ldots\}$$

$$3 < \pi < 4$$

$$3{,}1 < \pi < 3{,}2$$

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142$$

Pb: come si fanno le operazioni?

$$\pi + \sqrt{2}$$

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

0) $3 + 1 = 4$

1) $3{,}1 + 1{,}4 = 4{,}5$

2) $3{,}14 + 1{,}41 = 4{,}55$

3) $3{,}141 + 1{,}414 = 4{,}555$

4) $3{,}1415 + 1{,}4142 = 4{,}5557$

5) $- - - - \qquad = \underbrace{4{,}5558}0$

Dopo aver definito rigorosamente queste operazioni, si mostra che continuano a valere le proprietà P1) – P15) di prima.

Cosa c'è in più? Una proprietà di "completezza", che può essere espressa in vari modi:

1) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ammette estremo superiore.

oppure

2) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $a \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

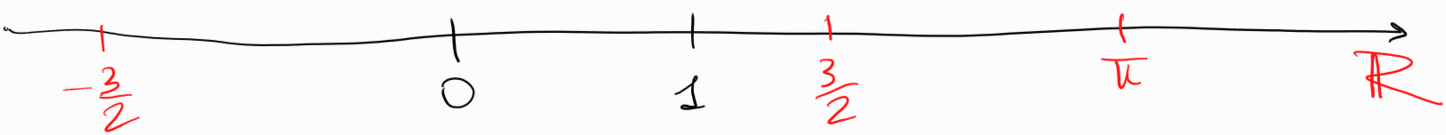
Questa proprietà non è vera nei razionali

$A = \{a \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } a > 0,\ a^2 < 2\}$

$B = \{b \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } b > 0,\ b^2 > 2\}$

$a \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, ma non esiste nessun <u>razionale</u> c t.c. $a \leq c \leq b$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\text{numeri irrazionali}\}$

PROP (densità dei razionali e degli irrazionali)

Ogni intervallo (a,b) con $a<b$ contiene infiniti numeri razionali e infiniti irrazionali.