$E = \{ x = n^3 - 3n \;,\; n \in \mathbb{N} \}$ è limitato superiormente? NO

Vogliamo dimostrare che E è illimitato superiormente,
cioè non esistono maggioranti di E.
Fissiamo $M \in \mathbb{R}$, vogliamo provare che M non è maggiorante di E.
Per far ciò, devo trovare $x \in E$ t.c. $x > M$

$\forall M > 0$, devo trovare $\underset{\text{"} x_M}{x \in E}$ t.c. $x > M$.

" " " $\underset{\text{"} n_M}{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $n^3 - 3n > M$ diseq^{ne} di 3° grado (complicata)

$\boxed{n \geq 2}$

$$n^3 - 3n = n \underbrace{(n^2 - 3)}_{\geq 1} \geq n > M$$

se $n \geq 2$

Se $n \geq 2$
$n^2 \geq 4$
$n^2 - 3 \geq 1$

Basta prendere $n > \max\{2, M\}$

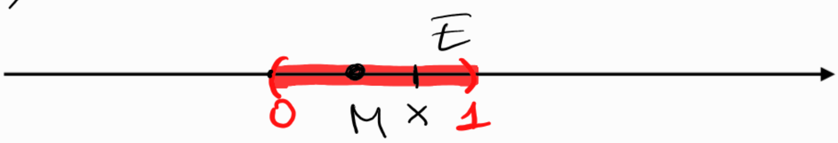
Consideriamo $E = (0,1)$. Vogliamo calcolare $\sup E$.
E è limitato superiormente, infatti 1 è un maggiorante di E
Quindi anche ogni $M > 1$ è un maggiorante.
Voglio provare che $1 = \sup E$, cioè 1 è il minimo dei maggioranti di E.

Fisso $M < 1$, voglio provare che non è un maggiorante di E.
Fissato $M < 1$, cerco $x \in (0,1)$ t.c. $x > M$.

1) se $M \leq 0$,

non maggiora nessun elemento di E, cioè
$M < x \quad \forall x \in (0,1)$

2) se $0 < M < 1$



Basta prendere la media $x = \dfrac{M+1}{2}$

$x < 1 \iff \frac{M+1}{2} < 1 \iff M < 1$

$x > M \iff$ completare

Abbiamo concluso: $\sup E = \sup(0,1) = 1$.

Provare a dim che $\inf E = 0$

Come si fa quindi a dimostrare che

$\sup E = \lambda \in \mathbb{R}$, quando E è limitato superiorm.?

1) λ è un maggiorante, cioè $\lambda \geq x \quad \forall x \in E$

2) ogni numero $< \lambda$ non è maggiorante

cioè ogni numero della forma $\lambda - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ non è un maggiorante, cioè $\exists x \in E$ t.c. $x > \lambda - \varepsilon$.

cioè: non ci sono maggioranti più piccoli di λ.

CARATTERIZZAZIONE di $\sup E$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Allora

$\sup E = \lambda$ se e solo se:

1) $\lambda \geq x \quad \forall x \in E$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad$ t.c. $\quad x > \lambda - \varepsilon$.

CARATTERIZZAZIONE di $\inf E$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente. Allora

$\inf E = \lambda$ se e solo se:

1) $\lambda \leq x \quad \forall x \in E$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad$ t.c. $\quad x < \lambda + \varepsilon$.

OSS Se E ammette massimo x_0, questo coincide con $\sup E$.

Sia $x_0 = \max E$ (cioè $x_0 \in E$ ed è maggiorante di E)

1) $x_0 \geq x \quad \forall x \in E$? sì per def. di max

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E$ t.c. $x > x_0 - \varepsilon$.

Basta prendere $x = x_0$

Sia $E = \left\{ x = \frac{2n-1}{n} \; : \; n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

$$E = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots \right\}$$

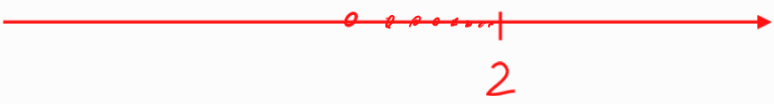
$$\frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} = a_n$$

$a_n < a_{n+1}$

$$\cancel{2} - \frac{1}{n} < \cancel{2} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Congettura: $\sup = 2$. Usiamo la caratterizzazione Ok.

1) $2 \geq x \quad \forall x \in E$



cioè $\cancel{2} \overset{?}{\geq} \cancel{2} - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

$0 \overset{?}{\geq} -\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ vero!

2). Fisso $\varepsilon > 0$, cerco $x \in E$: $x > 2 - \varepsilon$

cioè: cerco n t.c. $\cancel{2} - \frac{1}{n} > \cancel{2} - \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Basta prendere $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Quanto vale $\inf E$? $\inf E = \min E = 1 \in E$.

Quindi basta provare che $1 \leq x \ \forall x \in E$.

$$1 \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{n} \leq 1$$
$$\Updownarrow$$
$$n \geq 1$$

DEF

Se E è illimitato superiormente, poniamo $\sup E = +\infty$
inferiormente $\inf E = -\infty$

$+\infty$ e $-\infty$ sono simboli t.c.

$$-\infty < a < +\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Retta reale estesa $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$E = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \frac{5}{36}, \dots \right\}$$

$\sup E = \max E = 5 \in E$

devo solo provare $5 \geq x \ \forall x \in E$, cioè

$$1\ \cancel{5} \geq \frac{\cancel{5}}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+$$
$$\Updownarrow$$
$$n^2 \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ vero!}$$

$\inf E = 0$, con la caratterizzazione

1) $0 \overset{?}{\leq} x \quad \forall x \in E$

$0 \overset{?}{\leq} \frac{5}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \qquad$ vero!

2) Fix $\varepsilon > 0$, cerco $n \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\frac{5}{n^2} < 0 + \varepsilon = \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

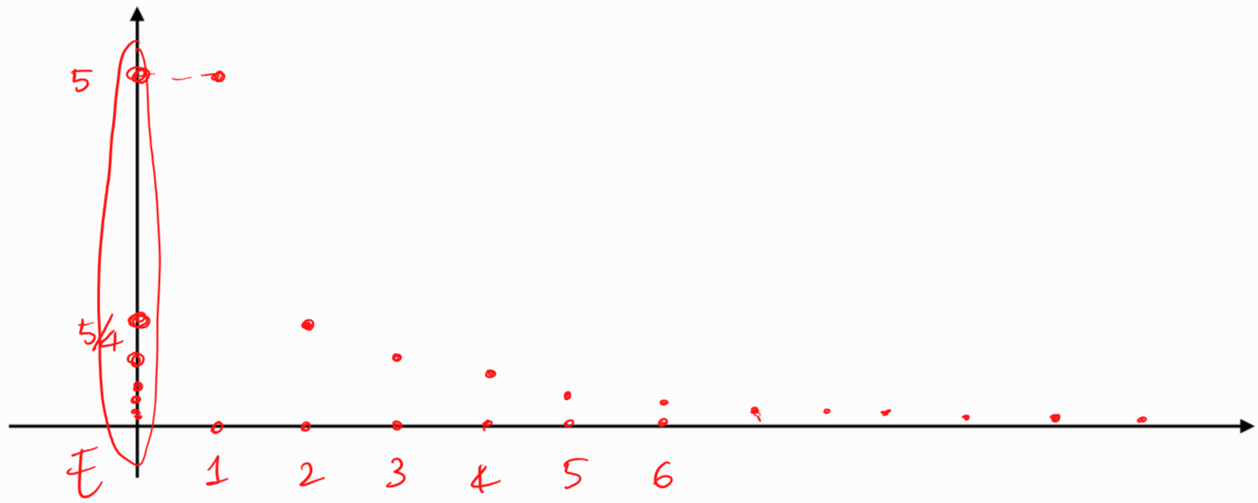
$$\varepsilon n^2 > 5$$

$$\Updownarrow$$

$$n^2 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$$



Proprietà di inf e sup.

1) se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Allora

$$\sup E \leq \sup F \qquad (*)$$

$$\inf E \geq \inf F$$

Dim (*) Basta osservare che un maggiorante di F è anche maggiorante di E

$\Rightarrow$ sup F è un maggiorante di E

Poiché sup E è il più piccolo dei maggioranti di E

$$\sup E \leq \sup F$$

2) $E, F \subseteq \mathbb{R}$. $\quad E \cup F = \{x : (x \in E) \vee (x \in F)\}$

Allora

$$\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$$

$$\inf(E \cup F) = \min\{\inf E, \inf F\}$$

Riferimento sul testo: § 1.4.