Pagina web del corso: www.elearning.uniroma1.it

- Libro di testo: Bertsch - Dall'Aglio - Giacomelli
  Epsilon 1 - Primo corso di An. Mat. - McGraw-Hill
- Altri libri sono indicati nella pagina web.

Esercizi: Esercizi sulla pag. web. (anche esercizi d'esame)
Esercizi sul libro di testo
Marcellini - Sbordone, Salsa - Squellati, Amar - Bersani

Modalità d'esame: Prova scritta (pratica): 2h 30'
Prova scritta di teoria: 50'
Prova orale: 10-20'

Orario di ricevimento: Merc. 11:00 → 13:00
Dip. Matematica (Città Universitaria) piano terra, st. 4,
preferibilmente avvisando per mail il giorno prima
dallaglio@mat.uniroma1.it

Tutoraggio: Lunedì pomeriggio, aula da comunicare.

$\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\} = \ldots$ da vedere

Considereremo sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. $E \subseteq \mathbb{R}$, cioè:

se $x \in E$, allora $x \in \mathbb{R}$.

Esempi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (interi) numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ interi relativi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ numeri razionali.

Intervalli:

$(0,1) =]0,1[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 0 < x < 1\}$ intervallo aperto

$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

$[-2,3) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}$

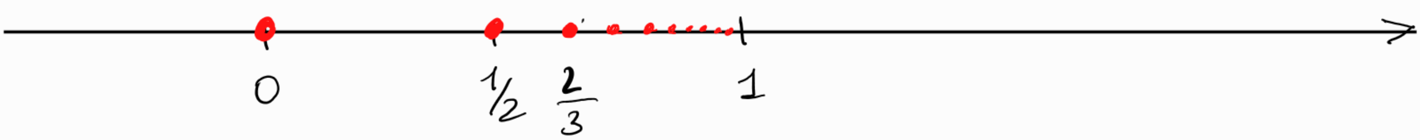
$(5,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

$[5,+\infty) = \qquad\qquad \geq$

$E = \left\{ x = \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$

dove $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}^*$



$F = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \dots \right\}$

$G = \left\{ x = n^2 - 3n : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, -2, 4, \dots \right\}$.

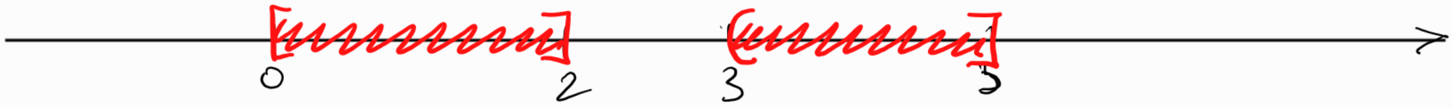
$H = \left\{ x = t^4 - 5t^3 + t^2 : t \in \mathbb{R} \right\}$

oppure

$K = [0,2] \cup (3,5] = \{ x : \quad x \in [0,2] \lor x \in (3,5] \}$

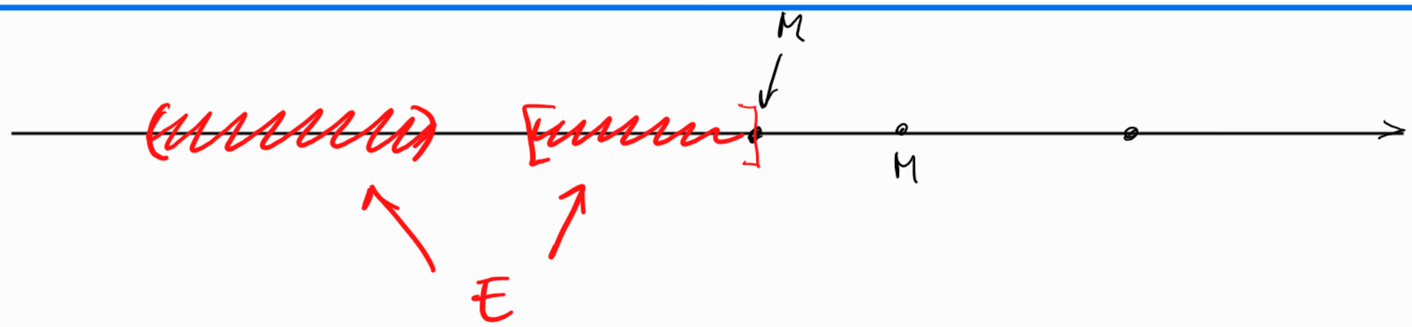
$(0 \leq x \leq 2) \lor (3 < x \leq 5)$

sono gli elementi che appartengono almeno a uno dei due insiemi $[0,2]$ e $(3,5]$



DEFINIZIONE Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** (minorante) di E se $M \geq x$ ($\leq$) $\forall x \in E$

per ogni



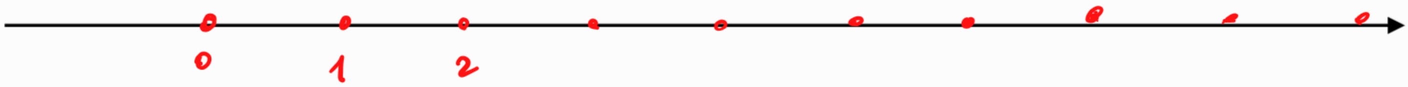
OSS Se E ammette un maggiorante, ne ammette infiniti

Non è detto che E ammetta maggioranti

Per esempio $\mathbb{N}$ non ha maggioranti

$\mathbb{Z}$ " "

$\mathbb{Q}$



Se un maggiorante di E appartiene ad E si dice **massimo** di E
minorante minimo

x_0 massimo di E $\iff$ $x_0 \in E$
$x_0 \geq x \quad \forall x \in E$

$E = [3,5]$ ammette maggioranti (per es. 7)
anche 5 è maggiorante di E, quindi è massimo di E.

PROP Il massimo di E, se esiste, è unico.

DIM Infatti, se x_0, x_1 sono massimi di E.

x_0 massimo di $E \Rightarrow x_0 \geq x \quad \forall x \in E$

$\Rightarrow$ (posso prendere $x = x_1$) $x_0 \geq x_1$

x_1 max di $E \Rightarrow x_1 \geq x \quad \forall x \in E$

$\Rightarrow$ in particolare $x_1 \geq x_0$

$\Rightarrow x_0 = x_1$

$\square$

DEF $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato superiormente** (inferiormente)
se ammette almeno un maggiorante (minorante)
E si dice **limitato** se è limitato superiormente e inferiormente

E è limitato sup (inf) $\iff$ $\exists M \in \mathbb{R} : M \geq x$ ($\leq$) $\forall x \in E$

esiste

$(0,1)$ è limitato superiormente (e inferiormente), per es. $x=1$ e $x=3$ sono maggioranti

$[0,1]$ " "

$[0,1)$ " "

$(-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ è limitato sup. ma non limitato inf.
( ]

E è illimitato sup (inf). se non ammette maggioranti (minoranti)

E è illimitato se è illimitato sup. oppure illimitato inf.

$$E = \left\{ x = \frac{n-1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}.$$

Proviamo che E è limitato sup., in particolare proviamo che 1 è un maggiorante

Devo provare che

$$1 \overset{?}{\geq} x \quad \forall x \in E$$

$$1 \overset{?}{\geq} \frac{n-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \qquad (\text{moltiplico per } n > 0)$$

$$\cancel{n} \overset{?}{\geq} \cancel{n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \qquad \text{OK!}$$

1 è massimo? NO, perché $\frac{n-1}{n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

E è limitato inf^{te}? sì, verifichiamo che 0 è minorante

$$0 \overset{?}{\leq} x \quad \forall x \in E$$

$$0 \overset{?}{\leq} \frac{n-1}{n} \quad \forall n = 1, 2, \dots \qquad \underline{\underline{\text{sì.}}}$$

0 è anche minimo di E.

Non tutti gli insiemi limitati superiorm (inf.) hanno massimo (minimo.)

Consideriamo $E = (0, 1)$.

osserviamo che 1 è un maggiorante, quindi tutti i numeri > 1 sono maggioranti.

0,99 non è maggiorante di E, infatti esiste $x \in E$ t.c.

$x > 0{,}99$ per es. $x = 0{,}995$

$\{\text{maggioranti di } E=(0,1)\} = [1,+\infty)$

DEF Sia E limitato superiormente.
Si dice **Estremo superiore di E** il più piccolo (il minimo) dei maggioranti di E.
Sia E limitato inferiormente.
Si dice **estremo inferiore di E** il più grande (il massimo) dei minoranti di E.
In simboli

$$\sup E = \min\{\text{maggioranti di } E\} = \min\{M\in\mathbb{R} : M\geq x \ \forall x\in E\}$$

$$\inf E = \max\{\text{minoranti di } E\} = \max\{m\in\mathbb{R} : m\leq x \ \forall x\in E\}$$

infer.
TEOREMA Sia E limitato superiormente.
inferiore
Allora E ammette estremo superiore

Rif. sul testo : § 1.4