ESERCIZIO 1

(a)

nel sistema del CM
$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu}\cancel{p} + \frac{1}{4} m\omega^2 r^2 + \frac{a}{\hbar} J^2 \qquad \mu = \frac{m}{2}$$
$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2 + \frac{a}{\hbar} J^2$$

Per $a=0$ lo spettro è (senza spin)

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad \underline{L=0}$ pari per parità (scambio)

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad \underline{L=1}$ disp.

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad \underline{L=2,0}$ pari ← NON NEC. $E > 3\hbar\omega$

ecc.

Aggiungiamo lo spin e teniamo conto del principio di Pauli: stati pari spaziali vanno moltiplicati per stati $S=0$
stati dispari per stati $S=1$

Quindi includendo lo spin (S = spin totale)

$$\begin{array}{lll} & \ \ l\ m \quad S\ S_z & \\ E = \frac{3}{2}\hbar\omega & |0\,0\rangle|0\,0\rangle & \text{deg } 1 \\ E = \frac{5}{2}\hbar\omega & |1\,m\rangle|1\,S_z\rangle & \text{deg } 3\times 3 = 9 \\ E = \frac{7}{2}\hbar\omega & \begin{cases} |0\,0\rangle|0\,0\rangle \\ |2\,m\rangle|0\,0\rangle \end{cases} & \text{deg } 1+5=6 \leftarrow E > 3\hbar\omega \\ & \vdots & \end{array}$$

Per tenere conto del termine in a dobbiamo cambiare base $(L_z, S_z) \to (J, J_z)$: Elementi $|L\,S\,J\,J_z\rangle_J$

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad L=S=0 \longrightarrow J=0$

Stato non degenere $\quad |0\,0\,0\,0\rangle_J$

L'energia non cambia

Stati con $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ in assenza di $\frac{a}{\hbar}J^2$

$$L=1 \quad S=1 \longrightarrow J = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

Vi sono tre livelli

J=0 $|1\;1\;1\;0\;0\rangle_J$ $E=\frac{5}{2}\hbar\omega$ non deg.

J=1 $|1\;1\;1\;1\;J_z\rangle_J$ $E=\frac{5}{2}\hbar\omega+2\hbar a$ deg. 3

J=2 $|1\;1\;1\;2\;J_z\rangle_J$ $E=\frac{5}{2}\hbar\omega+6\hbar a$ deg. 5

NOTA sulla notazione:

Ad essere precisi i ket andrebbero indicati come

$|n\;L\;S\;J\;J_z\rangle_J$ | Questa scrittura caratterizza completamente gli stati

↑ (aggiunto il livello n)

(b)

Dato $E\leqslant 3\hbar\omega$ e $J^2=0$ con certezza

$$|\psi\rangle = A|\overset{n}{0}\;\overset{l}{0}\;\overset{s}{0}\;\overset{j}{0}\;\overset{j_z}{0}\rangle_J + B|\overset{n}{1}\;\overset{l}{1}\;\overset{s}{1}\;\overset{j}{0}\;\overset{j_z}{0}\rangle_J$$

Tavole CG 1×1

$$|\overset{j}{0}\;\overset{j_z}{0}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\left(|\overset{l_z}{1}\;\overset{s_z}{-1}\rangle-|0\;0\rangle+|-1\;1\rangle\right)$$

Quindi

$$|\psi\rangle = A\,|\overset{n}{0}\,\overset{l}{0}\,\overset{l_z}{0}\,\overset{s}{0}\,\overset{s_z}{0}\rangle \longrightarrow l_z=0$$

$$+B\frac{1}{\sqrt{3}}|1\;1\;1\;1\;-1\rangle \longrightarrow l_z=1$$

$$+B\frac{1}{\sqrt{3}}|1\;1\;0\;1\;0\rangle \longrightarrow l_z=0$$

$$+B\frac{1}{\sqrt{3}}|1\;1\;-1\;1\;1\rangle \longrightarrow l_z=-1$$

Quindi $\frac{|B|^2}{3}=\frac{1}{9}$ $|B|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Dalla condizione di normalizzazione $|A|^2+|B|^2=1 \Rightarrow |A|=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Fissiamo le fasi scegliendo $B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $A=\sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\alpha}$

c1) Indichiamo con $H_0 = H_{osc} + \frac{a}{\hbar} J^2$

Notiamo che

$[H_{osc}, L^2] = [H_{osc}, J^2] = 0$ perchè H_{osc} è invariante per rotazioni

$[H_{osc}, \text{funzioni spin}] = 0$ perchè non dipende dallo spin

$[J^2, L^2] = 0$

Ma $[J^2, S_z] \neq 0$ $[J^2, S_{1z} S_{2z}] \neq 0$

Quindi

(a) il valore medio di H_0 non dipende da t
[ovvio: $[H_0, H_0] = 0$

(b) il valore medio di L^2 non dipende da t

$$[H_0, L^2] = [H_{osc}, L^2] + \frac{a}{\hbar}[J^2, L^2] = 0$$

(c)(d) a priori i valori medi di S_z, $S_{1z} S_{2z}$ potrebbero dipendere da t.

Per lo stato $|\psi\rangle$ considerato anche i valori medi di S_z e $S_{1z} S_{2z}$ non dipendono da t, dato che $|\psi\rangle$ è autostato di J^2 con autovalore nullo. Infatti preso un qualsiasi operatore A abbiamo

$$\langle \psi_t | A | \psi_t \rangle = \langle \psi_0 | e^{iH_0 t/\hbar} A e^{-iH_0 t/\hbar} | \psi_0 \rangle$$

Ora $e^{-iH_0 t/\hbar} | \psi_0 \rangle = e^{-iH_{osc} t/\hbar} e^{-iaJ^2 t/\hbar^2} | \psi_0 \rangle$ $\left[[H_{osc}, J^2] = 0 \right]$

$= e^{-iH_{osc} t/\hbar} | \psi_0 \rangle$ $[J^2 | \psi_0 \rangle = 0]$

Quindi

$$\langle \psi_t | A | \psi_t \rangle = \langle \psi_0 | e^{iH_{osc} t/\hbar} A e^{-iH_{osc} t/\hbar} | \psi_0 \rangle$$

Ora se $[A, H_{osc}] = 0$ abbiamo

$$e^{+iH_{osc}t/\hbar} A e^{-iH_{osc}t/\hbar} = A$$

$$\langle\psi_t|A|\psi_t\rangle = \langle\psi_0|A|\psi_0\rangle$$

Quindi, PER LO SPECIFICO STATO $|\psi\rangle$, i valori medi non dipendono da t se $[A, H_{osc}] = 0$

Quindi, anche i valori medi di S_z e $S_{1z}S_{2z}$ non dipendono da t.

c2)

$$\langle\psi|H_0|\psi\rangle = |A|^2 \frac{3}{2}\hbar\omega + |B|^2 \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega + \frac{5}{6}\hbar\omega = \frac{11}{6}\hbar\omega$$

$$\langle\psi|L^2|\psi\rangle = |B|^2 2\hbar^2 = \frac{2}{3}\hbar^2$$

$$\langle\psi|S_z|\psi\rangle = + \frac{|B|^2}{3}(-\hbar) + \frac{|B|^2}{3}(+\hbar) = 0$$

Per calcolare il valor medio di $S_{1z}S_{2z}$ possiamo riscrivere

$$S_z^2 = S_{1z}^2 + S_{2z}^2 + 2S_1S_z \Rightarrow S_{1z}S_{2z} = \frac{1}{2}(S_z^2 - S_{1z}^2 - S_{2z}^2)$$

dato che, per lo spin ½, $S_{1z}^2 = S_{2z}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$ abbiamo

$$S_{1z}S_{2z} = \frac{1}{2}S_z^2 - \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\langle\psi|S_z^2|\psi\rangle = \frac{|B|^2}{3}\hbar^2 + \frac{|B|^2}{3}\hbar^2 = \frac{2}{9}\hbar^2$$

$$\langle\psi|S_{1z}S_{2z}|\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{9} - \frac{\hbar^2}{4} = -\frac{5}{36}\hbar^2$$

Alternativamente si poteva fare il calcolo diretto

$$S_{1z}S_{2z}|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{l_z}{1}\,\overset{s}{1}\,\overset{s_z}{-1}\rangle =$$

$$= S_{1z}S_{2z}|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{l_z}{1}\rangle\,\overset{S_{1z}}{|-\tfrac{1}{2}\rangle_1}\,\overset{S_{2z}}{|-\tfrac{1}{2}\rangle_2} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle_1|-\tfrac{1}{2}\rangle_2 = \frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,1\,1\,-1\rangle$$

$$S_{1z} S_{2z} \overset{n\,l\,l_z\,s\,s_z}{|1\,1\,0\,1\,0\rangle} = S_{1z} S_{2z} \overset{n\,l\,l_z}{|1\,1\,0\rangle} \overset{s\,s_z}{|1\,0\rangle}$$

$$= S_{1z} S_{2z} |1\,1\,0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4} |1\,1\,0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4} |1\,1\,0\,1\,0\rangle$$

$$S_{1z} S_{2z} |1\,1\,-1\,1\,1\rangle = S_{1z} S_{2z} |1\,1\,-1\rangle |\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} |1\,1\,-1\,1\,1\rangle$$

$$S_{1z} S_{2z} |0\,0\,0\,0\,0\rangle = S_{1z} S_{2z} \overset{n\,l\,l_z}{|0\,0\,0\rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1 |-\tfrac{1}{2}\rangle_2 - |-\tfrac{1}{2}\rangle_1 |\tfrac{1}{2}\rangle_2 \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4} |0\,0\,0\,0\,0\rangle$$

Quindi

$$S_{1z} S_{2z} |\psi\rangle = A\left(-\frac{\hbar^2}{4}\right) |0\,0\,0\,0\rangle + \frac{B}{\sqrt{3}} \left(\frac{\hbar^2}{4} |1\,1\,1\,1\,-1\rangle - \frac{\hbar^2}{4} |1\,1\,0\,1\,0\rangle \right.$$

$$\left. + \frac{\hbar^2}{4} |1\,1\,-1\,1\,+1\rangle \right)$$

$$\langle\psi| S_{1z} S_{2z} |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} |A|^2 + \frac{|B|^2}{3} \left(\frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4} \right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{\hbar^2}{4}\right) + \frac{1}{9}\frac{\hbar^2}{4} = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right)\hbar^2 = -\frac{5}{36}\hbar^2$$

(d)

Il modo più semplice per affrontare il problema consiste nell'osservare che la Hamiltoniana è invariante per rotazioni. Quindi possiamo ridefinire gli assi in modo da scrivere $V = b S_z$

1. stato fondamentale $\overset{n\,l\,l_z\,s\,s_z}{|0\,0\,0\,0\,0\rangle}$. ha $S=0$ quindi

$$\Delta E = \langle 0\,0\,0\,0\,0 | b S_z | 0\,0\,0\,0\,0\rangle = 0$$

2. primo eccitato

$$|\psi_I\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\overset{n\,l\,l_z\,s\,s_z}{1\,1\,1\,1\,-1}\rangle - |1\,1\,0\,1\,0\rangle + |1\,1\,-1\,1\,1\rangle\right)$$

Quindi

$$\langle\psi_I|S_z|\psi_I\rangle = \frac{1}{3}\left(-\hbar + 0 + \hbar\right) = 0 \qquad \Delta E = 0$$

E' possibile pure fare il calcolo con $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

$$S_x|1111-1\rangle = \frac{1}{2}S_+|1111-1\rangle \rightarrow \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\,|11110\rangle$$

$$+\frac{1}{2}S_-|1111-1\rangle \longrightarrow 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|11110\rangle$$

$$S_x|11010\rangle = \frac{1}{2}S_+|11010\rangle \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|11011\rangle$$

$$+\frac{1}{2}S_-|11010\rangle \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|1101-1\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\left(|1101-1\rangle + |11011\rangle\right.$$

$$S_x|11-111\rangle = \frac{1}{2}S_+|11-111\rangle \longrightarrow 0$$

$$+\frac{1}{2}S_-|11-111\rangle \longrightarrow \frac{\sqrt{2}\hbar}{2}|11-110\rangle$$

Quindi

$$S_x|\psi_I\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}\hbar}{2}\left(|11110\rangle + |1101-1\rangle + |11011\rangle + |11-110\rangle\right)$$

Nessuno di questi stati appare in $|\psi_I\rangle$

Quindi

$$\langle\psi_I|S_x|\psi_I\rangle = 0$$

ESERCIZIO 2

1. Per determinare gli esponenti α, β, γ utilizziamo l'analisi dimensionale

Dobbiamo avere

$$[x] = [L] \qquad [S_x] = [\hbar]$$

$$[E] = [m]^\alpha [\omega]^\beta [\hbar]^\gamma [L][\hbar]$$

$$[m]^\alpha [T]^{-\beta} [ML^2T^{-1}]^{\gamma+1} [L] = [ML^2T^{-2}]$$

Quindi

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + 1 = 1 \\ -\beta - \gamma - 1 = -2 \\ 2\gamma + 2 + 1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \gamma &= -1/2 \\ \alpha &= 1/2 \\ \beta &= 3/2 \end{aligned}$$

Quindi

$$m^\alpha \omega^\beta \hbar^\gamma = m^{1/2} \omega^{3/2} \hbar^{-1/2} = \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

Quindi

$$H_1 = \omega \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left(x S_x - \frac{p}{m\omega} S_y \right)$$

Gli operatori a, a^+ sono definiti da

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \\ a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \end{cases}$$

$$a + a^+ = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$a - a^+ = \frac{2ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = i \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, \frac{p}{m\omega}$$

Quindi

$$H_1 = \omega \left[(a + a^+) S_x + i (a - a^+) S_y \right]$$

Ora

$S_+ = S_x + i S_y$ $\qquad$ $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

$S_- = S_x - i S_y$ $\rightarrow$ $i S_y = \frac{1}{2}(S_+ - S_-)$

Quindi

$$H_1 = \frac{\omega}{2}\left[(a+a^+)(S_+ + S_-) + (a-a^+)(S_+ - S_-) \right]$$

$$= \frac{\omega}{2}\left[aS_+ + a^+S_+ + aS_- + a^+S_- + aS_+ - a^+S_+ - aS_- + a^+S_- \right] = \omega(aS_+ + a^+S_-)$$

2. Se $|n\rangle$ sono gli autostati spaziali e $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ sono gli autostati di S_z, gli autostati di H_0 sono $|n\rangle|\pm\frac{1}{2}\rangle$ con $E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \pm \frac{\hbar\omega}{2}$

$$= (n + \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Stato fond: $|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ $\quad E = 0$ $\quad$ non deg.

I ecc. $\quad |1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ deg 2 $\quad E = \hbar\omega$

II ecc. $\quad |2\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ deg. 2 $\quad E = 2\hbar\omega$

⋮

n-esimo ecc. $\quad |n\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|n-1\rangle\frac{1}{2}\rangle$ deg. 2 $\quad E = n\hbar\omega$

③

Lo stato fond. è non deg. $|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$$\langle 0|-\tfrac{1}{2}|H_1|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0 \qquad \Delta E = 0$$

Il I ecc. è dato da $|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle$

Dobbiamo calcolare la matrice 2×2 della perturbazione

$$H_1|0\rangle|+\tfrac{1}{2}\rangle = \omega(aS_+ + a^+S_-)|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \omega(a^+|0\rangle)(S_-|\tfrac{1}{2}\rangle) = \hbar\omega|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$H_1|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = \omega\left(a S_+ + a^\dagger S_-\right)|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$= \omega\left(a|1\rangle\, S_+|-\tfrac{1}{2}\rangle\right) \qquad \left(S_-|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0\right)$$
$$= \hbar\omega\, |0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

Quindi

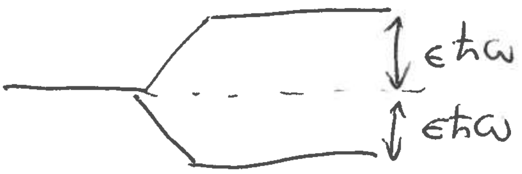
$$\langle 0|\tfrac{1}{2}|H_1|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$
$$\langle 1\langle -\tfrac{1}{2}|H_1|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$
$$\langle 0|\langle\tfrac{1}{2}|H_1|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega$$
$$\langle 1|\langle -\tfrac{1}{2}|H_1|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega \quad \text{(per hermiticità)}$$

Quindi

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\epsilon V - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & \epsilon\hbar\omega \\ \epsilon\hbar\omega & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\epsilon\hbar\omega)^2 \qquad \lambda = \pm\,\epsilon\hbar\omega$$

Quindi $\Delta E = \pm\,\epsilon\hbar\omega$



Degenerazione assente

5.

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \omega S_z$$

$$H_1 = \omega(aS_+ + a^+S_-)$$

$$[O, H_0] = 0$$

$$[O, H_1] = [a^+a + \lambda S_z, \omega(aS_+ + a^+S_-)]$$

$$= \omega[a^+a, aS_+] + \lambda\omega[S_z, aS_+] + \omega[a^+a, a^+S_-] + \lambda\omega[S_z, a^+S_-]$$

$$= \omega[a^+, a]aS_+ + \lambda\omega a[S_z, S_+] + \omega a^+[a, a^+]S_- + \lambda\omega a^+[S_z, S_-]$$

$$[S_z, S_+] = [S_z, S_x + iS_y] = i\hbar(S_y - iS_x) = \hbar S_+$$

$$[S_z, S_-] = [S_z, S_x - iS_y] = i\hbar(S_y + iS_x) = -\hbar S_-$$

$$[O, H_1] = -\omega a S_+ + \lambda\hbar\omega a S_+ + \omega a^+S_- - \lambda\hbar\omega a^+S_-$$

$$= (\lambda\hbar - 1)\omega a S_+ + (1 - \lambda\hbar)\omega a^+S_-$$

Quindi $\lambda\hbar - 1 = 0$ $\quad \lambda = \frac{1}{\hbar}$

6.

$$\hat{O} = a^+a + \frac{1}{\hbar}S_z \qquad H_0 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \omega S_z$$

$$= \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{\hbar}S_z\right) + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= \hbar\omega\hat{O} + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Quindi $[H_0, H_0] = 0 = [H_0, H_1]$

Quindi esiste base comune di autovettori di H_0 ed H_1 (che sono quindi autovettori di H)

Per calcolarla si diagonalizza H_0 e quindi H_1 nei sottospazi ~~degeneri~~ generati dagli autovalori di H_0 (autov. degeneri). Questa è la procedura seguita usando la teoria perturbativa