Esame di Meccanica Quantistica del 12/09/2024

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m che interagiscono in tre dimensioni con Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}m\omega^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 + \frac{a}{\hbar}J^2,$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, e $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale. Si risolva il problema nel sistema del centro di massa. Si assuma $0 < a \ll \omega$.

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei livelli con energia inferiore a $3\hbar\omega$.

b) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che: i) una misura dell'energia fornisce un risultato sempre inferiore a $3\hbar\omega$; ii) una misura di J^2 fornisce 0 con certezza; iii) una misura di L_z fornisce $\hbar$ con probabilità 1/9.

c) Sia $|\psi_t\rangle$ l'evoluto di $|\psi\rangle$ secondo la Hamiltoniana H_0. Si considerino i seguenti valori medi: $\langle\psi_t|H_0|\psi_t\rangle$, $\langle\psi_t|L^2|\psi_t\rangle$, $\langle\psi_t|S_z|\psi_t\rangle$, $\langle\psi_t|S_{1z}S_{2z}|\psi_t\rangle$, dove $S_z = S_{1z} + S_{2z}$. c1) Quali valori medi ci si attende a priori che non dipendano dal tempo? c2) Si calcolino tutti i valori medi al variare di t.

d) Si supponga che la Hamiltoniana sia $H = H_0 + bS_x$, dove S_x è la componente x dello spin totale, con $|b| \ll a$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, si calcolino le energie e la degenerazione dei livelli perturbati che corrispondono ai primi 2 livelli calcolati al punto a).

Esercizio 2. Una particella di spin 1/2 e massa m è vincolata a muoversi in una dimensione. L'Hamiltoniana del sistema è data da $\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon\hat{H}_1$ con

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \omega\hat{S}_z \\ \hat{H}_1 &= \sqrt{2}\, m^\alpha\omega^\beta\hbar^\gamma\left(\hat{x}\hat{S}_x - \frac{\hat{p}}{m\omega}\hat{S}_y\right) \end{aligned}$$

dove α, β, γ sono numeri razionali e $0 < \epsilon \ll 1$.

1. Determinare α, β, γ e riscrivere l'Hamiltoniana in termini degli operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, degli operatori a scala dello spin $(\hat{S}_+, \hat{S}_-)$ e di $\hat{S}_z$.
2. Determinare lo spettro dell'Hamiltoniana imperturbata $\hat{H}_0$, indicando la degenerazione di ogni livello e una base di autoket.
3. Si determini al primo ordine in ϵ la correzione al livello energetico fondamentale e al primo livello eccitato. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.
4. Sia $\hat{\mathcal{O}} \equiv \hat{a}^\dagger a + \lambda\hat{S}_z$, dove λ è un parametro. Determinare il valore di λ tale che $\left[\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}\right] = 0$.
5. Calcolare $\left[\hat{H}_0, \hat{H}\right]$. Utilizzare il risultato ottenuto per dimostrare che i risultati trovati al primo ordine in ϵ risultano validi a tutti gli ordini.