Esame di Meccanica Quantistica, 25/06/2024

Esercizio 1. Si consideri l'atomo di idrogeno nell'approssimazione di potenziale coulombiano in cui l'elettrone viene sostituto da una particella di spin 1 avente stessa massa e stessa carica dell'elettrone. All'istante iniziale lo stato è descritto dalla seguente funzione d'onda spinoriale:

$$\psi = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -(x+iy) \\ \sqrt{2}z \\ (x-iy) \end{pmatrix} e^{-\frac{r}{2a_0}} \,,$$

dove $\mathcal{N}$ è una opportuna costante di normalizzazione, a_0 è il raggio di Bohr e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1) Se si effettuano misure di J^2 e J_z quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?

2) Se si effettua una misura di energia che valori si possono ottenere e con quali probabilità?

3) Calcolare il valore medio dell'operatore $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ al variare del tempo.

4) Si consideri ora il seguente stato

$$\psi = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -(x+iy) \\ \sqrt{2}z \\ (x-iy) \end{pmatrix} f(r) \,,$$

dove $f(r)$ è una funzione ignota dipendente solo dal modulo r. Quali valori energetici **non** possono sicuramente essere ottenuti da una misura dell'Hamiltoniana? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Una particella di massa m è soggetta al seguente potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -L \\ V_{buca}(x) & \text{per } -L < x < 0 \\ +\infty & \text{per } x > 0 \,, \end{cases}$$

con $V_{buca}(x) < 0$. Inizialmente, si assuma $V_{buca}(x) = -V_0$, con $V_0 > 0$.

1) Determinare il numero di stati legati come funzione di V_0, L e m. Determinare il valore di V_0 in modo che esista un solo stato legato, ψ_0, e che questo abbia energia $E_0 = -V_0/2$.

2) Scrivere la funzione d'onda normalizzata dello stato legato ψ_0 e calcolare la corrispondente probabilità di trovare la particella nella regione $x < -L$.

3) Si consideri ora $V_{buca}(x) = -V_0 + vx$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, calcolare la variazione dell'energia dello stato legato rispetto al caso precedente nel limite $vL/V_0 \ll 1$.

Formule utili (a_0 è il raggio di Bohr e $R_{ij}(r)$ sono le autofunzioni radiali normalizzate per il problema Coulombiano):

$$\begin{aligned} R_{10}(r) &= a_0^{-3/2}\, 2e^{-r/a_0} \\ R_{20}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\,(2 - r/a_0)e^{-r/(2a_0)} \\ R_{21}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\,\frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-r/(2a_0)} \end{aligned}$$