Esame di Meccanica Quantistica 11/07/2024

Esercizio 1. Lo stato di un particella di massa m al tempo $t = 0$, in una dimensione, è specificato dalla seguente funzione d'onda

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = \mathcal{N} e^{ik_0 x} e^{-k_0|x|}\,,$$

dove $k_0 > 0$ è un parametro assegnato e $\mathcal{N} > 0$ è una costante di normalizzazione tale per cui $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

1) Calcolare il valore di $\mathcal{N}$ e graficare la densità di probabilità $\rho(x)$ di misurare la posizione x.

2) Calcolare la media dell'operatore posizione e la sua dispersione Δx.

3) Calcolare la densità di probabilità $\pi(p)$ di misurare l'impulso p e disegnarne il grafico.

4) Utilizzando l'espressione di $\pi(p)$, calcolare la dispersione Δp dell'operatore impulso. Verificare la relazione di indeterminazione posizione-impulso per lo stato $|\alpha\rangle$.

5) La particella evolve con l'Hamiltoniana di particella libera. Calcolare i valori medi di posizione e impulso e la densità di probabilità $\pi(p, t)$ al generico istante di tempo $t > 0$.

Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{((n-1)!)^2} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}} \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

Esercizio 2. Due particelle identiche di spin 0 sono vincolate sulla superficie di una sfera e soggette alla seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{L_1^2}{2I} + \frac{L_2^2}{2I} + \frac{\alpha}{I} \boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2\,, \tag{1}$$

dove I è il momento di inerzia ed $0 < \alpha \ll 1$ è un coefficiente numerico.

1) Si determinino i primi 4 livelli energetici, la loro degenerazione ed i corrispondenti autoket di H.

2) Si consideri uno stato tale che una misura dell'energia fornisce sempre un'energia $E < 5\hbar^2/2I$ e tale che, se viene effettuata una misura simultanea della proiezione del momento angolare orbitale delle particelle lungo $\hat{z}$, si ottengono sempre i valori $+\hbar$ e $-\hbar$. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia in tale stato. Si scriva il ket di stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t > 0$.

3) Si determinino, al tempo $t > 0$, i possibili valori ottenibili da una misura di L_z, L^2 e $L_{z1}L_{z2}$, specificando le corrispondenti probabilità ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$).

4) Si consideri la perturbazione $\Delta H = \zeta(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2)$. Al primo ordine perturbativo nel parametro ζ, si determini la correzione al secondo livello energetico (primo eccitato) e se ne discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.