Analisi Vettoriale aa 2023/24 (lt 30046) – E Montefusco – 20240704

Nome: Cognome:

Avvertenze:
La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti, dalla chiarezza dell'esposizione e dalla correttezza dell'italiano, dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1	
ex.2	
ex.3	
ex.4	
tot.	

Esercizio 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si scriva l'equazione del polinomio di Taylor di ordine 2 relativo alla funzione f *centrato in* $x_0 = (0, 0)$*,*
iii. si calcoli un vettore normale al piano tangente al grafico di f *nel punto* $(1, 1, e^{-2})$*.*

Soluzione. i. la funzione è composizione di un polinomio con una funzione analitica, quindi questo è già sufficiente a garantire la differenziabilità di f, in ogni caso è facile osservare che è una funzione continua con derivate parziali continue in tutto il piano e quindi f è differenziabile in tutto il piano per il teorema del differenziale totale, infatti

$$f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2} \qquad \partial_1 f(x_1, x_2) = -2x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2} \qquad \partial_2 f(x_1, x_2) = -2x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

sono funzioni generate da prodotti e composizioni di polinomi e della funzione esponenziale.
ii. L'espressione generale del polinomio di Taylor del secondo ordine è

$$T_{2,f}(x, x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\left[HF(x_0)(x - x_0)\right] \cdot (x - x_0)$$

nel nostro caso, grazie ai calcoli svolti in i., abbiamo subito che

$$f(0, 0) = f(O) = 1 \qquad \nabla f(0, 0) = \nabla f(O) = (0, 0)$$

inoltre, ricordando il teorema di Schwarz, vale

$$\partial_{11} f(x) = 2\left(2x_1^2 - 1\right) e^{-x_1^2 - x_2^2} \qquad \partial_{12} f(x) = \partial_{21} f(x) = 4x_1 x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2} \qquad \partial_{22} f(x) = 2\left(2x_2^2 - 1\right) e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

da cui segue

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad T_{2,f}(x, O) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

iii. Cominciamo calcolando l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(1, 1, e^{-2})$, che è esattamente la formula di Taylor di ordine 1

$$x_3 = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1) = e^{-2} + \left(-2e^{-2}, -2e^{-2}\right) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1)$$
$$2x_1 + 2x_2 + e^2 x_3 = 5$$

A questo punto possiamo notare che il piano è, di fatto, l'insieme di livello di una funzione di tre variabili! A lezione è stato provato che il vettore gradiente indica sempre una direzione perpendicolare all'insieme di livello, per cui un vettore normale desiderato è

$$v = \left(2, 2, e^2\right)$$

□

Esercizio 2 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$*, di legge* $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$*, e il vincolo* $\mathcal{M} = \{x_1 + x_2 - x_3 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si mostri che $\mathcal{M}$ *è non vuoto, chiuso e non limitato,*
ii. si trovino i punti critici di g *vincolati su* $\mathcal{M}$*,*
iii. si cerchi di determinare la natura dei punti critici trovati.

Soluzione. i. $\mathcal{M}$ è non vuoto, perché (per esempio) i punti $(1, 00)$, $(1, 1, 1)$ e $(t + 1, -t, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$, appartengono al vincolo. $\mathcal{M}$ è chiuso perché è l'insieme di livello $\{h(x) = 0\}$, dove $h(x) = h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3 - 1$, e siccome $h \in C^0(\mathbb{R}^3)$, $\mathcal{M}$ è chiuso perché controimmagine di un chiuso (si noti che il vincolo

è un iperpiano). Infine notiamo che $\mathcal{M}$ non è limitato: abbiamo osservato prima che i punti $p(t) = (-t, t+1, 0)$ appartengono all'iperpiano e vale $\|p(t)\|_2^2 = [2t^2t + 2t + 1] \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$.
ii. Per identificare i punti critici della funzione $g\big|_{\mathcal{M}}$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange cercando i punti critici liberi della funzione di Lagrange

$$L(x_1, x_2, x_3, q) = g(x_1, x_2, x_3) - qh(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - q\,(x_1 + x_2 - x_3 - 1)$$

$$\begin{cases} \partial_1 L(x_1, x_2, x_3, q) = 2x_1 - q = 0 \\ \partial_2 L(x_1, x_2, x_3, q) = -q = 0 \\ \partial_3 L(x_1, x_2, x_3, q) = 2x_3 + q = 0 \\ \partial_4 L(x_1, x_2, x_3, q) = x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è $q = 0$, quindi dalla prima e dalla terza ricaviamo $x_1 = x_3 = 0$, infine l'equazione del vincolo ci permette di ottenere che $x_2 = 1$, in questo modo abbiamo identificato un unico punto critico $Q = (0, 1, 0)$.
iii. Da un punto di vista geometrico, la funzione g è la distanza (al quadrato) dell'input x dall'asse x_2, il punto critico Q trovato in ii. è il punto del piano $\mathcal{M}$ più vicino alla retta, quindi è un punto di minimo assoluto per g vincolata su $\mathcal{M}$, infatti $g(x) \le 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, e $g(Q) = 0$. Analogamente è facile verificare che $g(p(t)) = t^2$, per cui possiamo affermare che g non è superiormente limitata sul vincolo, quindi non esiste massimo assoluto. $\square$

Esercizio 3 (punti: 2+3+3). *Data la superficie Σ di parametrizzazione $\phi(u, w) = \big(u\cos(w), u\sin(w), 1 - u^2\big)$ con $(u, w) \in K = [0, 1] \times [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}^2$*
i. si spieghi perché Σ è una superficie regolare,
ii. si calcoli $A(\Sigma)$, cioè l'area della superficie Σ,
iii. si calcoli la circuitazione, lungo la curva $\partial\Sigma$, del campo vettoriale $F(x) = \big(x_1^2, x_2^2, x_3^2\big)$.

Soluzione. i. La superficie è la coppia costituita dalla parametrizzazione ϕ e dal suo dominio K, mentre l'oggetto geometrico che costituisce la superficie da un punto di vista intuitivo è $\phi(K) \subseteq \mathbb{R}^3$. La regolarità della superficie consiste nell'osservare che le componenti di ϕ sono funzioni di classe C^∞, che la parametrizzazione è iniettiva in $\mathrm{int}(K) = (0, 1) \times (0, 2\pi)$ visto che

$$\phi(u, w) = (u\cos(w), u\sin(w), 1 - u^2) = (s\cos(t), s\sin(t), 1 - s^2) = \phi(s, t)$$

implica $u = s$, perché la funzione $u \longmapsto (1 - u^2)$ è iniettiva in $(0, 1)$, sapendo che $u = s \neq 0$ segue, dall'uguaglianza delle prime due componenti, che $w = t$, provando l'iniettività di ϕ.
Infine mostriamo che, per ogni $(u, w) \in \mathrm{int}(K)$, esiste il vettore normale alla superficie

$$\partial_1\phi(u, w) = (\cos(w), \sin(w), -2u) \qquad \partial_2\phi(u, w) = (-u\sin(w), u\cos(w), 0)$$

$$\text{da cui} \qquad (\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi)(u, w) = \big(2u^2\sin(w), 2u^2\cos(w), u\big) \neq O \qquad \text{per ogni } (u, w) \in \mathrm{int}(K)$$

ii. Per definizione vale che

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_\Sigma d\sigma = \iint_K \|(\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi)(u, w)\|_2\, du\, dw = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[u^2 + 4u^4\right]^{1/2} dw\right] du \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} u\left[1 + 4u^2\right]^{1/2} dw\right] du = 2\pi \int_0^1 u\left[1 + 4u^2\right]^{1/2} du = \frac{\pi}{4}\int_0^5 \sqrt{s}\, ds \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}s^{3/2}\right]_0^5 = \frac{5\pi\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

dove, nella risoluzione degli integrali, abbiamo sfruttato il fatto che K è un rettangolo (cioè un dominio normale rispetto ad entrambe le variabili), e la sostituzione $(1 + 4u^2) = s$.
iii. Abbiamo già osservato che Σ è una superficie regolare, inoltre è possibile osservare che si tratta di una superficie di rivoluzione, ottenuta ruotando di un angolo giro, intorno all'asse x_3, un tratto del grafico della parabola di parametrizzazione $(u, 1 - u^2)$ nel piano x_1x_3. Inoltre il campo vettoriale F è regolare in tutto $\mathbb{R}^3$, avendo componenti polinomiali, possiamo quindi applicare il teorema del rotore per calcolare la circuitazione in oggetto nel seguente modo

$$\oint_{\partial\Sigma^+} [F(x) \cdot T(x)]\, ds = \iint_\Sigma [\mathrm{rot}(F)(x) \cdot n(x)]\, d\sigma$$

Genericamente gli integrali di linea sono meno problematici degli integrali di superficie, però in questo caso vale

$$\mathrm{rot}(F)(x) = \nabla \wedge F(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \left(\partial_2 x_3^2 - \partial_3 x_2^2, \partial_3 x_1^2 - \partial_1 x_3^2, \partial_1 x_2^2 - \partial_2 x_1^2\right) = (0,0,0)$$

per cui possiamo concludere che la circuitazione è nulla senza risolvere esplicitamente alcun integrale. □

Esercizio 4 (punti: 2+3+3)**.** *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) = u(x)\left(u^4(x) - 1\right) \\ u(0) = c \end{cases}$$

si risponda ai seguenti quesiti
i. si spieghi perché il sistema possiede un'unica soluzione locale u_c *per ogni* $c \in \mathbb{R}$*,*
ii. si calcoli il polinomio di Taylor, di grado 2 con centro $x_0 = 0$*, della soluzione* u_c*,*
iii. si determini per quali valori del parametro si ha che $u_c(x) \longrightarrow 0$ *per* $x \longrightarrow +\infty$*.*

Soluzione. i. Il problema di Cauchy che stiamo studiando è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale a variabili separabili. La funzione che definisce il secondo membro dell'equazione è $f(x,s) = s(s^4 - 1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi il problema è autonomo e la funzione (a causa della sua regolarità) è localmente lipschitziana, in tutto il piano, rispetto alla seconda variabile s, che è l'unica che appare esplicitamente. Le precedenti osservazioni ci permettono di concludere che le ipotesi del teorema di Picard e Lindeloff sono soddisfatte, per cui abbiamo esistenza ed unicità della soluzione locale per ogni $c \in \mathbb{R}$.
ii. Ricordando che l'espressione del polinomio di Taylor del secondo ordine è

$$T_{u,2}(x, x_0) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}u''(x_0)(x - x_0)^2$$

risulta evidente che abbiamo necessità di ricavare dall'equazione differenziale alcuni valori di u_c e delle sue derivate. Il dato iniziale e l'equazione ci danno subito che

$$u_c(0) = c \qquad \text{e} \qquad u_c'(0) = f(0, u_c(0)) = c(c^4 - 1)$$

inoltre, per il teorema di dervazione delle funzioni composte, vale

$$u_c''(x) = \frac{d}{dx}u_c'(x) = \frac{d}{dx}\left[u_c(x)\left(u_c^4(x) - 1\right)\right] = \left(5u_c^4(x) - 1\right)u_c'(x) = \left(5u_c^4(x) - 1\right)\cdot u_c(x)\left(u_c^4(x) - 1\right)$$

e ricaviamo che

$$u_c''(0) = c(c^4 - 1)(5c^4 - 1)$$

e quindi otteniamo che

$$T_{u_c,2}(x, 0) = c + c(c^4 - 1)x + \frac{1}{2}c(c^4 - 1)(5c^4 - 1)x^2$$

iii. Abbiamo osservato prima che l'equazione differenziale è un'equazione a variabili separabili e possiamo verificare subito che l'equazione possiede le seguenti tre soluzioni costanti (e globali)

$$u_-(x) \equiv -1 \qquad u_0(x) \equiv 0 \qquad \text{e} \qquad u_+(x) \equiv +1$$

L'unicità della soluzione del problema di Cauchy ha, come conseguenza, che i grafici di soluzioni differenti non possono avere punti in comune, quindi gli unici dati iniziali che hanno la possibilità di generare soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ e infinitesime a $+\infty$ sono i valori dell'intervallo $(-1,1)$. Proviamo che tali valori sono esattamente l'intervallo $(-1,1)$, infatti (tranne la soluzione identicamente nulla u_0)) tali soluzioni u_c sono funzioni strettamente monotone, visto che

$$u_c'(x) < 0 \qquad \text{se } c \in (0,1) \qquad \text{e} \qquad u_c'(x) > 0 \qquad \text{se } c \in (-1,0)$$

Questo perché $c(c^4 - 1)$ è positiva in $(-1,0)$ e negativa in $(0,1)$, e una soluzione che ha dato iniziale in uno dei due sottointervalli ha immagine interamente contenuta nel sottointervallo, visto che non può uscirne intersecando il grafico di una delle soluzioni costanti scritte prima. Poiché tali soluzioni sono monotone hanno limite per $x \longrightarrow +\infty$ e tale limite deve essere una soluzione dell'equazione $L(L^4 - 1) = 0$, per il teorema dell'asintoto, dunque abbiamo che $L = 0$, sempre per la monotonia di u_c. □
