Analisi Vettoriale aa 2023/24 (lt 30046) – E Montefusco – 20240619

Nome: Cognome:

Avvertenze:
La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1	
ex.2	
ex.3	
ex.4	
tot.	

Esercizio 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si scriva l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,0,0,0)$,
iii. si verifichi che $(1/2, 1/2, 0)$ *è un punto critico di* f *e se ne determini la natura.*

Soluzione. i. Osserviamo immediatamente che è possibile derivare la funzione ottenendo le seguenti derivate parziali

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) &= [1-2x_1(x_1+x_2)]\, e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\\
\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) &= [1-2x_2(x_1+x_2)]\, e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}\\
\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= -2x_3(x_1+x_2)e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}
\end{aligned}$$

e poiché tali derivate sono somma, prodotto e composizione di funzioni continue possiamo concludere che f è continua, derivabile con derivate parziali continue in tutto lo spazio, quindi, grazie al teorema del differenziale totale, risulta differenziabile in tutto lo spazio.
ii. Ricordiamo che l'equazione (astratta) dell'iperpiano tangente al grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ è un'equazione algebrica in 4 variabili, perché il grafico è un sottorinsieme del prodotto cartesiano di dominio e codominio: in questo caso di $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Tale equazione è il polinomio di Taylor del primo ordine, quindi abbiamo che

$$x_4 = f(0,0,0) + \nabla f(0,0,0)\cdot(x_1-0, x_2-0, x_3-0) = 0 + (1,1,0)\cdot(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2$$

iii. I punti critici sono punti in cui l'iperpiano tangente è parallelo all'iperpiano $\{x_4 = 0\}$, cioè punti che risolvono l'equazione vettoriale $\nabla f(x) = 0$, quindi

$$\begin{cases} [1-2x_1(x_1+x_2)]\, e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2} = 0\\ [1-2x_2(x_1+x_2)]\, e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2} = 0\\ -2x_3(x_1+x_2)e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{che equivale a} \qquad \begin{cases} 2x_1^2 + 2x_1x_2 = 1\\ 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1\\ 2x_3(x_1+x_2) = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il testo chiede solo di verificare che $P = (1/2, 1/2, 0)$ è un punto critico, cioè che è una soluzione del precedente sistema, non di trovare tutte le soluzioni! Nonostante questa osservazione procediamo notando che un punto critico deve risolvere o $x_3 = 0$ o $x_1 = -x_2$, inoltre, sottrando le prime due equazioni, otteniamo che $x_1^2 - x_2^2 = 0$, cioè $x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$.
Considerando la relazione $\{x_1 = -x_2\}$ e sostituendo nelle prime due equazioni troviamo che $0 = 1$, quindi non otteniamo alcun punto critico. Invece se prendiamo in esame le relazioni $x_3 = 0$ e $x_1 = x_2$, sempre sostituendo nelle prime due equazioni, otteniamo che $x_2^2 = 1/4$, cioè che $x_2 = x_1 = \pm 1/2$ e quindi abbiamo identificato i due soli punti critici della funzione

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \qquad \text{e} \qquad Q = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

Per determinare la natura di P possiamo studiare la matrice hessiana di f, svolgendo qualche derivata abbiamo che

$$\partial_{11}f(x_1,x_2,x_3) = 2\Big[4x_1^2(x_1+x_2) - 3x_1 - x_2\Big]\,e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$
$$\partial_{22}f(x_1,x_2,x_3) = 2\Big[4x_2^2(x_1+x_2) - x_1 - 3x_2\Big]\,e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$
$$\partial_{33}f(x_1,x_2,x_3) = -2\,[x_1+x_2]\,e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$
$$\partial_{12}f(x_1,x_2,x_3) = \partial_{21}f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1+x_2)\,[2x_1x_2-1]\,e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$
$$\partial_{13}f(x_1,x_2,x_3) = \partial_{31}f(x_1,x_2,x_3) = -2x_3\,[1-2x_1(x_1+x_2)]\,e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$
$$\partial_{23}f(x_1,x_2,x_3) = \partial_{32}f(x_1,x_2,x_3) = -2x_3\,[1-2x_2(x_1+x_2)]\,e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$$

questo perché $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e il teorema di Schwartz prova che le derivate miste non dipendono dall'ordine delle derivazioni seguito. In particolare segue che

$$Hf(P) = Hf\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\Big) = \frac{1}{e^{1/2}}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice è $p(\lambda) = (2+\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3)$ le cui radici sono i valori $\lambda = -1,-2,-3$, essendo tutti negativi possiamo concludere che P è un punto di massimo locale (in realtà assoluto) per la funzione f. $\square$

Esercizio 2 (punti: 2+4+2). *Data la funzione* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, *di legge* $g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_3^2$, *e il vincolo* $\mathcal{M} = \{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si provi che $\mathcal{M}$ *è non vuoto e limitato,*
ii. si trovino i punti critici di g *vincolati su* $\mathcal{M}$,
ii. si cerchi di determinare la natura dei punti critici trovati.

Soluzione. i. Manipoliamo l'equazione del vincolo per ottenere che

$$\mathcal{M} = \{x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 3\} = \{(x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\} = \partial B(e_1,2)$$

dunque il vincolo $\mathcal{M}$ è la superficie sferica centrata nel punto $e_1 = (1,0,0)$ di raggio 2, e quindi risulta automaticamente non vuota e limitata. In alternativa è sufficiente osservare che il punto $\big(0,\sqrt{3},0\big) \in \mathcal{M}$ e che se $(p_1,p_2,p_3) \in \mathcal{M}$ allora abbiamo

$$p_1^2 - 2p_1 \le p_1^2 - 2p_1 + p_2^2 + p_3^2 = 3 \qquad \text{e quindi} \qquad -1 \le p_1 \le 3$$

dalla precedente stima otteniamo che

$$-1 + p_2^2 + p_3^2 \le p_1^2 - 2p_1 + p_2^2 + p_3^2 = 3 \qquad \text{da cui} \qquad p_2^2 + p_3^2 \le 4$$

rispondendo alla domanda.
ii. Per identificare i punti critici di g su $\mathcal{M}$ possiamo studiare, come visto a lezione, i punti critici liberi della seguente funzione di Lagrange

$$L(x,c) = x_1^2 + x_3^2 + c(x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 3)$$

cioè le soluzioni del seguente sistema di 4 equazioni

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,c) = 2x_1 + c(2x_1-2) = 2[(1+c)x_1 - c] = 0 \\ \partial_2 L(x,c) = 2cx_2 = 0 \\ \partial_3 L(x,c) = 2x_3 + 2cx_3 = 2(1+c)x_3 = 0 \\ \partial_4 L(x,c) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci fornisce l'alternativa o $c = 0$ o $x_2 = 0$.
La prima eventualità ci permette di ricavare dalla prima equazione che $x_1 = 0$ e dalla terza che $x_3 = 0$, infine l'equazione del vincolo ci dà $x_2^2 = 3$, cioè $x_2 = \pm\sqrt{3}$: in questo modo abbiamo trovato due punti critici $A = \big(0,\sqrt{3},0\big)$ e $B = \big(0,-\sqrt{3},0\big)$.
Consideriamo ora la seconda eventualità, cioè $x_2 = 0$, la terza equazione produce una nuova alternativa: o $c = -1$ o $x_3 = 0$. Notiamo subito che deve essere $c \ne 1$, a causa della prima equazione, quindi abbiamo

$x_2 = x_3 = 0$ e $x_1^2 - 2x_1 - 3 = 0$, ottenendo altri due punti critici $C = (-1,0,0)$ e $D = (3,0,0)$, terminando la ricerca dei punti critici vincolati.
iii. Poiché vale che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^0(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{M}$ è compatto, in quanto chiuso e limitato, dal teorema di Weierstrass sappiamo che esiste massimo e minimo assoluto di g su $\mathcal{M}$, a questo punto possiamo procedere per confronto

$$g(A) = 0 = g(B) \qquad g(C) = 1 \qquad g(D) = 9$$

e concludere che D è il punto di massimo assoluto di g ristretta su $\mathcal{M}$, A e B sono due punti di minimo assoluto e C è "semplicemente" un punto di sella. □

Esercizio 3 (punti: 2+3+3). *Dato $E = \{0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le (1 - x_1^2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$*
i. si spieghi perché E è limitato e misurabile,
ii. si calcoli il volume $m_3(E)$,
iii. si calcoli il flusso, attraverso la superficie ∂E, del campo vettoriale $F(x) = \left(0, x_2^2, x_3^2\right)$.

Soluzione. i. E è limitato perché dalla sua definizione si deduce che, se $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, allora

$$0 \le x_1, x_2 \le 1 \qquad \text{e} \qquad 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2 \le 1$$

quindi $E \subseteq [0,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$. E è misurabile perché è chiuso, in quanto intersezione di tre insiemi chiusi, e gli insiemi chiusi sono misurabili secondo Lebesgue.
ii. Per calcolare il volume del solido ricorriamo alle formule di riduzione degli integrali sfruttando il fatto che il solido è già descritto come un dominio normale. quindi integriamo per fili nel seguente modo

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^{1-x_1^2} dx_3 \right] dx_2 \right] dx_1 = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[1 - x_1^2\right] dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_0^1 \left[1 - x_1^2\right] dx_1 = \left[x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

iii. Per il calcolo del flusso ricorriamo al teorema della divergenza che sancisce la relazione

$$\Phi_{\partial E}(F) = \iint_{\partial E} F(x) \cdot n d\sigma = \iiint_E \nabla \cdot F(x) dx$$

a patto che il dominio sia sufficientemente regolare (cioè con frontiera C^1 a tratti) e che il campo F sia di classe C^1 su un aperto contenente E: nel nostro caso tutto è soddisfatto! Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial E}(F) &= \iiint_E \left[\partial_2(x_2^2) + \partial_3(x_3^2)\right] dx = 2 \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^{1-x_1^2} (x_2 + x_3) dx_3 \right] dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[2x_2(1 - x_1^2) + (1 - x_1^2)^2 \right] dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x_1^2) + (1 - x_1^2)^2 \right] dx_1 = \int_0^1 \left[2 - 3x_1^2 + x_1^4 \right] dx_1 = \left[2x_1 - x_1^3 + \frac{1}{5} x_1^5 \right]_0^1 = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

□

Esercizio 4 (punti: 2+2+2+2). *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(x) = xe^{-w(x)} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

si risponda ai seguenti quesiti esattamente nell'ordine in cui sono proposti
i. si spieghi perché il sistema possiede un'unica soluzione locale w,
ii. si calcoli il polinomio di Taylor, di grado 2 con centro $x_0 = 0$, di w,
iii. si spieghi perché la soluzione non può essere monotona,
iv. si ricavi l'espressione esplicita di w.

Soluzione. i. L'equazione differenziale del problema di Cauchy è un'equazione del primo ordine, a variabili separabili, scritta in forma normale, cioè rientra nella tipologia

$$w'(x) = f(x, w(x)) \qquad \text{con} \qquad f(x,p) = xe^{-p} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$$

Il fatto che la funzione sia molto regolare ci permette di provare che è localmente lipschitziana nella seconda variabile, per cui possiamo dire che il teorema di Cauhcy & Lipschitz prova l'esistenza e l'unicità della soluzione. La lipschitzianità nella seconda variabile può essee provata nel seguente modo

$$|f(x,p) - f(x,q)| = |x| \cdot |e^{-p} - e^{-q}| = |x| \cdot |-e^{-c}| \cdot |p-q| \leq L|p-q|$$

$$\text{a patto che} \quad (x,p),(x,q) \in [-r_1, r_1] \times [-r_2, r_2] \subseteq \mathbb{R}^2$$

ii. Sappiamo che il polinomio di Taylor di una funzione di classe C^2 ha la seguente espressione

$$T_{2,f}(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

Proviamo subto che w ha la regolarità richiesta, infatti è derivabile con derivata continua ($f \in C^{\infty}$, quindi la composizione con $w \in C^0$ dà luogo ad una funzione continua), per cui otteniamo che $w \in C^1$. A questo punto possiamo osservare che w' è di classe C^1, perché come prima $f \in C^{\infty}$, e concludere che $w \in C^2$, per cui possiamo applicare la formula nota calcolando i coefficienti dello sviluppo di Taylor. Nel nostro caso vale $x_0 = 0$ e anche

$$w(0) = 0 \qquad w'(0) = f(0,0) = 0$$

inoltre abbiamo

$$w''(x) = \frac{d}{dx}\left[xe^{-w(x)}\right] = e^{-w(x)} + x\left(-e^{-w(x)}w'(x)\right) = e^{-w(x)}\left[1 - x^2e^{-w(x)}\right]$$

$$w''(0) = 1$$

da cui concludiamo che

$$T_{2,w}(x,0) = \frac{1}{2}x^2$$

iii. Abbiamo notato, in ii, che $w'(0) = 0$, cioè che $x_0 = 0$ è sempre un punto critico per la soluzione del problema di Cauchy. Volendo studiare il segno della derivata, dall'equazione differenziale possiamo dedurre che

$$w'(x) = xe^{-w(x)} \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad x \geq 0$$

per le proprietà della fuzione esponenziale, quindi w è decrescente a sinistra di 0 e crescente a destra, per cui la funzione non è monotona e ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo (locale?).
iv. Abbiamo già scritto che l'equazione differenziale è a variabili separabili, quindi possiamo procedere nel seguente modo

$$\int_0^x w'(x)e^{w(x)}dx = \int_0^x x\,dx \qquad \text{da cui} \qquad e^{w(x)} - e^0 = \frac{1}{2}x^2 - 0$$

esplicitando l'espressione otteniamo che

$$w(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)$$

□