Esame di Meccanica Quantistica, 09/05/2024

Esercizio 1. Due particelle indistiguibili di massa m e spin 1 sono vincolate a muoversi in una dimensione. La Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}m\omega^2(x_1 - x_2)^2 + \frac{\omega}{2\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Si risolva il problema nel sistema del centro di massa.

a) Si determinino le energie e le degenerazioni dei primi tre livelli del sistema.

b) Le particelle si trovano nello stato ($x = x_2 - x_1$)

$$\Psi = \psi_1(x)(A|1, -1\rangle + B|-1, 1\rangle) + C\psi_2(x)|0, 0\rangle,$$

dove A, B, C sono costanti complesse. Abbiamo indicato con $\psi_n(x)$ le autofunzioni dell'oscillatore armonico di pulsazione ω e massa $\mu = m/2$ e con $|s_1, s_2\rangle$ gli autovettori di S_{1z} ed S_{2z} con autovalori $\hbar s_1$ ed $\hbar s_2$.
Si determinino tutti gli stati tali che la probabilità di misurare $S^2 = 0$ sia 1/6, dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale. Per tali stati quali sono i valori misurabili di S^2 e quali sono le corrispondenti probabilità? Si risponda alla stessa domanda per S_z e per l'energia.

c) Sia $\Psi(t)$ l'evoluto temporale di Ψ, $\Psi(0) = \Psi$. Si calcoli $\langle\Psi(t)|S^2|\Psi(t)\rangle$.

d) Si calcoli $\langle\Psi|(x_2 - x_1)^2|\Psi\rangle$.

Esercizio 2. Una particella possiede la stessa massa e carica elettrica dell'elettrone ma ha spin pari a 3/2 invece che 1/2. La Hamiltoniana che descrive la sua dinamica è la seguente:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + A\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} \tag{1}$$

con $0 < A\hbar^2 \ll 1$ eV. Nota: l'interazione Coulombiana è scritta nel sistema di Gauss; nel SI si usi $-e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

a) Si determinino i commutatori $[H_0, \mathbf{J}], [H_0, \mathbf{L}]$ e $[H_0, \mathbf{S}]$ ($\boldsymbol{J}$ è il momento angolare totale, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$).

b) Si determini lo spettro di H_0. In particolare si indichi la degenerazione e una base di autoket per ogni livello energetico con energia $E < -2$ eV.

c) Il sistema viene ora perturbato in maniera armonica, $H = H_0 + V_z$, con

$$V_z = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \tag{2}$$

e $\omega \ll A\hbar$. Al primo ordine perturbativo nel parametro ω^2, si determini la correzione al primo livello energetico (quello di energia minore) trovato al punto b). Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione. [**Il testo continua nella pagina successiva**]

d) Si risponda di nuovo alla domanda c), considerando ora come perturbazione l'operatore $V_r = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ e come livello imperturbato di H_0 quello con momento angolare totale $J = \hbar/2$ e con energia $E < -2$ eV.

e) Si indichi, motivando la risposta, se esistono o meno autofunzioni limitate non-normalizzabili dei seguenti operatori: H_0, $H_0 + V_r$ e $H_0 + V_z$.

Formule utili (a_0 è il raggio di Bohr e $R_{ij}(r)$ sono le autofunzioni radiali normalizzate per il problema Coulombiano):

$$
\begin{aligned}
E_I &= \left.\frac{me^4}{2\hbar^2}\right|_{\text{Gauss}} = \left.\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\right|_{\text{SI}} = 13.6 \text{ eV} \\
R_{10}(r) &= a_0^{-3/2}\, 2e^{-r/a_0} \\
R_{20}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\,(2 - r/a_0)e^{-r/(2a_0)} \\
R_{21}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\,\frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-r/(2a_0)} \\
n! &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx
\end{aligned}
$$