

# ANALISI VETTORIALE 2014-2015

## COMPITO D'ESONERO DEL 21-11-2014

1) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)\sin(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabilità di  $f$  in  $(0,0)$ .

2) Sia  $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ . Studiare il segno di  $f$ . Trovare i punti critici di  $f$  e classificarli.

Determinare il massimo e il minimo di  $f$  nel triangolo limitato dagli assi e dalla retta  $x+y=4$

---

3) Sia  $f(x,y) = e^{x-y} - x^2 - y^2 - e(x+1) + 1$ .

Dimostrare che l'insieme degli zeri di  $f$  è il grafico di una funzione  $y = g(x)$  in un intorno del punto  $(0,-1)$ .

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + g(x) + 2x^2}{x^2}$$

4) Sia

$$f_n(x) = x^n(e^{x/n} - 1) \quad x \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

Studiare la convergenza e la convergenza uniforme della successione

5) Sia

$$f(x) = \frac{x^\alpha - 1}{\log x} \quad \alpha > 0$$

Provare che  $f$  è integrabile impropriamente in  $[0,1]$ . Definire  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$ , provare che  $F$  è derivabile, calcolare  $F'(\alpha)$ , dedurre l'espressione di  $F(\alpha)$ .

Calcolare

$$\int_0^1 (x-1)/\log x dx$$