Lezione Fermi 3

Luciano Maiani, AA 14-15

Ancora Quanti e un po' di Relativita'

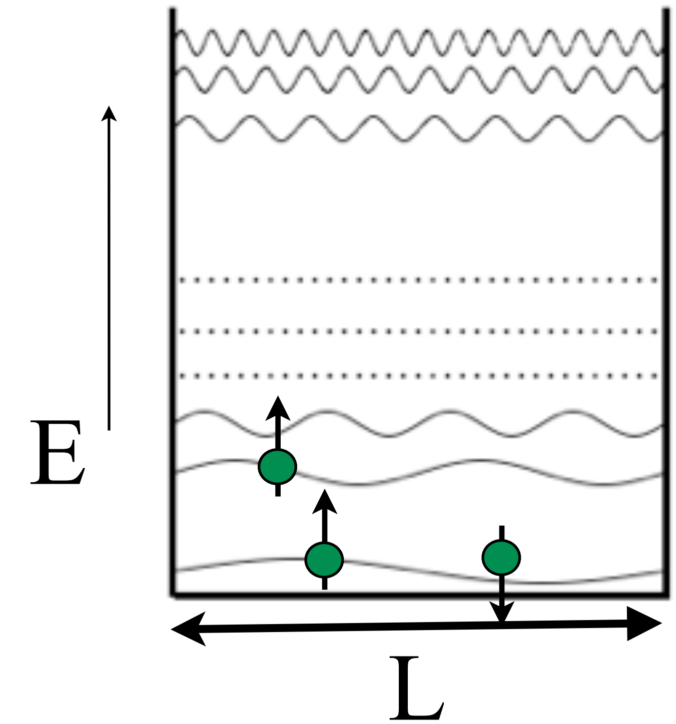
Sommario

1. Il Principio di Esclusione di Pauli
2. Il gas di Fermi-Dirac
3. Un po' di Relativita': la relazione massa-energia
4. Effetto Doppler.

1. Un gas di elettroni

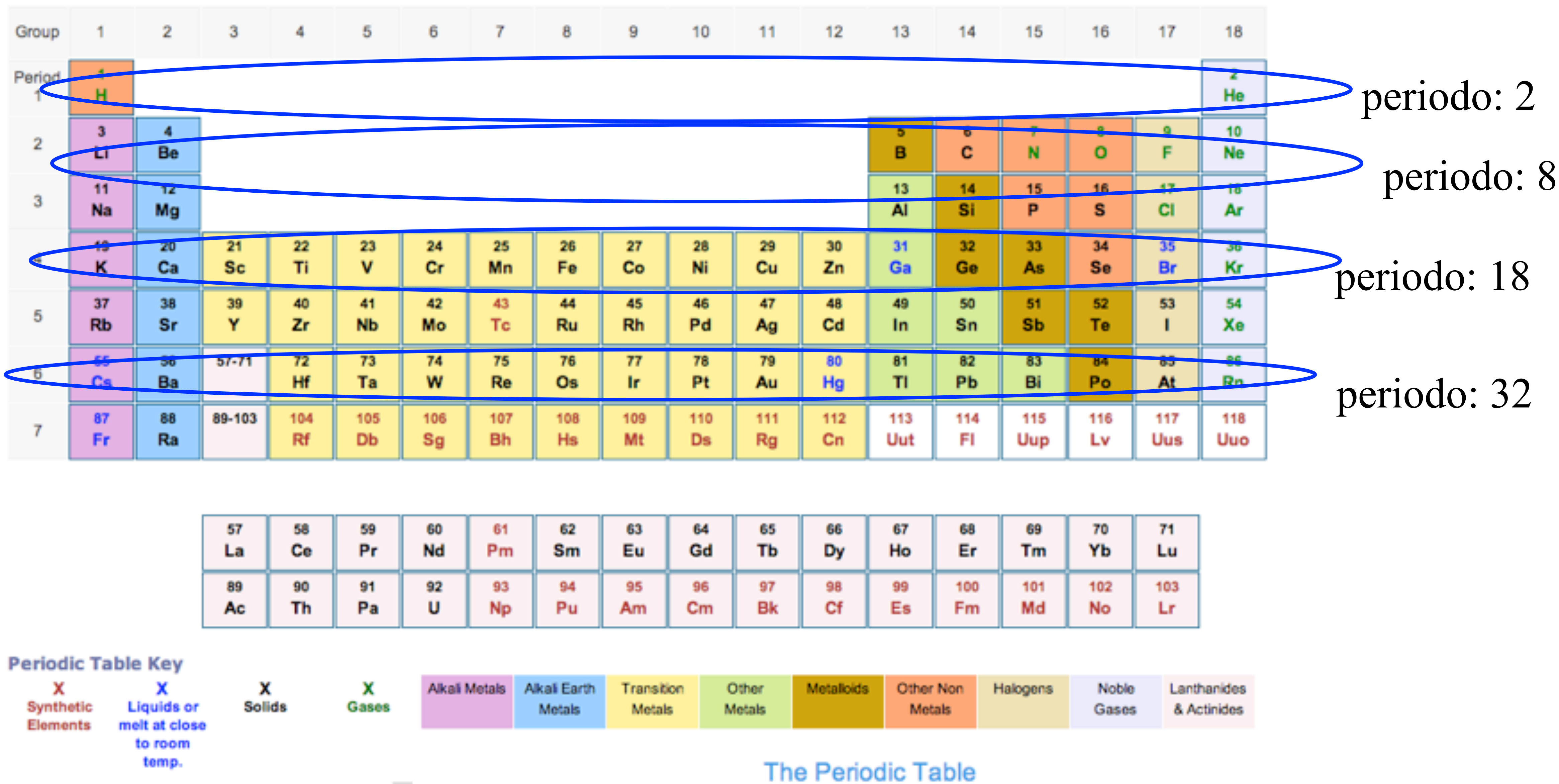
- Elettrone in una scatola: i livelli di energia corrispondono ad onde di De Broglie con lunghezze d'onda che sono sottomultipli dei lati della scatola, $k=\pm n/L$, $n= 1, 2,....$

  - In una dimensione abbiamo i livelli mostrati in Fig.:
  - se abbiamo un solo elettrone, questo si puo' disporre in qualsiasi livello, ad es. nel livello fondamentale, qualunque sia il valore del suo spin (su, o giu')
  - un secondo elettrone puo' anche andare nel livello fondamentale, ma solo se ha spin opposto a quello del primo elettrone
  - un terzo elettrone si collochera' inevitabilmente in un livello superiore
  - E' la manifestazione del ***Principio di esclusione di Pauli***, secondo cui due elettroni con lo stesso spin non possono occupare lo stesso livello di energia.



- Il Principio di Pauli spiega la natura periodica della Tavola degli Elementi di Mendeleev.
- Le proprieta' chimiche di un atomo dipendono dal numero di elettroni che "occupano" l'orbita esterna
- quando l'orbita e' piena, si passa all'orbita superiore con proprieta' analoghe, a parita' di numero di elettroni occupanti.

1. Sistema Periodico, Spin e Principio di Pauli



- ***1869.*** Dimitri Mendeleev scopre le periodicità nelle proprietà chimiche degli elementi
- elementi ordinati secondo il ***peso atomico***, A, le colonne riportano elementi con la stessa ***valenza chimica:*** periodi di 2, 8, 18, 32
- c'erano lacune che si sono colmate nel tempo: previsione di nuovi elementi come il germanio e il gallio
- ci sono "errori": il peso atomico non e' la buona variabile, es. A(K)=39.1, A(Ar)=39.9
- ***1913.*** Henry Mosely scopre il numero atomico, *Z* che caratterizza la carica elettrica del nucleo= +Ze: Z(Ar)=18, Z(K)=19 !

- il periodo 2 si spiega con lo spin dell'elettrone e il Principio di Pauli
  - l'elettrone esiste in due stati, che corrispondono ad un momento di rotazione: spin= +1/2, su; spin= -1/2, giu';
  - due elettroni con lo stesso spin non possono mai stare nello stesso stato orbitale (Pauli)
- quindi, l'orbita piu' bassa puo' accomodare solo 2 elettroni (H, Z=1, He, Z=2), il terzo elettrone (Li, Z=3) deve stare su un'orbita piu' esterna e si cede piu' facilmente (Li ha valenza 1, come H, e sta quindi sulla stessa colonna)
- il periodo 8 corrisponde agli elettroni che possono riempire gli orbitali successivi, che hanno momento angolare orbitale 0 (2 stati) e 1(6 stati)

- poi 18 (l=0,1,2) e 32 (l=0, 1, 2, 3), la regola e' $2*n^2$, n=1,2,...
- e cosi' via...

- si capisce l'entusiasmo di Rutherford: All science is either physics or stamp collecting (citato in *Rutherford at Manchester*, J. B. Birks, 1962)...ne riparleremo.

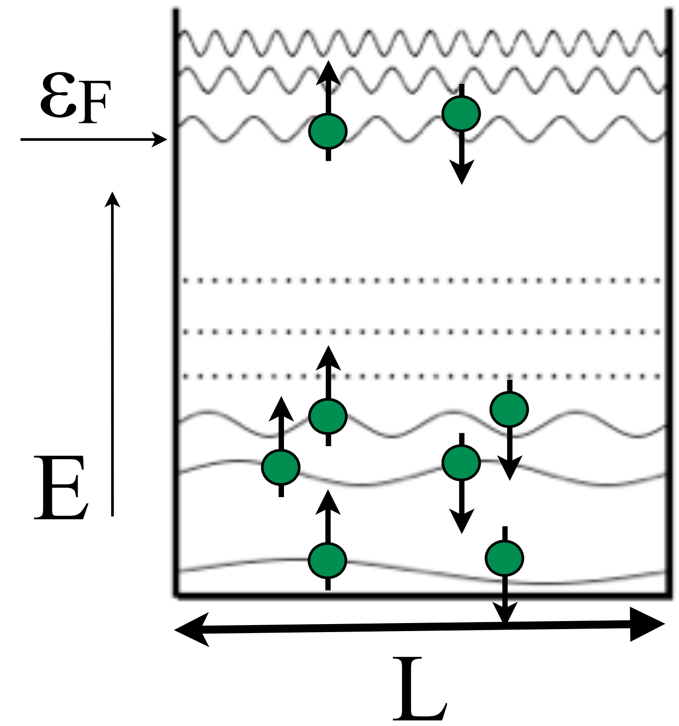
gas quantistici

- Gas di Fermi-Dirac: un gas di particelle identiche che obbediscono al Principio di Pauli (statistica di F-D, o ***fermioni***).
- A basse temeperature ha proprieta' molto diverse da un gas di particelle identiche che obbediscono alla statistica scoperta da Bose e da Einstein (***bosoni***), come i fotoni o gli atomi di He^4
- A zero temperatura, i bosoni "condensano" nello stato fondamentale, dando luogo a fenomeni quantistici collettivi, come superfluidita', rottura spontanea di simmetria, superconduttivita', etc.
- i fermioni a T=0 formano un sistema che resiste alla compressione e puo' dare luogo a sistemi astrofisici compatti, come le nane bianche o le stelle di neutroni.

La pressione del gas di Fermi

- Se mettiamo N elettroni in una scatola a T=0, questi occuperanno tutti i livelli a partire dal basso, fino ad una energia, l'energia di Fermi, determinata dalla condizione che il numero di livelli di energia minore o uguale a ε_F sia esattamente pari a N/2 (in ogni livello ci possono andare al massimo 2 elettroni)

$$2N(\epsilon_F) = N$$



- Se vogliamo ridurre il volume della scatola con N fissato (nessun elettrone e' espulso), dobbiamo tener conto che se lo spigolo diminuisce, le lunghezze d'onda di De Broglie permesse si ridurranno in corrispondenza
- lunghezza d'onda minore corriponde a quantita' di moto maggiore, quindi energia maggiore: le energie dei livelli sono "rivalutate" e l'energia del gas aumenta
- ne segue che per comprimere il gas occorre fare un lavoro $\Delta L=\Delta U> 0$
- Poiche' $\Delta L = P\,\Delta V$, segue che il ***gas ha una pressione positiva anche a T=0*** , pressione che cresce con la densita' del gas, secondo una legge del tipo: $P=K\rho^\gamma$, con K una costante e $\gamma>0$.
- piu' γ e' grande, piu' rigido e' il gas e maggiore la pressione gravitazionale, quindi la massa, che puo' sostenere
- e' il punto di partenza per studiare gli oggetti compatti astrofisici, un campo aperto nel 1930 da uno storico lavoro del fisico teorico indiano Subrahmanyan Chandrasekar.

2. Un po' di Relativita': la relazione massa-energia

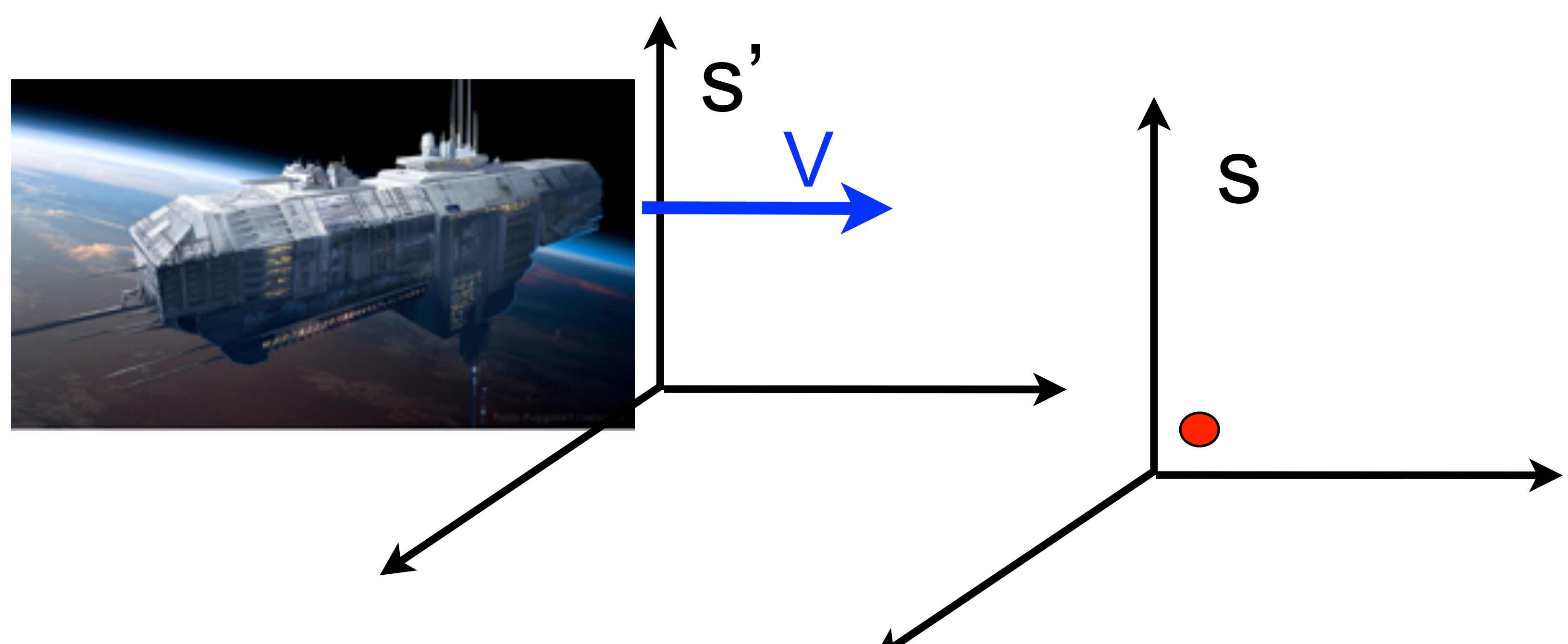
- Nella Teoria della Relativita' Speciale, il moto di una particella e' caratterizzato dall'impulso o quantita' di moto (un vettore con 3 componenti) e dall'energia (1 grandezza)
- se sulla p. non agiscono a forze, queste 4 grandezze sono delle ***costanti del moto***, e formano le componenti di un 4-vettore, q^μ :

$$q^\mu = (\frac{\epsilon}{c}, \mathbf{q})$$

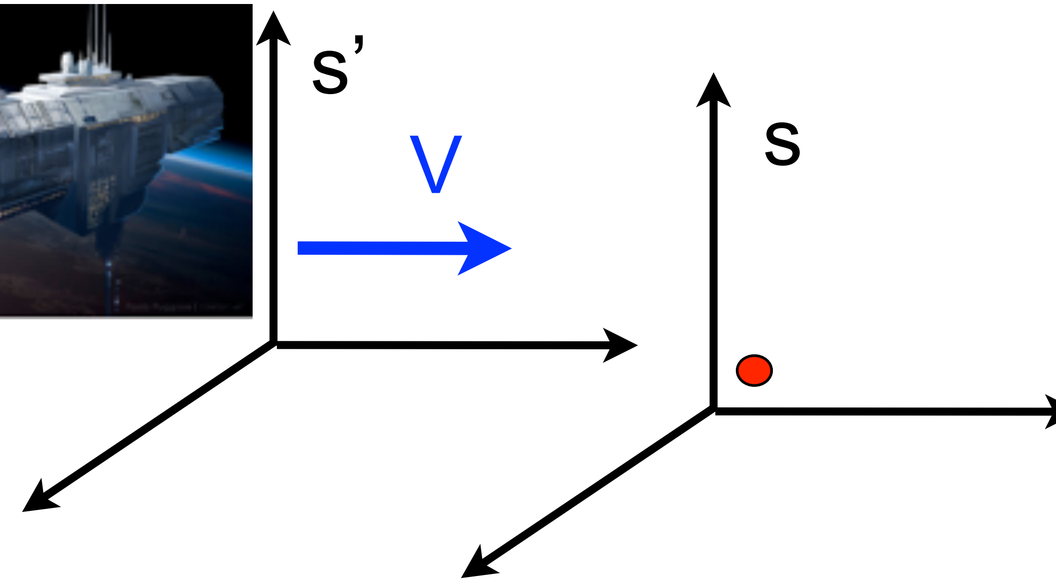
- le leggi di trasformazione delle componenti di q^μ in un sistema S a in un sistema S', in moto con velocita' V lungo l'asse x rispetto ad S, sono le ***trasformazioni di Lorentz***, le stesse delle coordinate spazio-temporali di un evento
- indichiamo con $q^{\mu\prime}$ il 4 vettore visto da S' e con q e q' le componenti dei momenti lungo l'asse z. Si trova:

$$\beta = \frac{V}{c}, \ \gamma = 1/\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}$$

$$\begin{cases} q' = \gamma(q - \beta\frac{\epsilon}{c}) \\ \epsilon' = \gamma(-\beta q c + \epsilon) \end{cases}$$



- prendiamo la particella ferma in S: q=0, ε=m c^2
- abbiamo introdotto m, una costante delle dimensioni di una massa, che rappresenta una proprieta' intrinseca della particella. Troviamo:



$$\begin{cases} q' = -\gamma\beta c m = -\gamma m V \\ \epsilon' = \gamma m c^2 \end{cases}$$

- il segno meno segnala che dall'astronave vediamo la particella ***venirci incontro*** con velocita' V:

$$V = c\frac{|q'|c}{\epsilon'} = c \times \text{momento}/\text{energia}$$

- inoltre troviamo la relazione tra energia e momento: $(\epsilon')^2 - (cq')^2 = (mc^2)^2$
- m e' un ***invariante relativistico***
- supponendo ε >0 : $\epsilon' = mc^2\sqrt{1 + (\frac{q'}{mc})^2}$
- per V (ovvero β) → 0: γ → 1 e ritroviamo le formule Newtoniane

$$\begin{cases} q' = -mV \\ \epsilon' \approx mc^2 + \frac{(q')^2}{2m} = mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{1+z} \approx 1 + \frac{1}{2}z\right)$$

•m e' proprio la massa Newtoniana
•la quantita' di moto e' quella di sempre
•per l'energia ritrovamo l'energia cinetica (forza viva) + ***una costante aggiuntiva***

E=Mc^2 !!!

- Consideriamo un gruppo di particelle non relativistiche, un gas;
- L'impulso totale e' la somma degli impulsi
- nel sistema di quiete del gas, il momento spaziale e' nullo e l'energia e' la massa di riposo del sistema

$$P^\mu = \sum_i p_i^\mu;$$

$$\mathbf{P} = 0, \quad M = \frac{P^0}{c^2} = \sum m_i + \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i c^2}$$

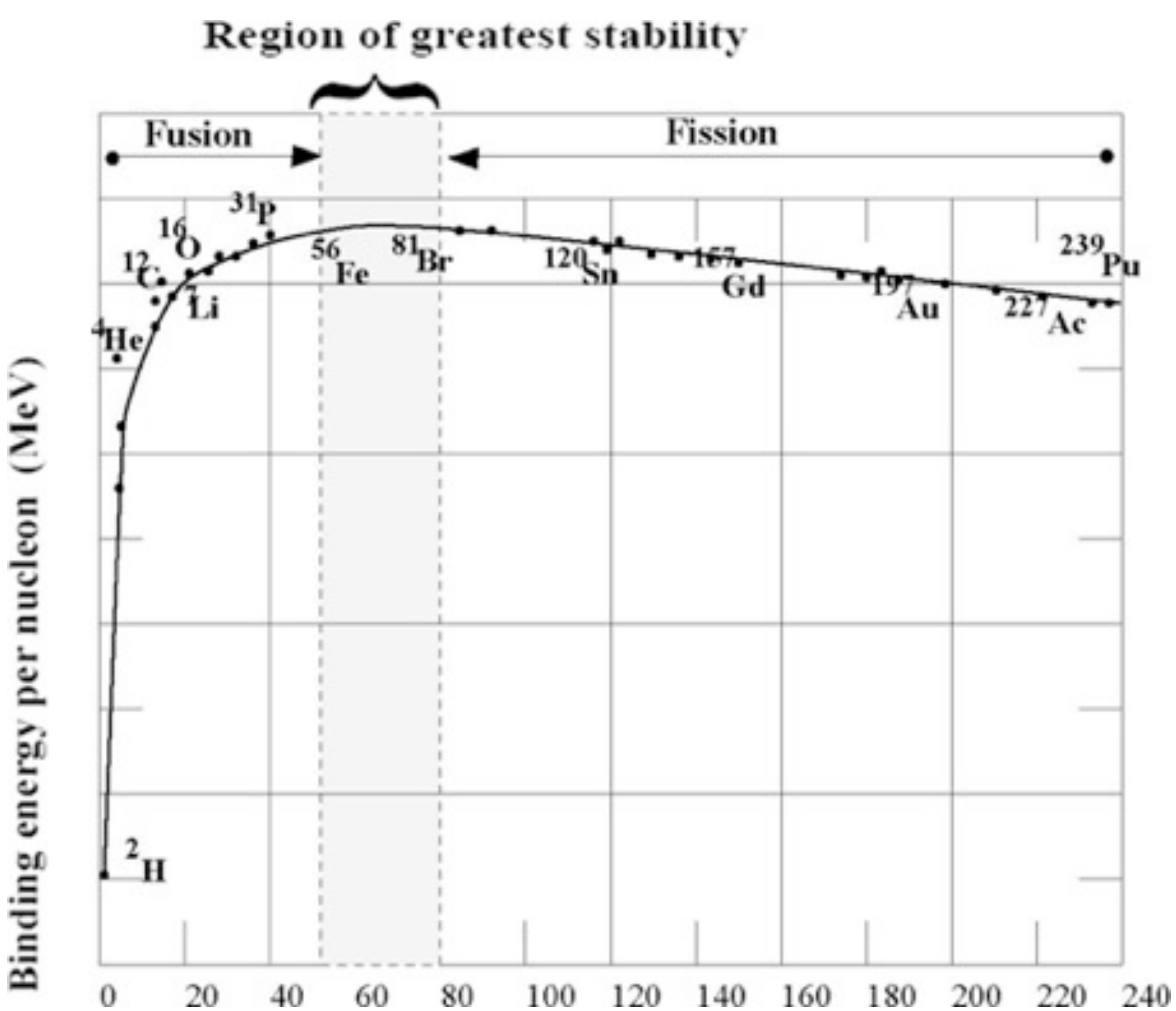
- adesso immaginiamo di cedere energia alle particelle, ad es. attraverso le pareti, in quantita' ΔE
- l'energia cinetica aumenta di ΔE e la massa Newtoniana del sistema aumenta di $\Delta M = \Delta E/c^2$
- naturalmente possiamo anche togliere energia, rispetto alle particelle libere, ad esempio facendole interagire con forze attrattive
- in ogni caso tutte le volte che trasformiamo massa in energia o viceversa, si applica la relazione di Einstein:

$$\Delta E = Mc^2$$

Difetto di massa dei nuclei

- Misura la differenza tra la somma delle masse dei nucleoni costituenti liberi e la massa del nucleo, normalizzata al numero dei nucleoni costituenti

$$B = \frac{\left(\sum_i M_i\right) - M_{nucleo}}{N}$$



- M = massa del nucleone,
- M_k = massa del nucleo con k nucleoni
- la ***fusione*** del nucleo k con 1 nucleone e'***esotermica*** se $M + M_k - M_{k+1} > 0$

$$M_k + M - M_{k+1} = (k+1)B_{k+1} - kB_k =$$

$$= (k+1)\left(B_{k+1} - B_k + \frac{1}{k+1}B_k\right) > 0,$$

richiede $B_{k+1} > B_k$

Fusione nel Sole

- Le masse delle particelle atomiche e subatomiche sono in genere date in unita’ di energia, usando il volt-elettrone, eV, e i suoi multipli: 1MeV = 1000 keV = 10^6 eV.
  - elettrone: M_e= 0.511 MeV;
  - protone: M_P=938.27 MeV; neutrone: M_N=939.57 MeV;
  - deutone: M_D=1875.61 MeV.
- L' energia emessa dal Sole e’ prodotta dalla fusione di quattro protoni in un nucleo di Elio. La fusione avviene principalmente attraverso la sequenza P-P (ci sono diverse sequenze secondarie studiate da H. Bethe negli anni '30; ricordare che Protone=H^1, Deutone=H^2):
  - $P+P \rightarrow H^2 + e^+ + \nu$
  - $H^2 + P \rightarrow He^2 + \gamma$
  - $He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + P + P$
- La reazione complessiva puo' essere scritta come:
  - $4P+2e^- \rightarrow He^4 + 2\, e^+ + 2e^- + 2\, \nu$
- I positroni si annichilano con gli elettroni del mezzo liberando energia. Quindi in totale, l' energia termica liberata ogni 4 protoni e’:
  - $\Delta E = Q - 2E_\nu$, con $Q=(4M_P+2M_e) - 2M_{He}$=26.7 MeV
- E_ν e’ l' energia media portata dai neutrini, che lasciano il Sole indisturbati e che e’ trascurabile.

Il fotone e l'effetto Doppler

$$\epsilon = h\nu \text{ (Planck)}$$

$$q = \frac{h}{\lambda} = hk \text{ (De Broglie)}$$

- k=numero d'onda, ν=frequenza=c/λ, → q^{μ}= h(|**k**|,**k**)
- la relazione energia impulso e' ε^2-$(cq)^2$=0: ***il fotone e' una particella di massa nulla***
- e infatti: V=c (qc)/ε =c, il fotone viaggia alla velocita' della luce in ogni sistema di riferimento.
- Visto da un sistema in moto:

$$\beta = \frac{V}{c},\ \gamma = 1/\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}$$

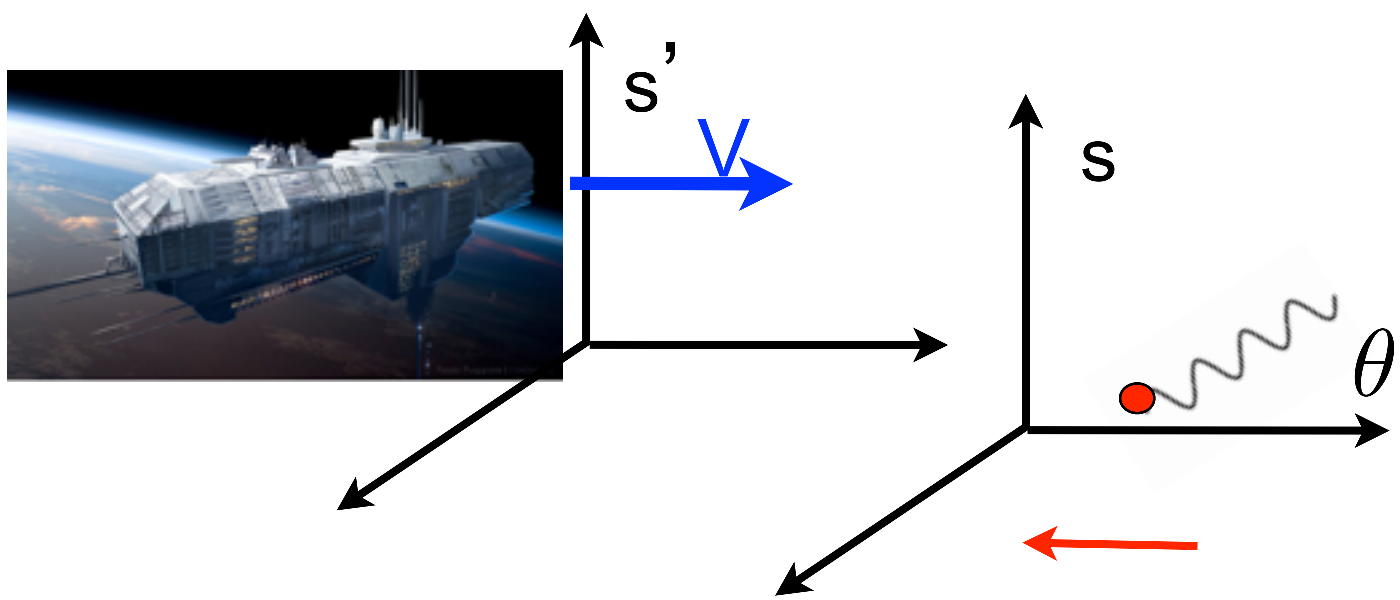
$$\begin{cases} q_x = \gamma[q_0\cos\theta - \beta\frac{\epsilon_0}{c}] = \gamma\frac{\epsilon_0}{c}(\cos\theta - \beta) \\ q_y = q_{0y} = q_0\sin\theta \\ \frac{\epsilon}{c} = \gamma\frac{\epsilon_0}{c}[-\beta\cos\theta + 1] \end{cases}$$

- cos θ=-1
- V positivo: la sorgente ci viene incontro, spostamento verso il blu

$$\nu = \nu_0\frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

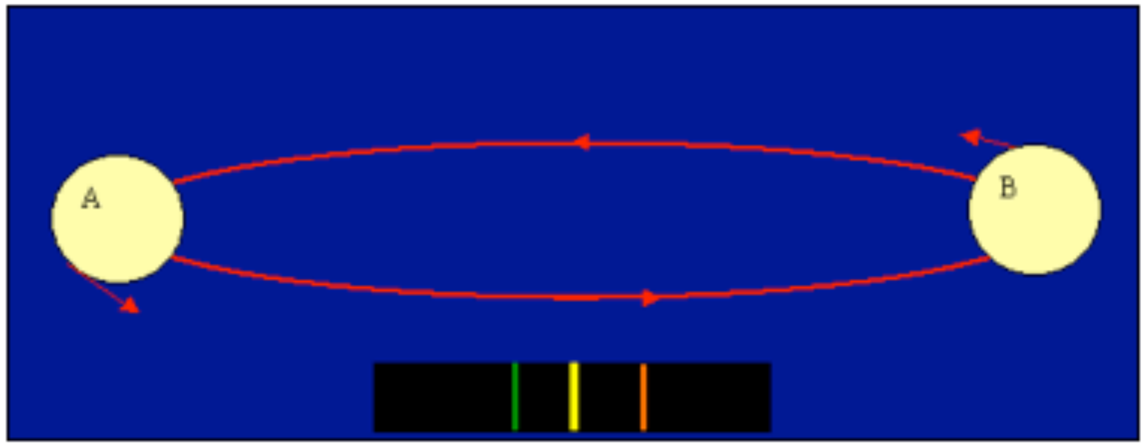
- V negativo: la sorgente si allontana, spostamento verso il rosso

$$\nu = \nu_0\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

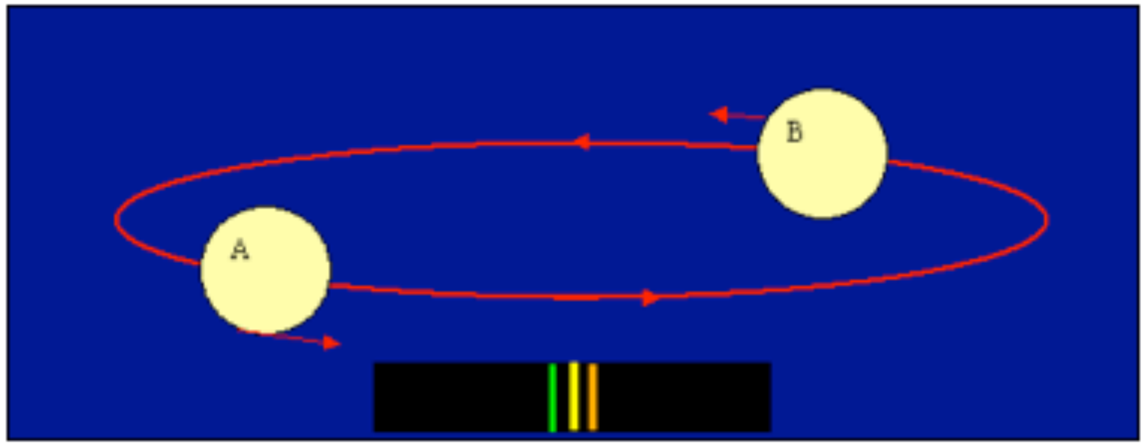


Doppler shift per sistemi binari

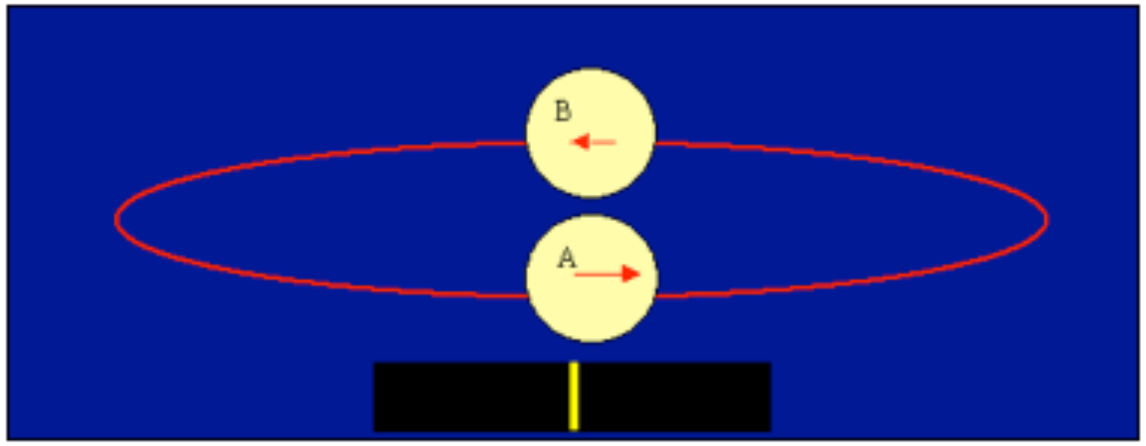
We can use the Doppler shift to tell us how the stars are orbiting. Let's look at a single line which we know is yellow in the lab:



That line for Star A is blue shifted, which means it has a shorter wavelength, so is approaching us. That for B is red shifted which means that Star B is g



Notice that now the stars have moved around in their orbit, the blue shift and red shift are less.



When the stars are in this position we only get the one spectral line as both stars are neither moving towards us nor away from us.

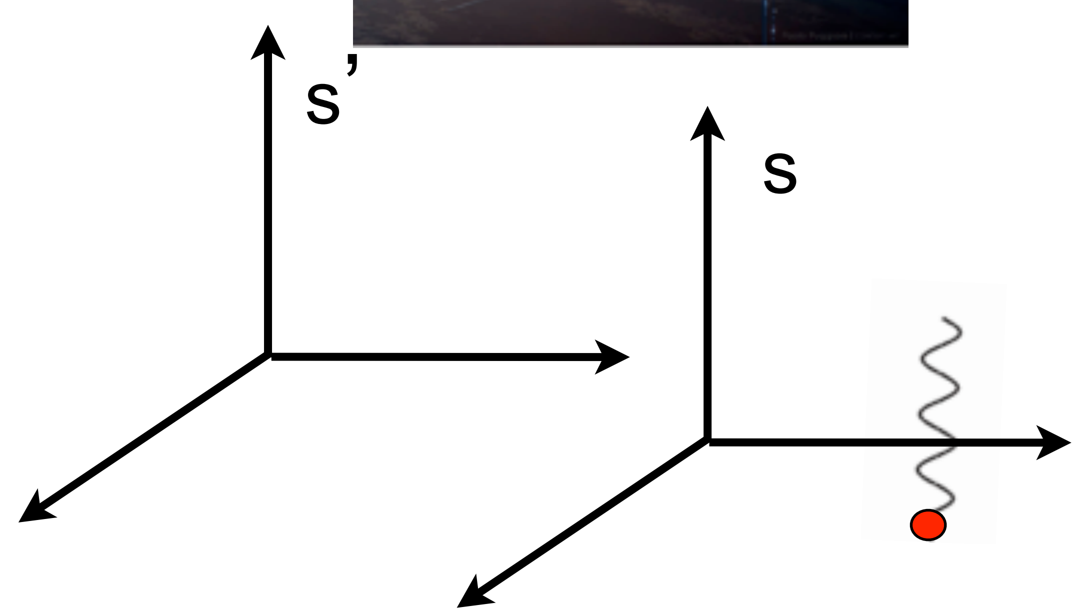
Doppler shift trasverso

- quando vediamo luce perpendicolare al senso del moto, dobbiamo stare attenti

$$\beta = \frac{V}{c},\ \gamma = 1/\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}$$

$$\begin{cases} q_x = \gamma[q_0\cos\theta - \beta\frac{\epsilon_0}{c}] = \gamma\frac{\epsilon_0}{c}(\cos\theta-\beta) \\ q_y = q_{0y} = q_0\sin\theta \\ \frac{\epsilon}{c} = \gamma\frac{\epsilon_0}{c}[-\beta\cos\theta+1] \end{cases}$$

- deve essere q_x=0, ovvero: cos θ=β
- allora: $\nu = \sqrt{1-\beta^2}\nu_0$
- e' il rallentamento degli orologi in moto $T = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}T_0$
- il modo piu' diretto per mettere in evidenza la dilatazione relativistica del tempo, paradosso dei gemelli....etc.
- e' solo di ordine β^2, in genere non e' visibile nei corpi astrofisici, ma e' stato rivelato dalla dilatazione relativistica della vita delle particelle instabili (leptone μ)



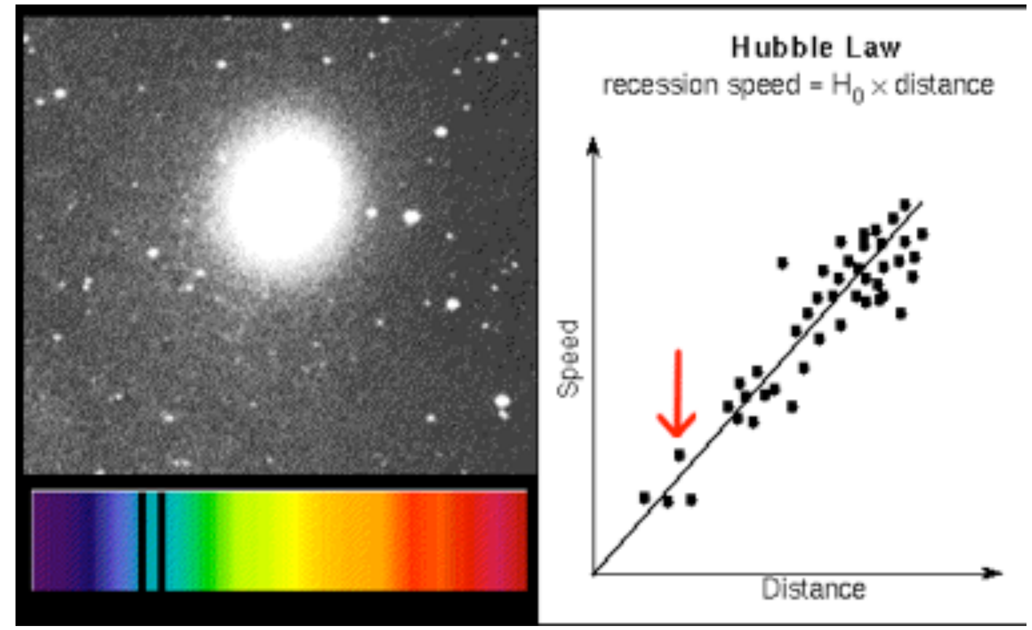
Doppler shift su grande scala

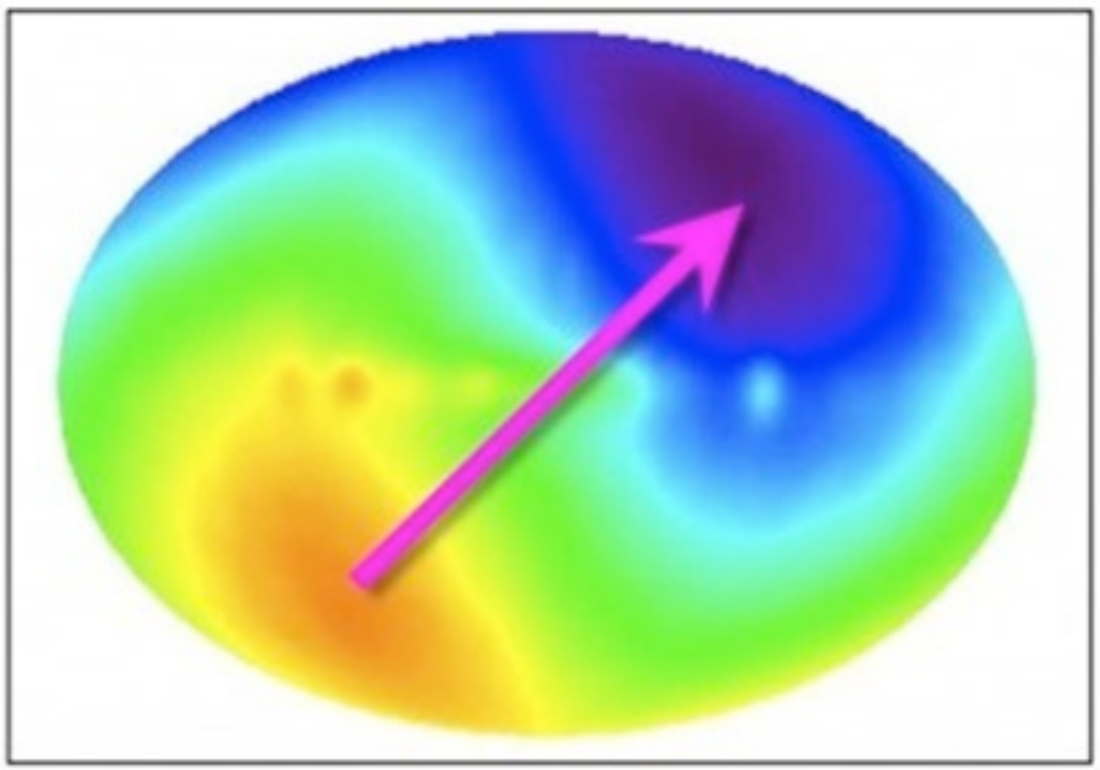
- in Cosmologia, v=vel. recessione

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{rest}}{\lambda_{rest}} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} =$$

$$= \frac{\nu_0}{\nu} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$$

≃ β per le galassie vicine





- doppler shift della radiazione del fondo cosmico dovuto al moto della Terra

"I love hearing that lonesome wail of the train whistle as the magnitude of the frequency of the wave changes due to the Doppler effect."