ANALISI VETTORIALE per Fisica
– Diario delle lezioni - Settimana n. 6 –

I risultati si intendono con dimostrazione, tranne ove diversamente indicato (s.d.). Tutte le definizioni e i teoremi sono accompagnati da esempi ed esercizi, di cui sono riportati qui solo i più elaborati.

Questo documento è curato da Andrea Dall'Aglio[1], docente del corso.

Lunedì 3 novembre 2014 - Venerdì 7 novembre 2014

- **Massimizzazione e minimizzazione vincolata in presenza di più vincoli.**
- **Esercizio:** Trovare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) = x + 3y - z$ sotto i vincoli $x^2 + y^2 - z = 0$, $z = 2x + 4y$.
- **Teorema di invertibilità locale** (s.d.).
- **Osservazione:** in dimensione 1 è proprio il teorema sulla derivata della funzione inversa fatto l'anno scorso.
- **Esercizio importante:** mostrare che la funzione $F(\rho,\theta,\varphi) = (\rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\theta)$, che descrive il passaggio a coordinate sferiche nello spazio, è localmente invertibile se $\rho \neq 0$, $\operatorname{sen}\theta \neq 0$.

- **Osservazione sulla differenziabilità delle funzioni di più variabili.** Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, con E aperto, e sia $\mathbf{x}^0 \in E$. Le seguenti due definizioni di differenziabilità sono equivalenti:
- **Definizione 1:** f si dice differenziabile in $\mathbf{x}^0$ se f ammette derivate parziali in $\mathbf{x}^0$ e si ha
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|)$$
per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$.
- **Definizione 2:** f si dice differenziabile in $\mathbf{x}^0$ se esiste un vettore $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^N$ tale che
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|)$$
per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$.

[1]Con qualche aiuto da:
Pierrejean Gaucher New Trio - Pick's Dilemma
Mike Keneally - Nonkertompf
New York String Trio - Common Goal
Norwegian Wind Ensemble - The Brass from Utopia. A Frank Zappa Tribute
Cannonball Adderley Quintet - In Chicago

- In quest'ultimo caso si deve avere, a posteriori, $\mathbf{A} = \nabla f(\mathbf{x}^0)$.
- **Osservazione:** Quindi, se si prova che una funzione verifica
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = o(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|)$$
per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$, f risulta differenziabile in $\mathbf{x}^0$ e si ha $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.
- **Integrali impropri. Integrali impropri convergenti, divergenti, indeterminati.**
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}\,.$
- **Esempio importante:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge per $\alpha < 1$, diverge per $\alpha \geq 1$.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\,.$
- **Esempio importante:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \leq 1$.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx\,.$
- **Importante:** Come procedere per integrali impropri in un intervallo del tipo (a,b).
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,.$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,.$
- **Esempio:** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ non è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$.
- **Osservazione:** Il seguente modo di procedere è errato:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0\,.$$
- **Esempio:** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}.$

- **Osservazione:** un integrale di Riemann è anche un integrale improprio. In altre parole, se $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega\to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx\,.$$

- **Integrali impropri di funzioni a segno costante.**
- **Criterio del confronto per integrali impropri.**
- **Esempio:** $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x^2+6}$ converge.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ diverge.
- **Teorema (criterio del confronto asintotico).**
- **Esempio:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5x^2-\operatorname{sen} x}{4x+5+x^{5/2}}\,dx$ converge.
- **Esempio:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{5} \frac{3x^4}{5+x^2e^{|x|}}\,dx$ converge.
- **Esercizio:** studiare la convergenza di

$$\int_1^5 \frac{dx}{\ln x}\,.$$

- **Esercizio:** studiare la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+3x^2}\,dx\,.$$

- **Tabella delle funzioni "campione" con cui fare il confronto:**
  1. Per $x\to+\infty$: $\dfrac{1}{x^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha>1$);
  2. Per $x\to x_0^+$: $\dfrac{1}{(x-x_0)^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha<1$);
  3. Per $x\to x_0^-$: $\dfrac{1}{(x_0-x)^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha<1$);
  4. Per $x\to-\infty$: $\dfrac{1}{(-x)^\alpha}$ (l'integrale converge se e solo se $\alpha>1$).
- **Esercizio:** al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_3^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-2}\right)^\alpha dx\,.$$

(Soluzione: converge se e solo se $\alpha>1$).

- **Esercizio:** Trovare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\log x|^\alpha}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

(Soluzione: converge se e solo se $\alpha>-\dfrac{2}{3}$).

- **Esercizio:** al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-2)^\alpha}\,dx\,,$$

e calcolarlo per $\alpha=2$. *(Soluzione: converge se e solo se $\alpha>1$; per $\alpha=2$ vale $\dfrac{1}{10}(14\operatorname{arctg}3-2\pi+\ln 10)$).*

- **Esercizio:** al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx\,.$$

(Soluzione: converge se e solo se $\alpha<2$).

- **Esercizio:** al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} x}{|x-2|^\alpha}\,dx\,.$$

(Soluzione: converge se e solo se $\alpha<1$).

- **Proposizione (variante al criterio del confronto asintotico)** Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}^+$ funzioni Riemann-integrabili in $[a,\omega]$ per ogni $\omega\in(a,b)$. Se $f(x)=o(g(x))$ per $x\to b^-$, e se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora anche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
- **Assoluta integrabilità.**
- **Teorema (assoluta integrabilità):** Sia $f : [a, b)\to\mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile in $[a,\omega]$ per ogni $\omega\in(a,b)$. Se f è assolutamente integrabile in $[a,b)$, allora è integrabile in $[a,b)$. Inoltre vale la disuguaglianza triangolare

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

- **Esempio:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ converge.
- **Esercizio:** $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x^2}{\sqrt{27x^3-1}}\,dx\,.$ *(Soluzione: converge).*
- **Osservazione:** la convergenza è una condizione sufficiente, non necessaria per la convergenza dell'integrale: ad esempio, gli integrali

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$$

convergono, ma non assolutamente (s.d.).