Esercizi di Cinematica

Le equazioni cinematiche

Moto rettilineo uniforme

$$a = 0$$

$$v = v_0 = \text{costante}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$a \neq 0 \text{ e costante}$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_f^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

ESERCIZIO n.1

Quando il semaforo diventa verde, un'automobile parte con accelerazione **$a=3.0 m/s^2$**, mentre una seconda auto che sopraggiunge in quel momento continua la sua corsa con velocità costante **$v=72.0$ Km/h**.

a) Dopo quanto tempo la prima auto affiancherà nuovamente la seconda?

b) Quale velocità avrà in quell'istante e quale distanza avrà percorso?

c) In quale istante le auto hanno la stessa velocità e a quale distanza dal semaforo si trovano?

Fare i diagrammi orari e i diagrammi v(t) per le due auto.

SOLUZIONE

Quando il semaforo diventa verde, un'automobile parte con accelerazione **$a=3.0 m/s^2$**, mentre una seconda auto che sopraggiunge in quel momento continua la sua corsa con velocità costante **$v=72.0$ Km/h**.

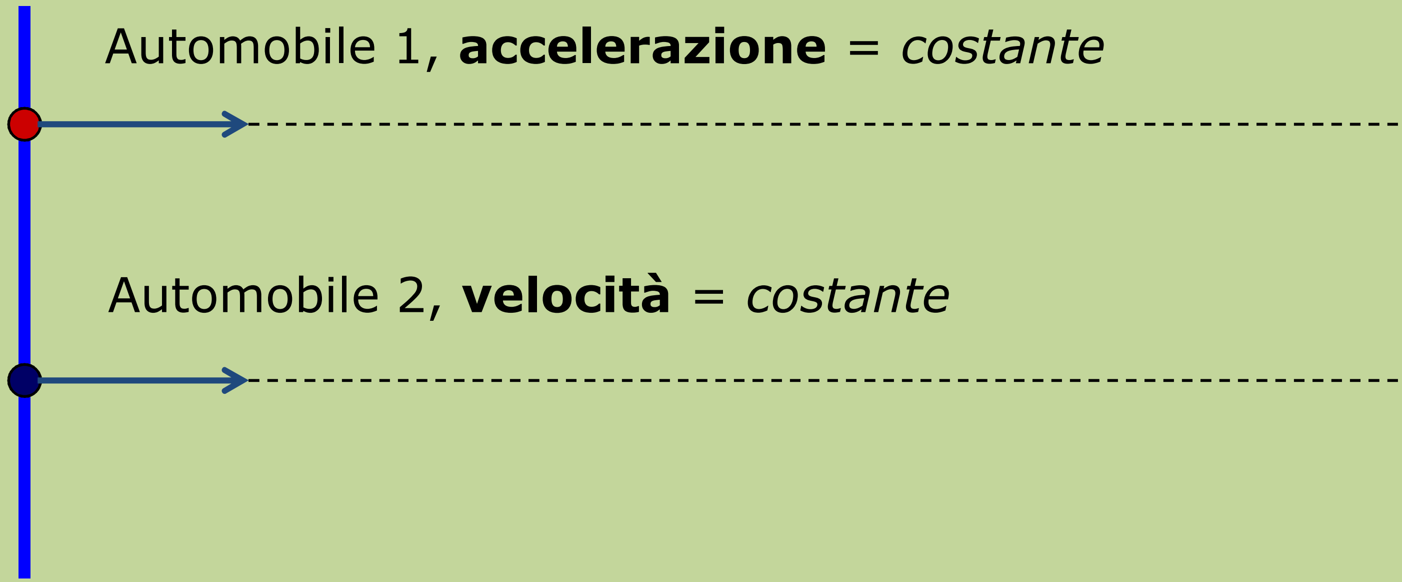
a) Dopo quanto tempo la prima auto affiancherà nuovamente la seconda?
b) Quale velocità avrà in quell'istante e quale distanza avrà percorso?
c) In quale istante le auto hanno la stessa velocità e a quale distanza dal semaforo si trovano?

Fare i diagrammi orari e i diagrammi v(t) per le due auto.

Prima cosa da fare: **DISEGNO**

ovvero uno schema che ci aiuti a descrivere il moto.

Dopo quanto tempo la prima auto affiancherà nuovamente la seconda?



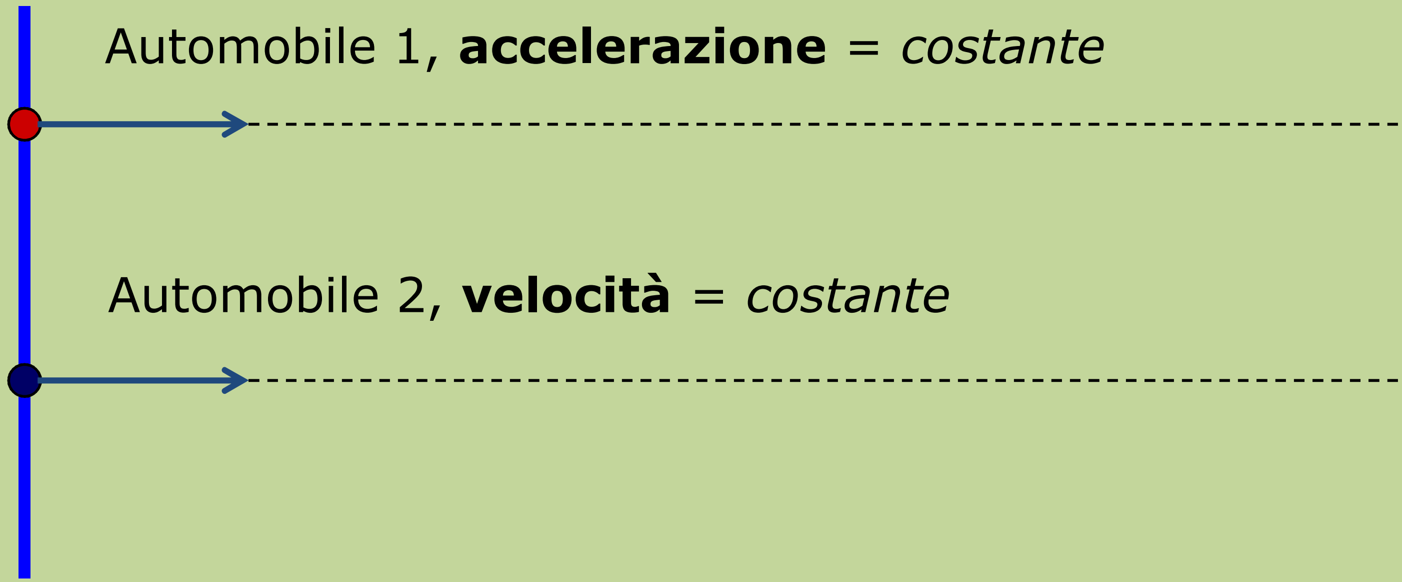
$$x_1 = \frac{1}{2}at^2$$
$$x_2 = vt$$

Poniamo $x_1 = x_2$

$$\frac{1}{2}at^2 = vt \Rightarrow \frac{1}{2}at = v \Rightarrow t = 2\frac{v}{a}$$

$$t = 2\frac{72000/3600}{3} = \frac{40}{3} = 13.3\,\mathrm{sec}$$

Quale velocità avrà in quell'istante e quale distanza avrà percorso?



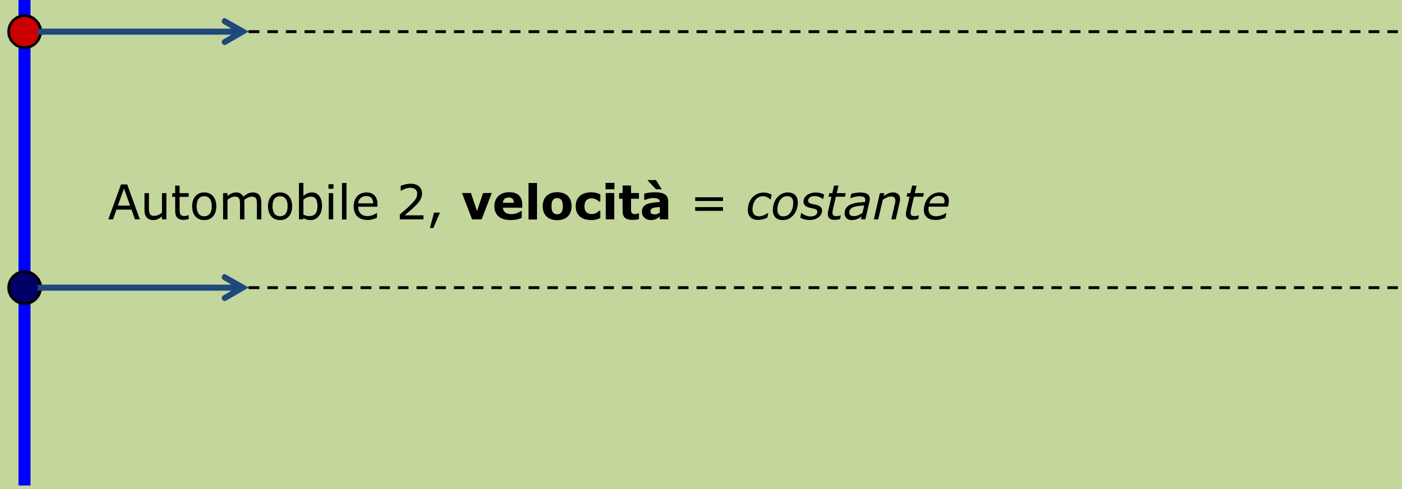
$$x_1 = \frac{1}{2}at^2$$
$$v_1 = at$$

$$x_1 = \frac{1}{2}3(13.3)^2 = 265.3m$$
$$v_1 = 3(13.3) = 40.0\,{}^{m}\!/_{\mathrm{sec}}$$

In quale istante le auto hanno la stessa velocità ?

Automobile 1, **accelerazione** = *costante*

Automobile 2, **velocità** = *costante*

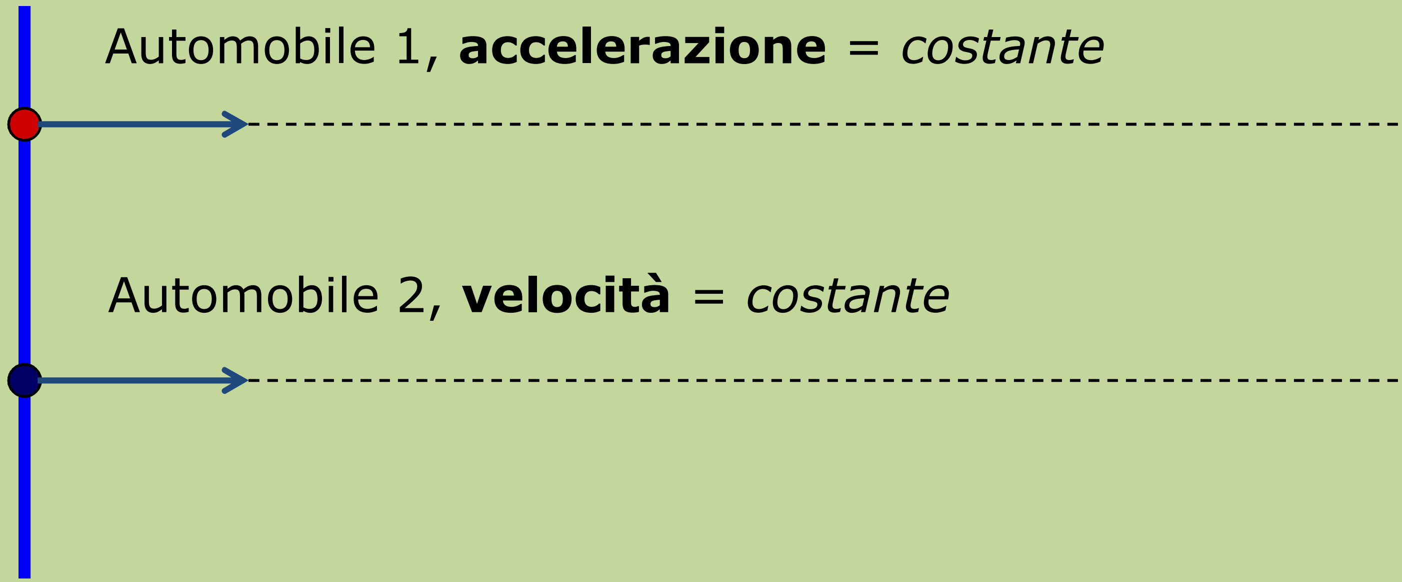


$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= at \\ v_2 &= \text{costante} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{v_1 = v_2 = at}$$

$$\boxed{t = \frac{v_2}{a} = \frac{72000/3600}{3} = 6.6\,\text{sec}}$$

A quale distanza dal semaforo si trovano?

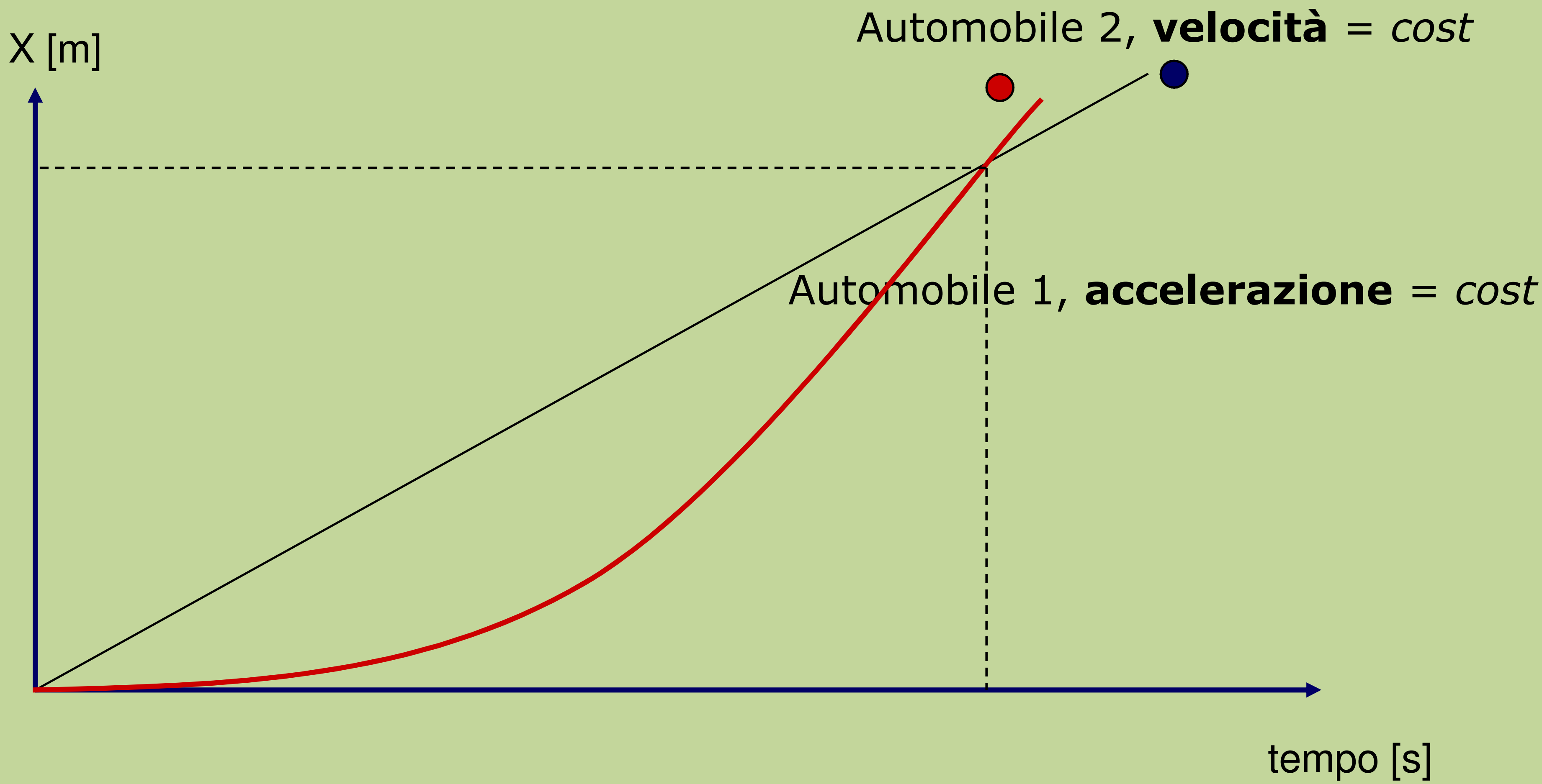
(quando hanno la stessa velocità)



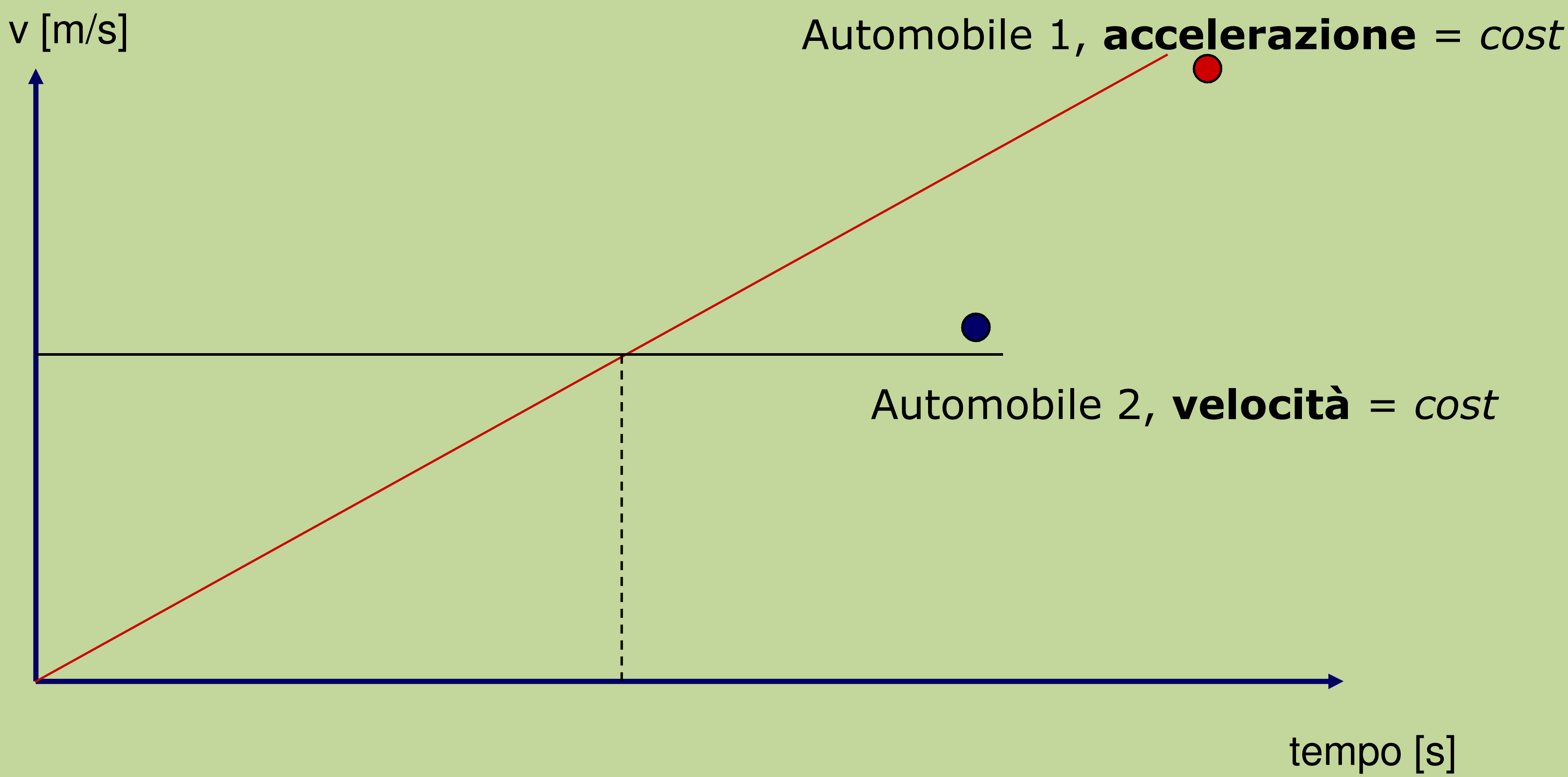
$$x_1 = \frac{1}{2} a t^2$$
$$x_2 = vt$$

$$x_1 = \frac{1}{2} 3 (6.6)^2 = 65.34 m$$
$$x_2 = \frac{72000}{3600} 6.6 = 132 m$$

Fare i diagrammi orari e i diagrammi v(t) per le due auto.



Fare i diagrammi orari e i diagrammi v(t) per le due auto.



ESERCIZIO n.2

Un uomo di **70.0kg** salta da una finestra nella rete dei vigili del fuoco tesa a **11.0m** più in basso.

- Calcolare la velocità dell'uomo quando tocca la rete.

La rete, cedendo di **1.5 metri**, riesce ad arrestare l'uomo.

- Calcolare la decelerazione dell'uomo durante la fase di arresto.

SOLUZIONE

Un uomo di **70.0kg** salta da una finestra nella rete dei vigili del fuoco tesa a **11.0m** più in basso.

- Calcolare la velocità dell'uomo quando tocca la rete.

La rete, cedendo di **1.5 metri**, riesce ad arrestare l'uomo.

- Calcolare la decelerazione dell'uomo durante la fase di arresto.

Dividiamo lo studio in due fasi:

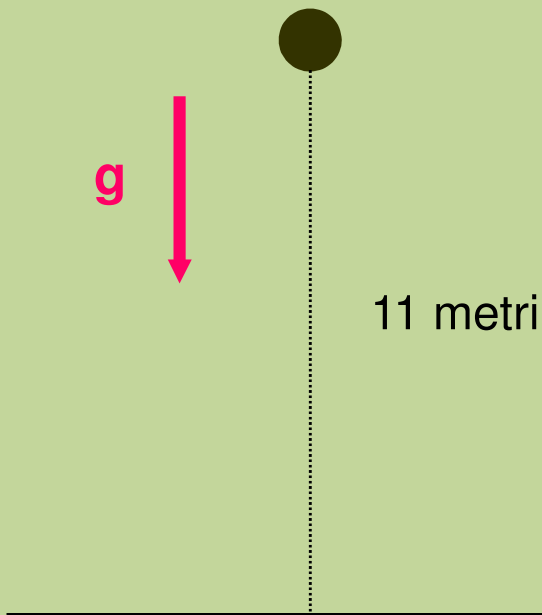
1) **Moto in caduta libera dell'uomo per 11.0 m, con velocità iniziale pari a zero;**
2) **Moto uniformemente decelerato per 1.5 metri.**

Importante: MOTO IN CADUTA LIBERA SIGNIFICA CHE C'E' ACCELERAZIONE DI GRAVITA' $g = 9.8\ m/s^2$, DIRETTA VERSO IL BASSO.

Calcolare la velocità dell'uomo quando tocca la rete.

velocità iniziale $v_0 = 0$

$v=v_0+at=gt$, con $a = g = 9.8\ m/s^2$



Non conosciamo il tempo necessario a raggiungere terra, cioè a percorrere 11 metri. Usiamo

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2}$$

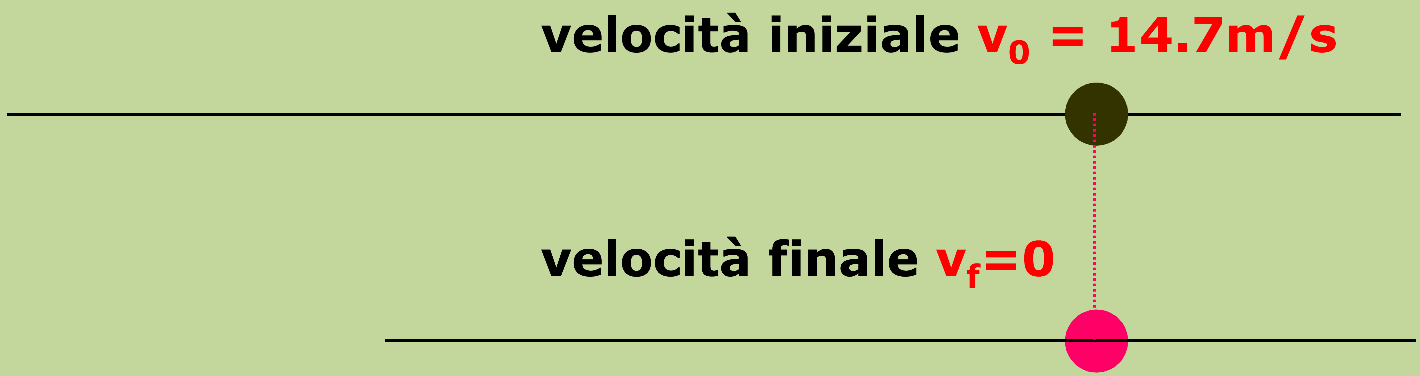
Da cui si ricava

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{22}{9.8}} = 1.5\sec}$$

E quindi

$$\boxed{v = gt = 9.8(1.5) = 14.7\ {}^{m}\!/_{\sec}}$$

Calcolare la decelerazione dell'uomo durante la fase di arresto.



Dopo avere percorso uno spazio **s=1.5m**

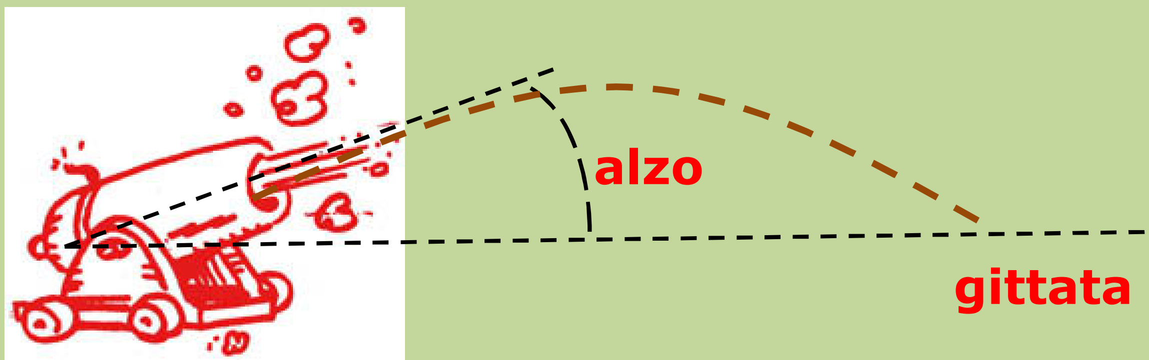
Si può applicare l'equazione $\boxed{v_f^2 = v_0^2 + 2as = 0}$

Da cui si ricava

$$\boxed{a = -\frac{v_0^2}{2s} = -\frac{(14.7)^2}{3} = -72 \, {}^{m}\!/_{\sec^2}}$$

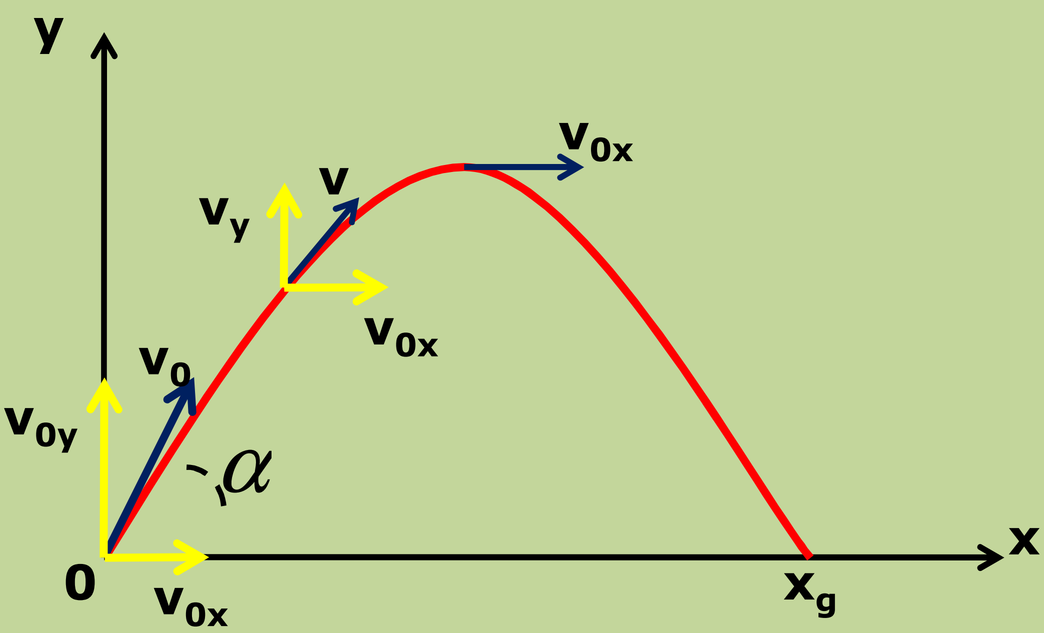
ESERCIZIO n.3

Un cannone lancia un proiettile a velocità $\mathbf{v_0=300m/sec}$. Calcolare l'**alzo** del cannone per avere la **massima gittata** determinandone anche il valore.



SOLUZIONE

Nella schematizzazione del problema si osserva che la velocità iniziale può essere decomposta nelle due componenti lungo l'asse **x** e lungo l'asse **y** rispettivamente.



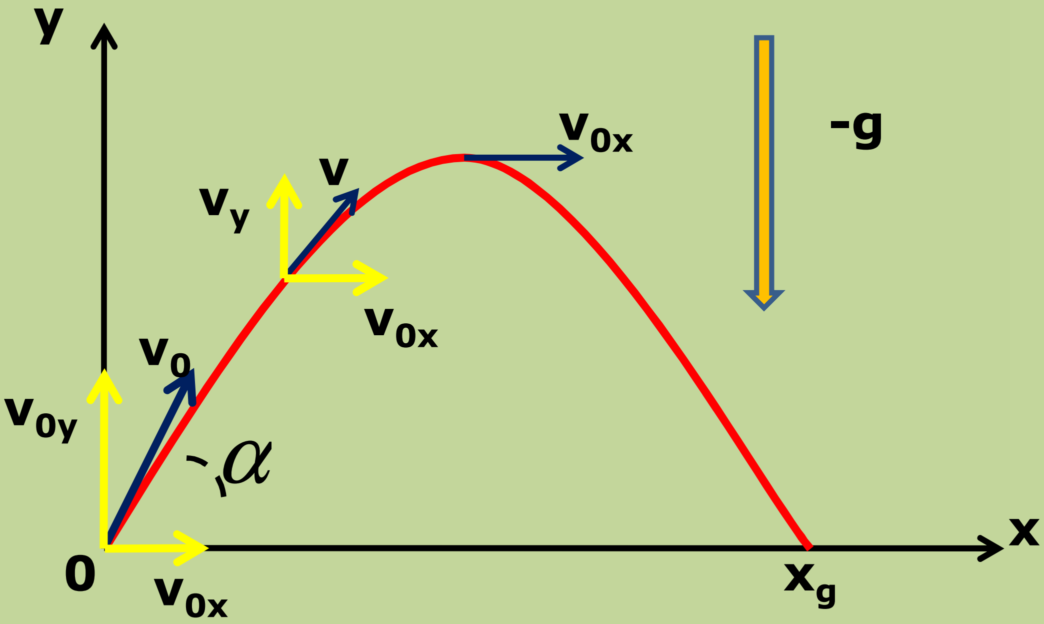
$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

La componente della velocità lungo l'asse **x** resterà inalterata e costante.

Lungo **x** il moto è **rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v_{0x}}$**.

SOLUZIONE

Lungo l'asse **y**, invece, agisce l'accelerazione di gravità. Ma agisce nella direzione contraria; pertanto si avrà una decelerazione.



La componente della velocità lungo l'asse **y** varierà, annullandosi nel punto di massima quota.

Lungo **y** il moto è **rettilineo uniformemente accelerato**.

Pertanto si può scrivere

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t}$$

SOLUZIONE

In sintesi ecco le equazioni orarie per le due componenti del moto

$$x(t) = v_{0x} t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t$$

E sostituendo le componenti della velocità

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t$$

Ora per determinare la **gittata** si osserva che il tempo per percorrere lo spazio $\mathbf{x_g}$ può essere calcolato come

$$t = \frac{x_g}{v_{0x}} = \frac{x_g}{v_0 \cos\alpha}$$

e dopo tale tempo dovrà essere **y(t)=0**, quindi

$$-\frac{1}{2} g \left(\frac{x_g}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x_g}{v_0 \cos\alpha} = 0$$

SOLUZIONE

Con qualche passaggio algebrico …

$$x_g\left(g x_g - 2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha\right) = 0$$

… escludendo la soluzione **x_g=0** (*l'origine del moto*), si ha

$$x_g = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

Per determinare la gittata massima

$$\frac{dx_g}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{g} 2\cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$$

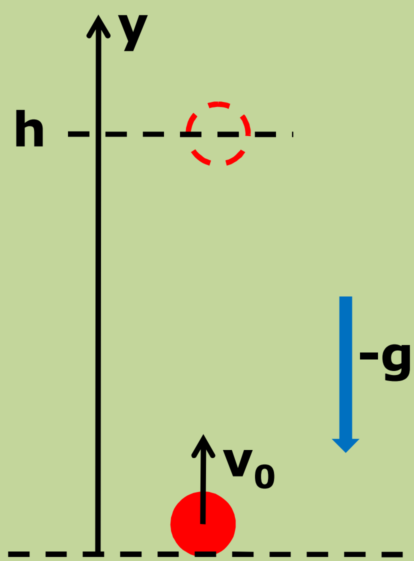
E quindi la massima gittata vale

$$x_{g\,\max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(300)^2}{9.8} = 9183.67\,m$$

ESERCIZIO n.4

Una palla di 0.40 Kg è lanciata in aria e raggiunge **una altezza massima di 20 m**. Calcolare la sua **velocità iniziale**.

Schematizziamo il problema



Considerando che la velocità finale sarà nulla e la decelerazione è sempre costante si ha

$$\boxed{v_f^2 = v_0^2 + 2ah = 0}$$

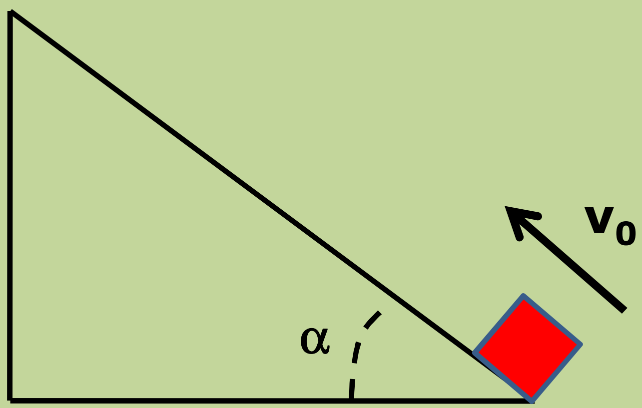
e quindi

$$\boxed{v_0 = \sqrt{-2ah} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(20)} = 19.8 \, {}^{m}\!/_{\text{sec}}}$$

ESERCIZIO n.5

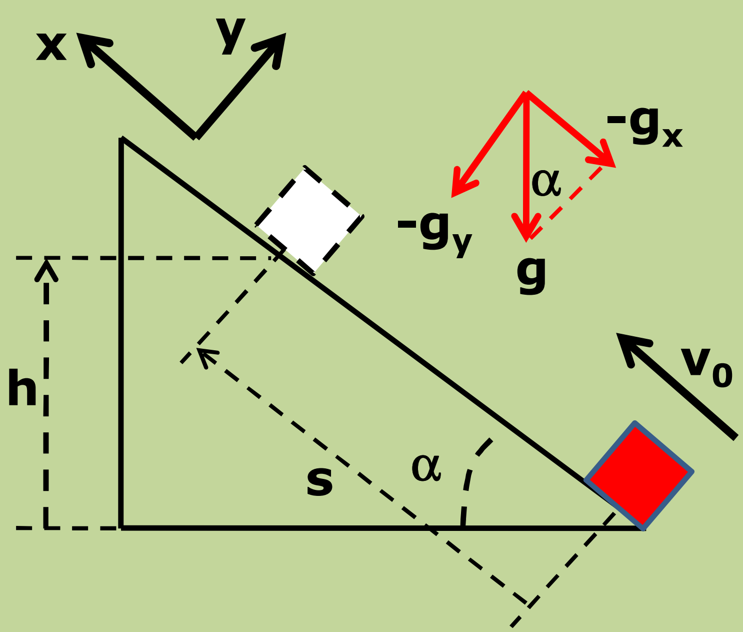
Un oggetto viene spinto a salire su un piano inclinato con una velocità iniziale **v_0=30m/sec**. Essendo **α=45°** l'inclinazione del piano inclinato, si determini:

1. **Il tempo necessario ad arrestarsi**;
2. **A che altezza dal suolo si fermerà**.



SOLUZIONE

Schematizziamo il problema



s sarà lo spazio percorso lungo il piano inclinato fino al punto di arresto

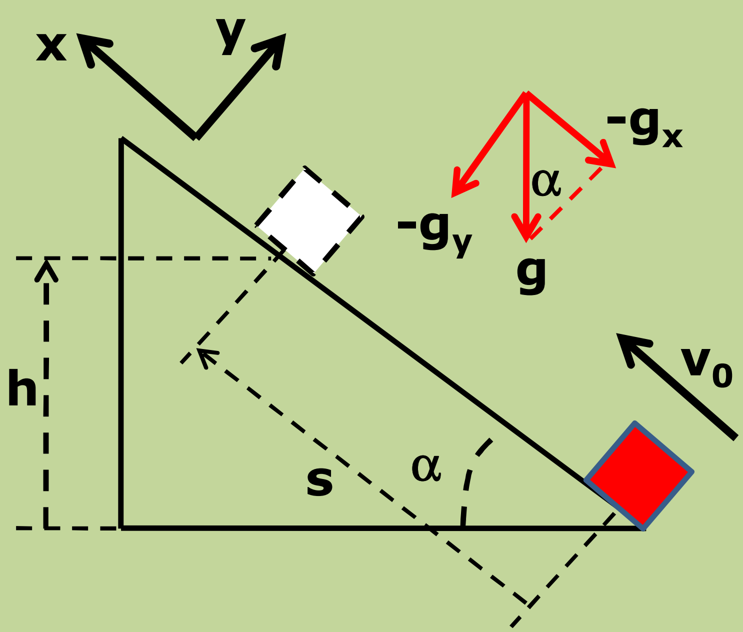
h sarà la quota raggiunta rispetto al piano orizzontale

Appare ovvia la scelta del sistema di rifermento indicato

Il corpo è soggetto alla accelerazione di gravità che va decomposta secondo il riferimento scelto. Quindi …

$$\boxed{\begin{aligned} g_x &= g \sin\alpha \\ g_y &= g \cos\alpha \end{aligned}}$$

SOLUZIONE



Riferendoci al moto lungo l'asse x ed essendo esso decelerato, si potrà scrivere

$$\boxed{v_f = v_0 + at = v_0 - g\sin(\alpha)t}$$

E dovendosi fermare si potrà calcolare il tempo di arresto come

$$\boxed{t = \frac{v_0}{g\sin\alpha} = \frac{30}{9.8\sin 45°} = 4.32\sec}$$

Per trovare lo spazio percorso lungo **x** si ha $\boxed{v_f^2 - v_0^2 = -2g\sin(\alpha)s}$

da cui $\boxed{s = \dfrac{v_0^2}{2g\sin\alpha}}$ E quindi

$$\boxed{h = s\sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}\sin\alpha = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(30)^2}{2(9.8)} = 45.9m}$$

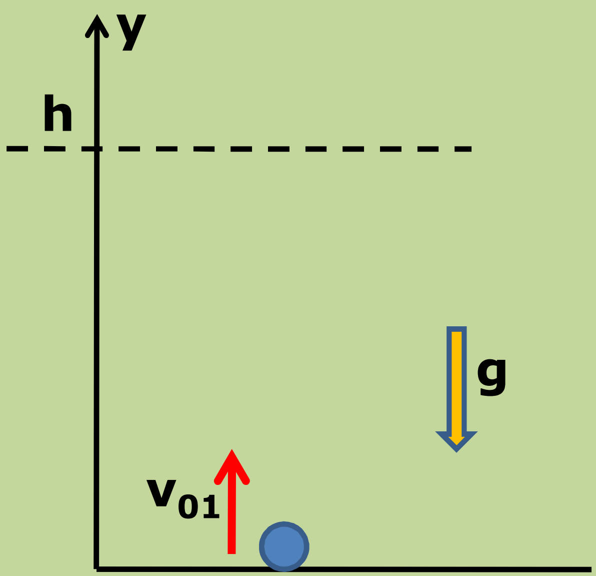
ESERCIZIO n.6

Un sasso è lanciato verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale **v_{01}=25m/sec**. Si calcoli la **massima quota raggiunta ed il tempo impiegato**.

Un secondo sasso è lanciato verso l'alto, lungo la stessa traiettoria del primo, quando il primo si ferma in quota. A tale sasso è impressa una velocità iniziale **v_{02}=15m/sec**. **Dopo quanto tempo si incontreranno i due sassi? E a quale quota?**

SOLUZIONE

Schematizziamo il problema



Appare evidente che, nella prima fase del moto, il corpo, lanciato verso l'alto, sarà decelerato dalla attrazione gravitazionale.

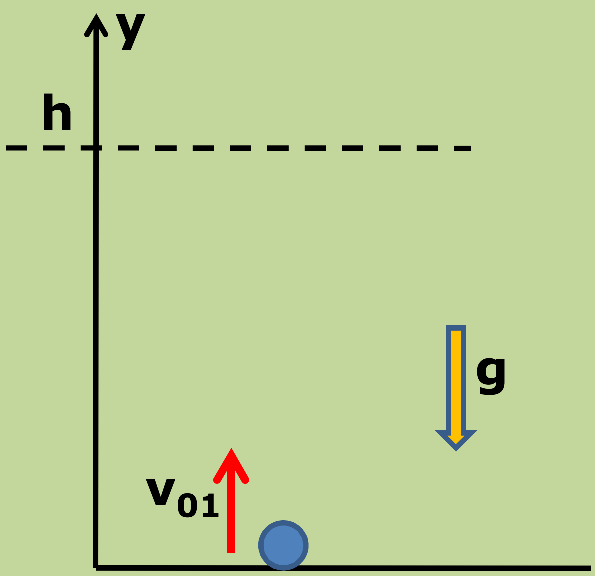
Pertanto si potrà scrivere

$$v_f^2 - v_{01}^2 = 2ah = -2gh$$

Ma, alla quota h il corpo si fermerà. quindi

$$h = \frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{(25)^2}{2(9.8)} = 31.8m$$

SOLUZIONE



Nota l'altezza raggiunta **h=31.8m** è possibile determinare il tempo di volo fino al punto di arresto.

Basta ricordare l'equazione cinematica della velocità per il caso di decelerazione

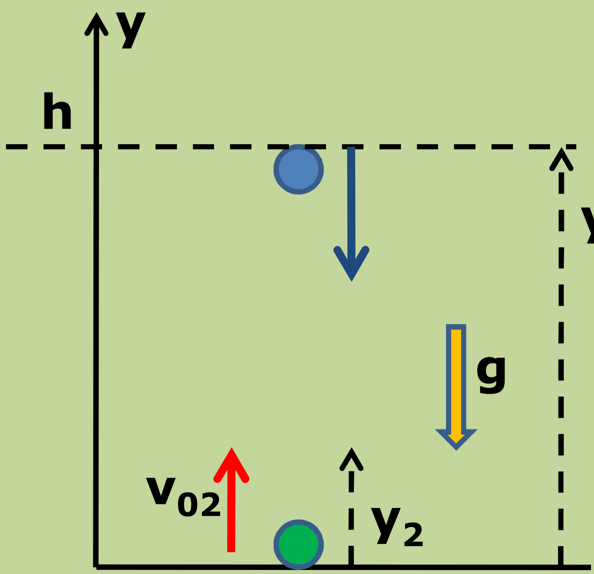
$$\boxed{v_f = v_{01} - gt = 0}$$

Pertanto si ha

$$\boxed{t = \frac{v_{01}}{g} = \frac{25}{9.8} = 2.55\,\mathrm{sec}}$$

SOLUZIONE

Una seconda schematizzazione



Ora il sasso n°1 è per un istante fermo, poi inizierà a cadere sotto l'azione della gravità

La sua legge oraria, con la quota valutata rispetto al terreno, è

$$\boxed{y_1 = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

Per il sasso n°2 si ha ovviamente

$$\boxed{y_2 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{02} t}$$

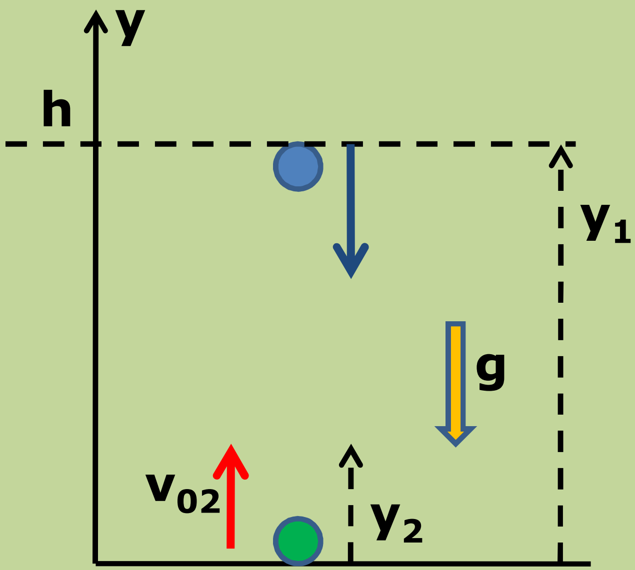
Quando si toccheranno dovrà essere $y_1 = y_2$. Quindi

$$\boxed{h - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{02} t}$$

da cui

$$\boxed{t_i = \frac{h}{v_{02}} = \frac{31.8}{15} = 2.12\,\sec}$$

SOLUZIONE



Per la determinazione della quota di impatto, utilizzando il valore **t_i=2.12sec**, basta applicare una qualsiasi legge oraria

$$\boxed{y_1 = h - \frac{1}{2} g t^2}$$

e sostituendo …

$$\boxed{y_i = h - \frac{1}{2} g t_i^2 = 31.8 - \frac{1}{2} 9.8 (2.12)^2 = 9.77m}$$