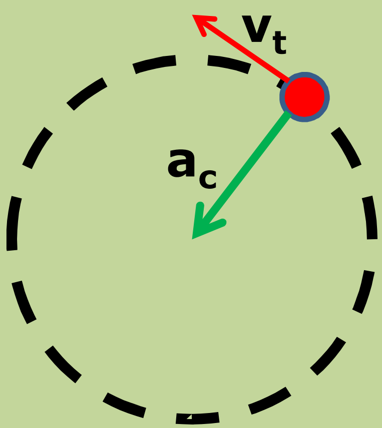
Cinematica rotazionale

Moto Circolare Uniforme

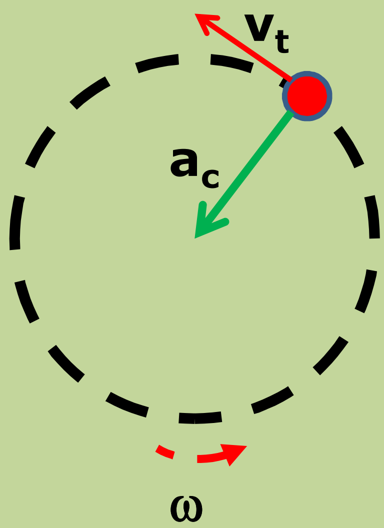
Un oggetto che si muove su una circonferenza con una **velocità costante *v***, compie un ***moto circolare uniforme***.
Il modulo della velocità resta costante, ma la direzione cambia continuamente.
Un **cambiamento nella direzione della velocità** costituisce un' **accelerazione** proprio come costituisce un'accelerazione un cambiamento nel modulo della velocità.



Il corpo che segue una traiettoria circolare a velocità costante è quindi soggetto ad un' accelerazione rivolta verso il centro del cerchio, chiamata ***accelerazione centripeta***. Questa accelerazione sarà uguale ad:

$$\boxed{a_c = \frac{v_t^2}{r}}$$

Moto Circolare Uniforme



L'accelerazione centripeta dipende da V_t ed da r in quanto **più grande è la velocità V_t** e **più rapidamente cambia la direzione della velocità**, quindi l' **accelerazione aumenta**.
Più è grande il raggio, e **meno rapidamente la velocità cambia direzione** e quindi l' **accelerazione diminuisce**.

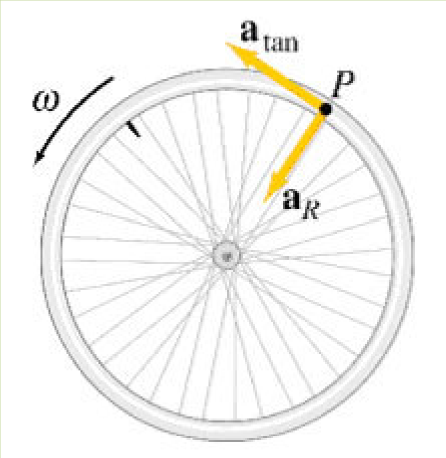
$$\boxed{a_c = \frac{v_t^2}{r}}$$

La velocità può anche essere espressa in termini di **velocità angolare** che si esprime in **radianti al secondo,** definendo così la **velocità tangenziale** e **l'accelerazione centripeta**, rispettivamente, come

$$[\omega] = \left[\frac{rad}{\sec}\right]$$

$$\boxed{v_t = \omega r \;\text{ e }\; a_c = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r}$$

Moto Circolare Uniformemente Accelerato



Se il moto è **accelerato costantemente** ed è **circolare** si parla di **moto circolare uniformemente accelerato**.

Questo è molto simile a quello rettilineo uniformemente accelerato, con la sola differenza che invece di **accelerazione** e **velocità** si parla di **accelerazione angolare** e **velocità angolare**.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

L'**accelerazione angolare** è definita come la **rapidità di variazione della velocità angolare**.

$$a_{\tan} = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

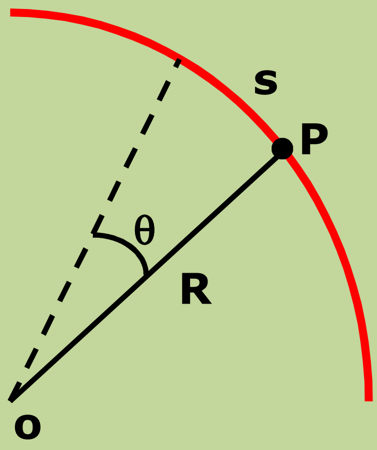
Parlando di accelerazione angolare è utile definire anche l'**accelerazione tangenziale** da non confondere con l'accelerazione centripeta $\mathbf{a_r}$.

Le equazioni cinematiche a confronto

Moto uniformemente accelerato

lineare	**angolare**
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Un problema di cinematica rotazionale



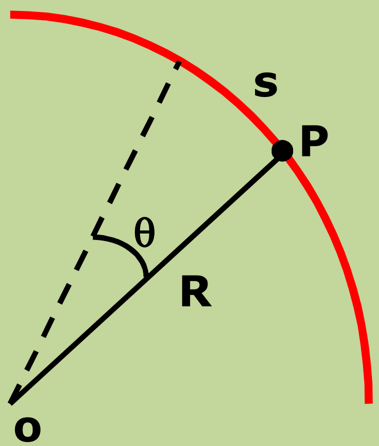
Un punto materiale **P** si muove lungo una traiettoria circolare di centro **O** e raggio **R** seguendo la legge oraria:

$$\boxed{s = \theta R = \frac{1}{2} c t^2}$$

Dove **c=1m/sec²** è la sua accelerazione tangenziale.

Si determini nel punto $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} rad$ il valore della **accelerazione angolare** ed il **modulo della accelerazione complessiva**.

Un problema di cinematica rotazionale



Si tratta di un moto circolare uniformemente accelerato la cui velocità tangenziale è determinabile come:

$$v_t = \dot{s} = \frac{d\left(\frac{1}{2}ct^2\right)}{dt} = ct$$

E quindi l'espressione della velocità angolare è

$$\omega = \frac{v_t}{R} = \frac{ct}{R}$$

Dalla legge oraria si ha

$$\theta = \frac{1}{2}\frac{ct^2}{R}$$

quindi l'angolo

$$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} rad$$

sarà raggiunto all'istante

$$t = \sqrt{\frac{2R\theta}{c}} = \sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{c}}$$

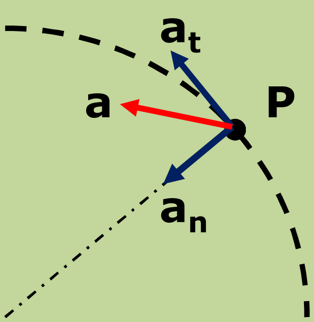
pertanto …

Un problema di cinematica rotazionale

… pertanto il cercato valore di velocità angolare è

$$\boxed{\omega = \frac{c\sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{c}}}{R} = \sqrt{\frac{c\sqrt{3}}{R}} \quad rad/\sec}$$

Per la **accelerazione totale a**, bisogna ricordare che il moto è **circolare** ed **accelerato**. E allora l'accelerazione è la **somma vettoriale** di una **accelerazione centripeta** e di una **accelerazione tangenziale**.



Quindi

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t}$$

Pertanto, per il **modulo** di **a**, si avrà

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

Un problema di cinematica rotazionale

A questo punto ricordando che $\boxed{a_t = \dot{v}_t = \frac{d(ct)}{dt} = c}$

mentre per la componente centripeta $\boxed{a_n = \frac{v_t^2}{R} = \frac{(ct)^2}{R}}$

che calcolata all'istante **t** prima determinato vale

$$\boxed{a_n = \frac{\left(c\sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{c}}\right)^2}{R} = c\sqrt{3}}$$

si ottiene

$$\boxed{a = \sqrt{c^2 + (c\sqrt{3})^2} = 2c = 2\,{}^{m}\!/_{\sec^2}}$$